

GRONDBEGINSELS

DER

MEETKUNDE,

DOOR

J. H. VAN SWINDEN,

Hoogleeraar in de Wijsbegeerte, Wis-, Natuur- en Sterrekunde te Amsterdam; Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Kunsten, van de Koninklijke Academie te Brussel, en van verscheide geleerde Genootschappen: Correspondent van de Koninklijke Academie van Wetenschappen, te Parijs.

TWEEDE, VERBETERDE, EN VEEL VERMEERDERDE DRUK.

TE AMSTERDAM, BIJ
PIETER DEN HENGST EN ZOON,
MDCCCXVI.

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
Causa, sed utilitas officiumque fuit.

Ovid. *Epist.* IX. *Ex Ponto Lib.* III.

I N H O U D.

I N H O U D.

II.

(*) Zie op Voorstel XX, het I. Hoofdstuk van het Aanhangsel.

INHOUD.

INHOUD.

V.

INHOUD.

VOOR-

VOORBERIGT.

S*edert het jaar* 1790, *dat deze* Grondbeginſels der Meetkunde *voor het eerst in 't licht verſchenen, zijn er verſcheide werken over de Wiskunde in het algemeen, en over de Meetkunde in 't bijzonder, in onze taal uitgekomen, die zeer groote, hoewel zeer verſchillende, verdienſten bezitten. Na deze verklaring zal men mij misſchien vragen, waarom ik dan niet in die werken berust, en de wereld nog met een nieuw boek over de zelfde ſtoffe bezwaar? Het antwoord is eenvoudig. Niettegenſtaande het aanwezen der zoo even bedoelde werken, en derzelver nog ſteeds toenemend getal, hebben deze* Grondbeginſels *een zoo gunstig onthaal genoten dat zij geheel uitverkocht zijn, en de uitgevers eenen nieuwen druk daarvan begeerden opteleggen. Ik had te minder redenen om mij daaraan te onttrekken, dan ik mij in ſtaat bevond het werk zeer aanmerkelijk te verbeteren.*

Tot die verbetering hebben zeer veel toegebragt, vooreerst het gebruik dat ik, gedurende zes-en-twintig jaren, van dit werk in mijne lesſen gemaakt heb, en waardoor ik alle deszelfs zwakke plaatſen, misſchien meer dan iemand, heb leeren kennen; ten anderen de vorderingen die ik zelf, in dien tijd, in de Meetkunde, vooral in het onderwijs daarvan heb gemaakt: vervolgens de aanmerkingen die verſcheide

* *mij-*

mijner leerlingen mij, van tijd tot tijd, hebben medegedeeld: die, welke ik ontvangen heb, reeds vóór lang, van den voortreffelijken Wiskundigen, den Heer O. S. BANGMA, *Lid des Koninklijken Nederlandschen Instituuts: daarna van de Hoogleeraren* PIERSON THOLEN *en* EKAMA, *die dit werk in hunne lessen gebruiken, en waarvan de eerstgemelde, in 't bijzonder, mij zeer veel ter verbetering en uitbreiding heeft bezorgd; hetgeen de Heer* MOSES LEMANS, *zeer ervaren onderwijzer in de Wiskunde, en de zoo veel belovende nog jonge beoefenaar der Mathematische Wetenschappen, de Heer* REHUEL LOBATTO *mij, van tijd tot tijd, hebben medegedeeld: eindelijk het exemplaar des werks mij door den jongen Heer* THOLEN, *zoon van den Hoogleeraar, bezorgd, waarin zijn Ed., na hetzelve geheel van bladzijde tot bladzijde te hebben doorgewerkt, alles heeft aangeteekend gehad wat verbetering moest bekomen. Aan allen betuig ik mijnen opregten dank voor deze bewezene hulp.*

Wanneer men er dergelijke ontvangt, valt het niet moeijelijk een werk te verbeteren: en de omslagtige arbeid die daartoe vereischt wordt, is er merkelijk door verligt. Er is bijna geen boek, geene afdeeling, of er is verbetering, vermeerdering aan toegebragt, en verscheidene afdeelingen zijn geheel op nieuw bearbeid geworden. Het zoude onnuttig zijn, en misschien wel zoude het als eene groots-

grootsheid, eene bedekte wijze om mijn werk aan te prijzen, beschouwd kunnen worden, indien ik hier alle de verbeteringen en vermeerderingen ging optellen. Ik blijf nog bij het gevoelen, door mij vóór zes-en-twintig jaren in de Voorrede des eersten druks geuit; dat men namelijk dergelijke werken niet moet uitgeven om roem voor zich zelven te verwerven, daar dit uit den aard der zaken onmogelijk is, maar enkel om nuttig te zijn.

De Heer Mr. PIETER ALBERTUS MÜNK, *wiens schranderheid en overgroote naauwkeurigheid ik reeds heb leeren kennen, toen zijn Ed. zich op de Meetkunde toeleide, heeft de goedheid gehad alle de proeven met mij na te zien. Om dit met te meerder zekerheid te kunnen doen, heeft zijn Ed. het geheele boek van bladzijde tot bladzijde onderzocht en geheel uitgewerkt, waardoor hij in staat geweest is mij nog het een en ander mede te deelen. Men zal in het eerste hoofdstuk des Aanhangsels eene zijner gewigtige verbeteringen aantreffen. De Heer* Student RIS, *die de Meetkunde vlijtig heeft beöefend, heeft de moeite op zich genomen om alle de figuren zeer naauwkeurig te teekenen, en bij die gelegenheid het geheele werk nategaan: een arbeid waarvoor ik aan zijn Ed. zeer veel verpligting heb.*

J. H. VAN SWINDEN.

Amsterdam,
1 *Julij*, 1816.

VOORREDE

VAN DEN

EERSTEN DRUK.

Toen ik, vóór vijf jaren, aan de doorluchtige School dezer Stad beroepen werd, om, onder andere takken der Wijsgerige Wetenschappen, ook de Wiskunde te onderwijzen, begreep ik dat het nuttig zoude zijn een kort begrip der Meetkunde opteſtellen, om daarvan in mijne lessen gebruik te maken. Ik gaf hetzelve in het jaar 1786 *in het Latyn in het licht: en toen ik vóór een jaar begonnen heb, in hope van aan een grooter aantal jonge lieden nuttig te zijn, mijne lessen over de Meetkunde in het Nederduitsch te houden, moest ik ook het gemelde kort begrip in onze moedertaal uitgeven. Dan, ik zag wel ras, dat ik met eene bloote vertaling, mij zelven ten minſten, geenszins zoude voldoen: maar dat ik, bij die gelegenheid, het geheele werk merkelijk moest verbeteren, en in alle opzigten volmaken: te meer, daar wij in onze taal met boeken van dien aard ſlecht voorzien zijn. Hiertoe heb ik noch tijd, noch arbeid geſpaard. Of het mij heeft mogen gelukken een beter en vollediger ſamenſtel te vervaardigen, dan wij tot nu toe gehad hebben, ſtaat niet aan mij, maar aan den lezer, te beoordeelen.*

Ik

Ik zal mij niet uitlaten over de manier om de Meetkunde voordeelig te onderwijzen: over den lof der Ouden; over dien van EUCLIDES *in het bijzonder; over de groote vraag, of men, zoo als eenigen willen, zijne grondbeginsels, zijnen trant, zijne orde, altijd volgen moet? en of het onmogelijk zij eene andere orde dan de zijne te volgen, en echter goede grondbeginsels der Meetkunde voor den dag te brengen? over den waren aard van mathematische en wel* synthetische *bewijzen, naar den trant der Ouden; en of het niet mogelijk zij dezen stiptelijk te volgen, en echter eenige teekens te bezigen die zij niet gebruikten? Wilde ik dit doen, dan zoude deze Voorrede een geheel boek uitmaken; doch ik moet iets zeggen over het doel dat ik mij in dit Werk heb voorgesteld.*

Ik heb vooreerst getracht niets weg te laten van den strikten bewijstrant der Ouden, waarvan EUCLIDES *en* ARCHIMEDES *ons zulke voortreffelijke voorbeelden hebben nagelaten, en geene moeite ontzien, om zeer naauwkeurige denkbeelden der zaken voor te dragen; iets, dat op eene zeer aanmerkelijke wijze in de meeste hedendaagsche boeken, die den naam van Grondbeginsels der Meetkunde dragen, verwaarloosd wordt. Den geest te vormen, denzelven aan die naauwkeurigheid van denkbeelden, aan dien strikten redeneertrant, aan die volmaakt aaneengeschakelde bewijzen, te gewennen, is een der hoofd-*

voorwerpen, welke men zich in het onderwijzen der Meetkunde voor oogen moet stellen: eene der voornaamste redenen, die de jonge lieden moeten aanzetten om dezelve te leeren. „Er is,” zegt te regt (*) QUINTILIANUS, „*in de Meetkunde een gedeelte dat „voor de jeugd nuttig is: want het verstand wordt „er door geoefend, de geest gescherpt; de snelheid „in de bevatting spruit uit dezelve voort: ja zelfs „de Meetkunde is nuttig, niet, zoo als de andere „konsten, wanneer men ze verstaat, maar ook zelfs „wanneer men ze leert.” En het is juist dat gedeelte, dat gewigtige gedeelte, dat men verwaarloost, wanneer men iets van den strikten redeneeren bewijstrant der Ouden achterwege laat, onder voorwendsel van de zaken bevattelijker voorteſtellen, of aangenamer te maken* (†).

Het is om de oefening van het verstand, het scherpen van den geest te bevorderen, en dezen die buigzaamheid te doen verkrijgen, waardoor hij zich, zoo wel tot het bevatten der waarheden, als tot het op-

(*) *Instit. Orat. Lib. I. Cap.* 10. §. 8.

(†) De groote Wiskonstenaar LA GRANGE, (in 1813 overleden) aan wien de *Analysis* zoo veel te danken heeft, getuigde echter van zich zelven: „*J'avais soin de revenir fréquemment „aux* considérations géométriques, *que je crois très-propres à „donner au jugement de la force et de la netteté.*” Zie *Zeitschrift für Astronomie von* B. VON LINDENAU *und* C. BOHNENBERGER, I. band, bl. 114.

oplossen der Werkstukken, bekwaam maakt, dat ik op verre de meeste plaatsen alleen de gronden, waarop de bewijzen der Voorstellen steunen, heb aangestipt, en de Werkstukken van de Voorstellen, (Theoremata), *of Leerstukken, afgezonderd heb. Ik bedoel door het eerste, de jonge lieden aan te zetten om de bewijzen zelf op te maken; het geen hun te minder moeijelijk zal vallen, daar ik alle de Voorstellen, die zij daartoe noodig hebben, heb aangehaald in die orde, in welke zij in het bewijs moeten voorkomen. Ik heb die aanhalingen meer of minder wijdloopig gemaakt, naarmate zulks mij noodig voorkwam, vooral voor die Voorstellen, welke ik niet gewoon ben in mijne lessen uitteleggen en te bewijzen, en die met eene kleine letter gedrukt zijn. Veelal heb ik dan het bewijs er geheel bij gevoegd, inzonderheid op de moeijelijkste plaatsen. Ik denk dat de jonge lieden, en andere liefhebbers der Meetkunde, hierdoor een ruim veld van bespiegelingen en arbeid zullen bekomen. De aanhalingen van* EUCLIDES *en eenige andere schrijvers zullen den lezer in staat stellen, die schrijvers te raadplegen, hunne manier van betogen met de mijne te vergelijken, en daardoor een beter begrip van de zaken te verkrijgen* (*). *Wanneer men in een boek altijd het bewijs bij*

(*) Ik heb in dezen tweeden druk, behalven EUCLIDES, bestendig STEENSTRA en LE GENDRE aangehaald voor die Voorstel-

bij het Voorstel aantreft, werkt de geest niet om het bewijs te vinden, maar blijft ten dien opzigte geheel werkeloos. Wanneer een dergelijk boek tot onderwijs dient, kan de onderwijzer bijna niets doen, dan mondeling het zelfde bewijs herhalen. Ik heb dus, ook om die reden, verkozen, daar toch mijn boek geschikt is om in mijne lessen door mij uitgelegd te worden, de bewijzen achterwege te laten, dezelve in tegenwoordigheid mijner toehoorders uit de aangestipte gronden optemaken, en over derzelver aard en voortgang verscheidene Aanmerkingen er bij te

stellen, welke bij deze schrijvers gevonden worden, als zijnde hunne werken thans wel het meest in gebruik: ARCHIMEDES en anderen worden hier en daar aangeteekend. Bij enkele voorstellen zal mij de aanhaling van dezen of genen schrijver, dien ik geraadpleegd heb, ontglipt zijn: en het zoude mij leed doen indien men waande dat ik die voorstellen, waar bij men geen aanhalingen aantreft, als van mij afkomstig wilde doen doorgaan: Ik geef gaarne ieder wat hem toekomt: en mij komt, in dit werk, behalve de schikking, veelligt al zeer weinig toe. Ik beäam geheel het gezegde van PLINIUS (Hist. Nat. Lib. I.) „ *Auctorum nomina praetexui: est enim benignum, ut* „ *arbitror, et plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris,* „ *non ut plerique ex iis quos attigi, fecerunt,*" waar bij hij van de schrijvers die hij aanhaalt dit voegde: „ *Scito enim con-* „ *ferentem auctores me deprehendisse a juratissimis et proximis* „ *veteres transcriptos ad verbum, neque nominatos.*" Ten zelfden einde dient de aanwijzing der schrijvers en der boeken, die in dezen tweeden druk vollediger is dan in den eersten: ook met bijvoeging van den leeftijd der Wiskundigen die aangehaald worden.

te voegen: eene handelwijze, waarbij ik mij zeer wel bevonden heb.

Ik herhaal het: men kan de leerlingen niet genoeg aanzetten, om zelve te werken, zelve iets opteſtellen: bij gebrek van die voorzorg worden niet zelden de beste geesten verdoofd, of ten minſten trager dan zij anders zouden geweest zijn (*). *Hierom heb ik de Werkſtukken van de Voorſtellen, dat is, het werkdadige van het beſchouwende gedeelte afgezonderd, en achter ieder Voorſtel aangeſtipt, welk Werkſtuk men alsdan in ſtaat is opteloſſen. Ik laat dus die Werkſtukken door de jonge lieden zelve oploſſen en bewijzen, en beſteed eenen dag der week om hunne oploſſingen natezien. Ik heb mij uitnemend wel bij die handelwijze bevonden, en mij meer dan eens verwonderd over de vaardigheid die de leerlingen in korten tijd in dit ſtuk verkrijgen. Eindelijk, het is ook om die zelfde reden, dat ik meer dan ééns in* Gevolgen, *of Aanmerkingen, heb doen opmerken, hoe men ééne en de zelfde zaak uit verſchillende grondbeginſels kan bewijzen. Alle bewijzen, mits zij rigtig zijn, zijn wel voor den Wiskonstenaar, maar niet voor den Wijsgeer, van gelij-*

(*) La Grange, zeide ook: „*L'esprit est pareſſeux, il faut* „*prévenir ſa lâcheté naturelle et le tenir en haleine pour en* „*developper toutes les forces, et les avoir prêtes au beſoin. Il* „*n'y a que l'exercice pour cela.*" Ib. p. 116.

lijke waarde. Deze houdt die voor de beste, welke meer regtstreeks uit den waren aard der voorwerpen afgeleid zijn. Het Theorema van PYTHAGORAS, *bij voorbeeld, over den regthoekigen driehoek, kan bewezen worden in den trant van* EUCLIDES, *zoo als wij zulks in het* 16 *Voorstel van het* II *Boek gedaan hebben, of ook, veel korter en gemakkelijker, uit de leer der gelijkvormige driehoeken worden afgeleid (IV.* 15. *Aanmerking* 3.)*: doch het eerste komt mij voor, wijsgeerig gesproken, het beste te zijn. Ik laat nimmer eenige gelegenheid voorbij gaan, van dergelijke bijzonderheden aan mijne Toehoorders te doen opmerken.*

Ik heb, ten tweeden, getracht, dit werk in eene bekwame orde te schikken, en de verschillende soorten van voorwerpen, zoo veel mogelijk, afzonderlijk te beschouwen. Het heeft niet weinig moeite gekost om zulks te verrigten zonder eenige gaping. Het kwam mij voor het beste en geschiktste te zijn, de regte lijnen afzonderlijk te beschouwen, zonder derzelver eigenschappen uit die der driehoeken te moeten afleiden; en dan eerst tot de driehoeken over te gaan: de regtlijnige figuren af te handelen, alvorens over den cirkel te spreken, enz. Men klimt dus indedaad trapswijze en in eene geregelde orde op. Het derde Boek, dat over de evenredigheid handelt, behoort niet tot de Meetkunde, als zoodanige beschouwd, maar meer tot de Rekenkunde, of

tot

tot de Algebra, *of Stelkunde. Dit Boek maakt dus eene ſoort van tusſchenpozing, even als zulks bij* EUCLIDES *voor zijn vijfde Boek plaats heeft. Misſchien hadt het beter geweest het zelve vooraan, als eene Inleiding, te plaatſen. Die in dat gevoelen ſtaat, kan zulks doen: maar ik heb ondervonden, dat het denkbeeld van* rede *en* evenredigheid, *hoe eenvoudig het indedaad ook zij, echter den leerlingen altijd moeijelijk voorkomt, en ik heb dus beter geöordeeld door de twee eerſte boeken hun verſtand allengskens aan het beſchouwen van afgetrokken denkbeelden te gewennen. Die moeijelijkheid, welke zij in de beſchouwing van rede en evenredigheid aantreffen, is, zekerlijk, voor een groot gedeelte, hieraan toeteſchrijven, dat men, in de rekenſcholen, dit denkbeeld bijna in het geheel niet, of ten minſten zeer gebrekkig, ontvouwt, hoewel bijna alles in de rekenkunde daarop rust.*

Ik had na het II. Boek onmiddelijk het V. kunnen laten volgen, en dan het XII. en XVII. Voorſtel alleen op de wijze van EUCLIDES *kunnen bewijzen: en dit had ik ook in het eerſte beſtek van dit Werk gedaan: maar ik heb dit naderhand veranderd, om dat men dan buiten ſtaat is van gewag tè kunnen maken van de rede in welke de verſchillende lijnen in of tot den cirkel getrokken elkander ſnijden; dat is van het I. en II. Gevolg van het XII. en van het I., II., III. en IV. Gevolg van het XVII. Voorſtel,*

en

en van het XIII. Voorstel; waarvan men ook geen woord bij EUCLIDES *aantreft. Ik heb dus verkozen den cirkel geheel in het V. Boek, na de leere der gelijkvormige driehoeken en regtlijnige figuren, die in het IV. Boek begrepen is, aftehandelen: doch niets belet, dat iemand onmiddelijk, na dat hij het II. Boek ten einde gebragt heeft, die stukken van het V., welke niet van het IV. afhangen, bestudeere, zoo hij zulks begeert.*

Het laatste dat ik bedoeld heb is een veel volle- diger samenstel voor den dag te brengen dan tot hier toe geschied is. De grootste voorstanders van EUCLIDES *kunnen niet ontkennen, dat er niet alles in* EUCLIDES *gevonden wordt wat men thans volstrekt noodig heeft om, of zich tot de praktijk van de Meetkunde bekwaam te maken, of tot de Natuur- en Sterrekunde overtegaan. Men vindt niets over de inhoudvinding der figuren; niets, of bijna niets, over de Theorie der veelhoeken; niets over de reden van den omtrek van den cirkel tot den diameter; niets over de driehoeksmeting; niets over de schoone ontdekkingen van* ARCHIMEDES *(die eerst 70 jaren na* EUCLIDES *leefde) omtrent den cylinder, kloot en ke- gel: enz. zoo dat men, na* EUCLIDES *afgehandeld te hebben, nog dat alles uit andere boeken moet ont- leenen Zij kunnen niet ontveinzen dat men van de dertien, of vijftien, boeken van* EUCLIDES, *thans al- leen de zes eerste, het XI. en XII. gebruikt: het*

VII,

VII, VIII, IX en X, overſlaat, om dat men die ſtoffe thans anders behandelt: het XIII, XIV en XV, deels om dat men ze minder nuttig acht, deels om dat men ze op dien trant als EUCLIDES *ze behandeld heeft niet verſtaan kan zonder het X Boek, dat zeer moeijelijk is, volmaakt te verſtaan. Die Boeken zijn echter in hunne ſoort vooral niet minder fraai dan de acht welke men gebruikt: het X. komt mij voor een meesterſtuk te zijn. Geeft men dan toe, dat er eenige ſtukken zijn die men beter kan, of anders mag, behandelen dan* EUCLIDES *gedaan heeft, waarom ook dan niet aan zijn geheele ſtelſel alle verbetering en vermeerdering toegebragt die men nuttig oordeelt? Ik heb dus niet geſchroomd zulks te doen: en men zal zien dat, ook uit dat oogpunt beſchouwd, mijn werk vollediger is dan de meeste, zoo niet alle, de hedendaagſche Grondbeginſels der Meetkunde die mij bekend zijn, daar ik in hetzelve niet alleen eenige Voorſtellen uit het VII, VIII, IX en X Boek, maar ook het geheele XIII, XIV en XV Boek van* EUCLIDES *ingelascht, en zoo kort en duidelijk als mij mogelijk was, bewezen heb.*

Er zijn boven dien vele nuttige Voorſtellen die niet bij EUCLIDES *maar wel in andere* elementaire *werken gevonden worden: er zijn er, die men in geene der laatstgemelden, maar elders verſpreid, aantreft, en waarvan echter het gebruik zeer aanmerklijk is,*

voor-

vooral in de Natuurkunde. Ik heb geöordeeld die alle in mijn werk te moeten brengen. En zeker, indien ik niet gevreesd had hetzelve veel te omslagtig te maken, en getwijfeld of het wel genoegzaam in den tegenwoordigen smaak valt, zoude ik het nog veel vollediger hebben kunnen maken. Hoe dikwerf heb ik, de Verhandelingen van verscheiden Academiën, de werken van PAPPUS, VIETA, SNELLIUS *en anderen, vooral de* geometria sublimior *van* KRAFFT *ter dezer gelegenheid nagaande, niet met leedwezen vele schoone stukken achterwege gelaten om niet te breedvoerig te zijn? en hoe dikwerf heb ik niet gewenscht dat eenmaal iemand de moeite op zich nam, om alle de Mathematische Voorstellen, die in honderde boeken wijd en zijd verspreid liggen, in één ligchaam te verzamelen? dan zouden wij eerst onzen rijkdom in de Meetkunde kennen: en daar men, met alle die Voorstellen in één geregeld ligchaam te brengen, en het eene uit het andere te bewijzen, wel hier en daar eenige gaping zoude bespeuren, zoude deze, zoo als ook de beschouwing zelve van dien voorraad, aanleiding tot het ontdekken van vele nieuwe eigenschappen geven.*

Ik zal hier alle de bijzondere Voorstellen die ik in het I. en II. Boek heb ingelascht niet optellen; doch alleen melden dat ik meen de leer der evenredigheden vollediger dan gewoonlijk geschiedt behandeld

deld te hebben: dat ik mij niet herinner dat men iets van belang over de harmonische evenredigheid *in onze taal aantreft, en dat dit stuk, hoe nuttig ook in de Natuurkunde, bijna nimmer aangeroerd wordt: dat ik, zoo wel in het IV. Boek (XV. Voorst.* Gev. 4. *en* 5.) *als in het V. (XVII. Voorst.* 3. *en* 4. Gevolg) *het noodige gezegd heb tot het verstaan en beöordeelen van het vraagstuk om twee middel-evenredige lijnen te vinden.*(*)*: dat ik in het VI. Boek de geheele leer der in- en omgeschreven veelhoeken veel vollediger behandeld heb dan tot nu toe gedaan is: dat ik in de IV. Afdeeling, in het XXIV. Voorstel en vervolgens, het schoone stuk dat de Heer* HENNERT *in de Verhandelingen der Haarlemsche Maatschappij over dit onderwerp heeft uitgegeven, tot zeer eenvoudige bewijzen heb gebragt, die ik den lezer verzoek met de algebraische bewijzen van dien Hoogleeraar te vergelijken: dat ik de schoone ontdekkingen van* HUYGENS, SNELLIUS, LUDOLF VAN CEULEN, DU FAY, SAURIN, *die bijna in vergetelheid geraakt zijn, en zich in boeken bevinden die men naauwlijks meer leest, om derzelver nuttigheid en fraaiheid heb opgegeven: en dat de V. Afdeeling bijna geheel nieuw is.*

Ik

(*) In deze tweede druk is daarover in het III. Boek der Werkstukken, Werkst. 9. Aanmerk. 2. zeer breedvoerig gehandeld: gelijk mede in het I. Boek, Werkst. 17 Aanm., over het snijden van hoeken in drie deelen.

Ik heb in het VII. Boek met de leer der Limieten *begonnen; iets waarover wij in onze taal niets bezitten: die leer is het eenige middel om de Voorstellen die de rede van dan omtrek des Cirkels tot den diameter, den inhoud van den Cirkel, van Pyramiden, Cylinders, Kegels, Spheeren, betreffen, met naauwkeurigheid te bewijzen. Ook hebben, zoo wel* ARCHIMEDES *als* EUCLIDES, *die leer, meer of min, ingewikkeld, gebruikt. Zij is bovendien de eenige grond waarop de bereekeningen der hooge Mathesis rusten, indien men deze naar behooren wil verklaren, en niet tot het onnaauwkeurig en gansch* onmathematisch *denkbeeld van* oneindig groot *en* oneindig klein *zijne toevlugt nemen.*

Ik heb verder in het VII. Boek de ontdekkingen niet alleen van ARCHIMEDES, *maar ook van* SNELLIUS *en* HUIJGENS, *die men nergens dan in de buiten gebruik geraakte schriften van die schrijvers aantreft, opgegeven en bewezen.*

Het VIII. Boek behelst verscheiden stukken die men doorgaands in andere boeken van dezen aard niet aantreft: ik heb in de II. en vooral in de V. Afdeeling meest alles uit het uitmuntend werk van den Heer CAGNOLI *ontleend: over het onderwerp van de V. Afdeeling was nimmer in onze taal geschreven.*

Het IX. Boek, of de Trigonometrie, is veel vollediger dan men ze immer, op den Heer CAGNOLI *na, dien ik meest gevolgd heb, behandeld heeft.*

In

In het XI. Boek is de leer der regelmatige ligchamen in vele opzigten op eenen geheel nieuwen trant behandeld, zoo als ook in het XII. de leer der inschrijving van die zelfde ligchamen in den kloot; waardoor ik in staat gesteld ben om het geheele XIII. XIV. en XV. Boek van EUCLIDES *uitteleggen, zonder het X. van dien Schrijver, dat ongemeen moeijelijk is, te gebruiken: welke stukken, dus allen bijeen verzameld, in geen der mij bekende werken gevonden worden.*

De Lezer oordeele dan uit het gezegde, en nog meer uit het werk zelve, of en in hoe verre hetzelve genoegzaam volledig, of vollediger dan andere, kan genoemd worden. Het komt mij voor, zoo wel voor meer als voor min gevorderden geschikt te zijn. Het geen met groote letters gedrukt is maakt op zich zelve een geheel samenstel van de meest noodzakelijke Voorstellen uit. Men kan in den beginne het overige, dat met kleine letters gedrukt, en voor meer gevorderden geschikt is, overslaan.

Ik wensch dat ik met dit werk, zoo wel den leerlingen die mij tot hunnen leidsman in de Meetkunde verkiezen, als mijnen landgenooten, beminnaars dier edele Wetenschap, dienst heb mogen doen: dit is mijn eenig doelwit met het uitgeven van hetzelve geweest; geenszins om roem voor mij zelven te behalen. Ik weet dat daartoe in deze eeuw, en meer

bijzonder in dit tijdvak der Wetenschappen, Werken van eenen geheel anderen aard vereischt worden.

Ik betuig openlijk mijnen hartelijken dank aan mijnen vriend den Heer PIETER NIEUWLAND, *Lector in de Wis- Sterre- en Zeevaartkunde aan de Doorluchtige Schole dezer Stad* (*), *voor de moeite die hij genomen heeft om, niet alleen de proeven, maar ook het geheele Werk, alvorens het ter persse ging, nategaan, en zoo wel de proeven van vele drukfeilen als het Werk zelve van onnaauwkeurigheden te zuiveren, en met gewigtige aanmerkingen te verrijken.*

Amsterdam 18 *Julij* 1790.

(*) Sedert, te weten in 1793, Hoogleeraar te Leyden, alwaar hij tot overgroot nadeel der Wetenschappen, den 14 November 1794, in den bloei zijner jaren, is overleden. Zie mijne lijkreden over dien verdienstelijken man, in 1795, te Amsterdam, bij den uitgever van dit werk, in 't licht verschenen.

AAN-

AANWIJZING

DER

WISKUNDIGEN,

WIER UITVINDINGEN VERMELD, OF WIER SCHRIFTEN, IN DIT WERK, AANGEHAALD WORDEN.

ADRIAAN ANTHONISSE, uitvinder van die rede der middellijn tot den omtrek des cirkels, welke onder den naam van METIUS gaat, wordt aangehaald bl. 305.

ALEMBERT, (D') *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie*, 1763. 8°, 5 vol. Wij hebben dit werk van dezen zoo beroemden Wiskundigen, die in 1783 overleden is, meer dan eens aangehaald wegens de uitmuntende aanmerkingen welke in het zelve gevonden worden, over den aard der Mathematische bewijzen, en der Grondbeginselen door sommigen gebruikt.

APOLLONIUS PERGAEUS leefde twee eeuwen vóór onze tijdrekening: de beste druk zijner werken is die, welke in het Grieksch en in het Latijn door HALLEY is uitgegeven, onder den tijtel van APOLLONII PERGAEI *Conicorum Libri Octo*, *et* SERENI *de sectione Coni et Cylindri Libri duo*, *Oxonii* 1710, fol. Er is ook eene uitgave APOLLONII PERGAEI *Conica*, *cum* PAPPI *Lemmatibus*, *curâ* COMMANDINI, *Bononiae* 1566, fol. en eene van RICHARDUS, *Antverpiae* 1615, fol. Zie verder BARROW.

ARCHIMEDES bloeide in de derde Eeuw vóór onze tijdrekening, en verloor, op eene ongelukkige wijze, zijn leven in het jaar 212. De beste druk der werken van dien grooten man is ARCHIMEDIS *quae supersunt omnia*, *cum* EUTOCII *Ascalonitae commentariis*, *curâ* JOS. TORELLI, *Gr. Lat. Oxonii* 1792. fol. Tot den tijd dat deze druk verscheen, was de beste ARCHIMEDIS *Opera quae extant illustrata per* D. RIVALTUM, *Parisiis* 1615. folio. De Voorstellen zijn in het Grieksch en in het Latijn: de bewijzen, die van RIVALTUS zijn, alleen in het Latijn. Zie verder BARROW.

PEYRARD heeft eene uitmuntende fransche vertaling der werken van ARCHIMEDES bezorgd, onder den tijtel van *Oeu-*

Oeuvres d'Archimede, *Paris* 1807. 4°. Hij heeft er zeer goede aanteekeningen bijgevoegd, mitsgaders eene zeer belangrijke verhandeling over den *Brandspiegel* van ARCHIMEDES en eene overheerlijke verhandeling van DELAMBRE over de *Rekenkunde der Grieken*.

J. C. STURMIUS heeft eene goede Hoogduitsche vertaling der werken van ARCHIMEDES, te Nurenberg in 1670, bezorgd: zij is met goede aanmerkingen verrijkt.

Eenige stukken van ARCHIMEDES zijn afzonderlijk met aanteekeningen uitgegeven geworden: onder anderen: ADRIANI ROMANI in ARCHIMEDIS *Circuli dimensionem expositio et analysis*, *Wurceburgi* 1598. *folio.*

TACQUET heeft achter zijne uitgave van EUCLIDES de belangrijkste voorstellen van ARCHIMEDES gevoegd, onder den tijtel van *Selecta ex* ARCHIMEDE *Theoremata*.

BANGMA, (O. S.) heeft verscheide nuttige werken uitgegeven: hier wordt aangehaald *Inleiding tot de Algebra*, 8°. Amst. 1811.

BARROW (ISAAC) heeft te zamen in één deel uitgegeven ARCHIMEDIS *Opera*, APOLLONII *Conicorum*, *Libri* IV, THEODOSII *Sphaerica*, *Londini* 1675. 4°. De bewijzen zijn van BARROW, en zoo kort en duidelijk als mogelijk was, voorgesteld. BARROW is in 1677 overleden. Zie verder op EUCLIDES.

BEAUFORT (DE) wordt aangehaald bl. 72. Hij is in 1728. overleden.

BERNOUILLI, (JACOB) van dezen grooten Wiskundigen, in 1705 overleden, wordt alleen aangehaald het 3de gedeelte zijner beroemde *Positiones de seriebus infinitis*, herdrukt in zijne *Opera*, te Geneve in 1744 enz. uitgegeven.

BION, *Traité de la construction et des principaux usages des Instrumens de Mathématiques*, *Paris* 1725. 4°. Er zijn verscheide drukken en vertalingen van dit werk, waarvan de schrijver in 1733. in hoogen ouderdom overleden is.

BOSCOVISCH, (ROGERIUS) *Voyage Géographique et Astronomique pour la mesure de deux degrez du Méridien*, *Paris* 1770. 4°. Het oorspronkelijke is te Rome in 1755 in het Latijn uitgekomen. Deze groote Wiskundige is in 1787. overleden.

CAGNOLI, *Traité de Trigonométrie*, *rectiligne et sphérique*, *traduit de l'Italien*, *Paris* 1785. 4°. Er is een tweede druk van 1807. Een der schoonste werken mij over dit onderwerp bekend: vooral voor de toepassing der beide driehoeks-metingen, op de Landmeetkunde, de Algebra, en de Sterrekunde. Ik heb veel uit hetzelve ontleend in de 5°. Afdeeling van het VII, en in de 3°. van het IX. Boek.

CAIL-

CAILLE, (DE LA) *Leçons de Mathématiques*, *Paris* 1755. 8°. *Leçons d'Astronomie*, *Paris* 1761. 8°. De Schrijver wordt in dit werk meestal door de Letters L. C. aangeduid: hij heeft verscheide andere werken, ook *Leçons de Mécanique* en *Leçons d'Optique*, uitgegeven, die alle kenmerken van 's mans netheid en juistheid dragen, en is in 1761 overleden.

CHAPELLE, (DE LA) *Institutions de Géométrie*; dit werk wordt bestendig in de eerste Afdeeling van het VII. Boek aangehaald: en nog eens in het IV.

CARTESIUS, of DESCARTES. Zijne *Géométrie*, die in dit werk aangehaald wordt, is in 1637 in het Fransch uitgekomen, en heeft eene geheele verandering in het behandelen der Mathematische Wetenschappeen te weeg gebragt. Vele zijn de vertalingen en de uitgaven. De beste is in het Latijn CARTESII *Geometria cum Commentariis* FRANCISCI VAN SCHOTEN: Ed. 2ª. Amst. 1659. 4°. 2 deelen: en in het Fransch *Géométrie de Descartes avec un Commentaire par* RABUEL, Lyon 1730. 4°.

CASTILLON. (JEAN DE) Een allezins uitmuntend Wijsgeer en Mathematicus, door vele verhandelingen en werken beroemd, en die geheel met den geest der oude Wiskundigen doordrongen was, is in 1791 in zeer hoogen ouderdom overleden. Hij wordt hier op verscheide plaatsen aangehaald.

CAVALLIERI (BONAVENTURA) door vele werken bekend en in 1647 overleden, wordt hier bl. 356 aangehaald.

CLAVIUS, *Geometria practica*, *Mogunt* 1606. 4°. Zie verder op EUCLIDES. Alle de werken van dezen te regt beroemden man, die in 1612 overleed, zijn in vijf deelen in *folio* uitgegeven.

CLERC, (SEBASTIEN LE) *Géométrie sur le papier et sur le terrein*, 8°. De drukken en vertalingen van dit werk zijn zeer menigvuldig.

COMMANDINUS, (FREDERICUS) uitgever van verscheide werken van oude Wiskunstenaars, en zelf een voornaam Wiskundige in zijnen tijd, wordt door ons bl. 355 aangehaald. Hij is in 1571 overleden.

CROIX, (LA) *Elémens d'Algébre: 9 Ed. Paris* 1811. 8°.

CUNN, (SAMUEL) *Construction and use of the Sector*, *London* 1722. 8°.

DELAMBRE, *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du Méridien*, *Paris* 1799. 4°. Vele zaken, daarin ont-

wikkeld, zijn breder verhandeld in het doorwrochte werk deszelfden uitmuntenden Schrijvers, *Base du Système métrique*, *Paris*, 3 vol. 4°. Zie verder op ARCHIMEDES en PTOLEMAEUS. — *Abrégé d'Astronomie*, *Paris* 1813. 8°.

DÉPARCIEUX, *Nouveaux Traités de Trigonométrie, avec un traité de Gnonomique*, *Paris* 1731. 4°. Deze Schrijver is in 1768 overleden.

DESCARTES. Zie CARTESIUS.

DINOSTRATES, welke 370 jaren vóór onze tijdrekening leefde, wordt VII. 26. Aanm. 6. aangehaald wegens het vinden van eene regte lijn gelijk aan den omtrek eens cirkels, door middel van zekere kromme lijn *Quadratrix* genoemd, door hem uitgedacht, of ten minsten, daartoe dienstig gemaakt.

ERATOSTHENES, een beroemd Grieksch Mathematicus, die 240 jaren vóór onze tijdrekening leefde. wordt in het IX. Werkstuk van het III. Boek aangehaald, wegens zijne oplossing van het vraagstuk, om tusschen twee gegeven lijnen twee middel-evenredige te vinden.

EUCLIDES. Zeer talrijk zijn de uitgaven der Grondbeginsels van dezen uitmuntenden Griekschen Wiskunstenaar, welke drie eeuwen vóór onze tijdrekening leefde, en zich, inzonderheid door dat werk, eenen onsterfelijken roem verworven heeft. Deze *Grondbeginsels* bestaan uit XV Boeken, hoewel er hoogstwaarschijnlijk, om niet te zeggen zeker, maar XIII. van EUCLIDES zelven zijn: en het XIV. en XV., met reden, aan HYPISICLES worden toegeschreven. De meeste uitgaven bevatten alleen de zes eerste Boeken met het elfde en twaalfde. Zoodanige zijn in onze taal die van DOUW, COETS, LABORDUS, WARIUS, enz.: doch C. J. VOOGT heeft in 1695 de 15 Boeken uitgegeven. Zonder mij over de waarde van die uitgaven uittelaten zal ik alleen zeggen, dat de volgende mij de beste voorgekomen zijn, te weten:

EUCLIDIS *quae supersunt omnia, ex recensione* DAVIDIS GREGORII, *Gr. Lat.*, *Oxonii* 1703. fol. — *Elementorum* EUCLIDES *Libri* XV. *curante* BAERMAN, *Lipsiae* 1743. 8°. De Schrijver heeft den trant en de kern der bewijzen van EUCLIDIS behouden, doch dezelve zoo kort mogelijk voorgesteld. EUCLIDIS *Elementorum*, *Libri* XV. *breviter demonstrati ab* ISAACO BARROW, *Cantabrigiae* 1655. 12°. De *Data* van EUCLIDES, door BARROW uitgegeven, zijn bij sommige drukken der *Elementa* gevoegd. — EUCLIDES *Elementorum Libri* XV. *auctore* C. CLAVIO, *Francforti* 1607. Deze uitgave is met eene zeer breedvoerige uitlegging en vele bijvoegsels versierd, die somtijds geraadpleegd moeten worden: het geen altijd met vrucht geschiedt.

Ele-

Elementa EUCLIDEAE *Geometriae, et Selecta ex* ARCHIMEDE *Theoremata: quibus accedit Trigonometria, auctore* A. TACQUET, *Amstelaedami* 1725. De aanmerkingen en bijvoegsels zijn uitmuntend; de gewigtige voorstellen van ARCHIMEDES treft men in geene andere *elementaire* werken aan; de *Trigonometria* is zeer goed. In den aangehaalden druk heeft de Hoogleeraar MUSSCHENBROEK de aanmerkingen van WHISTON en de *Trigonometria Spherica* van SCHOTTUS gevoegd. Deze uitgave is in 1745 te Romen in 2 deelen 8°. herdrukt, en men heeft er toen nog bijgevoegd eene *Trigonometria Spherica*, en eene verhandeling *de Cycloide*, en *de Logistica*, beide van BOSCOVISCH, mitsgaders de *Sectiones Conicae* van GUIDO GRANDI: alle uitnemende stukken.

Elements of EUCLID: *Viz. the first six Books together with the eleventh and twelfth, by* ROBERT SIMSON, *Glasgow* 1757. 4°. Er zijn vele drukken van dit werk, ook in 8°. Bij den elfden druk te London in 1801 in 8°. uitgekomen, zijn gevoegd EUCLIDIS *Data*, eene vlakke en eene klootsche driehoeksmeting. Bij alle de uitgave heeft SIMSON vele belangrijke aanteekeningen gevoegd.

Elémens de Géométrie, contenant les six premiers livres D'EUCLIDE, *par* KOENIG, *augmentés de l'onzième et du douzième, par* J. J. BLASSIERE, *la Haye* 1762 4°. Deze uitgave is vooral aantepreijzen wegens de uitmuntende uitlegging van het V. Boek, en het Aanhangsel op het zelfde Boek, waarin de Heer KOENIG den aard der Logarithmen zeer wel verklaart.

PEYRARD is bezig met eene uitgave van EUCLIDES in het Grieksch, Latijn en Fransch, te vervaardigen, waarin de tekst naar de beste nog onuitgegevene handschriften zal gevolgd worden.

In het XI. Boek hebben wij ook de volgende uitgave aangehaald EUCLIDIS *Elementa Geometrica, Libri* XVI. *Quibus accessit Liber* XVI, *&c. auctore* FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA, *Parisiis* 1566. fol. Dit XVI. Boek is door VOOGT in zijne Nederlandsche uitgave ingelascht.

EULER, *Introductio in Analysin Infinitorum*, *Genevae* 1748. 4°. Er is te Parijs, in 1791. eene Fransche vertaling van dat werk door den Heer LABBEY, met aanmerkingen, uitgekomen, in 2 deelen, 4°. Dit werk heeft, gelijk de overige van EULER (die in 1783 overleden is) eene geheele verandering in vele deelen der stelkunde, en in de wijze om dezelve te behandelen, te weeg gebragt.

EUTOCIUS *Ascalonita*, leefde in de zesde eeuw onzer tijdrekening, en is beroemd door zijnen *Commentarius* over

ARCHIMEDES en over APOLLONIUS. Uit dien hoofde wordt hij meer dan eens in dit werk aangehaald.

FAGNANO, *Produzzioni Matematici*, *&c. Pesaro* 1751. 4°. 2 *vol*.

FAY (DU) wordt aangehaald bl. 82 en 250. Deze verdienstelijke man is, nog jong zijnde, in 1739 overleden. (*)

FLORYN, (JACOB) *Grondbeginsels der hoogere Meetkunde*, Rotterdam 1794. 8°.

GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae*. Er is eene Fransche vertaling van dat werk onder den tijtel van *Recherches Arithmétiques*, *Paris* 1810. 4°.

GELDER, (DE) *Beginsels der Meetkunde*, Amsterdam en den Haag 1810. 8°.

Handleiding tot de beschouwende en werkdadige Meetkunst, Amsterdam 1806. 4°. Tot nu toe is er niet meer dan het eerste deel uitgekomen. De schrijver wordt veelal enkel door de letters D. G. aangehaald.

GELLIBRAND, *Trigonometria Britannica*, *sive de doctrina triangulorum*, *Libri duo*, *Goudae* 1633. folio. De Schrijver is in 1637 overleden.

GENDRE, (LE) *Elémens de Géométrie*, 8°. Ik heb den tienden druk in 1810 te Parijs uitgekomen gebruikt; er is eene *Trigonométrie* bijgevoegd. Deze Schrijver wordt door de letters L. G. aangehaald.

GIRARD, (ALBERT) *Invention nouvelle en Algèbre*, *Amst.* 1629. klein 4°. Een ongemeen belangrijk en uitermate zeldzaam werkje. Na den dood des Schrijvers is, in 1634, uitgekomen zijne vertaling van de werken van SIMON STEVIN, met aanmerkingen.

GRAAF, (ABRAHAM DE) *Analysis*, *of Stelkundige ontknooping in Meetkunstige Werkstukken*, Amst. 1706. 4°.

GREGORY, (DAVID) *Treatise of practical Geometry*, *Edinburg* 1715. in 8°. Dit werk is toen eerst in het licht gekomen: hoewel het na den dood des Schrijvers, in 1708 voorgevallen, in handschrift tot onderwijs gebruikt werd.

GRIVE, (DE LA) *Manuel de Trigonométrie pratique*, *Paris* 1754. 8°.

GUNTER, (EDMUND) beroemd Engelsch Hoogleeraar, in 1676 overleden, en aangehaald in VIII. Afd. 3. wegens de *Logarithmen-schaal* die zijnen naam draagt.

HENNERT, Hoogleeraar te Utrecht, een uitmuntende Wiskunstenaar, door vele werken, ook door eenen *Cursus Matheseos* pu-

(*) Op bl. 250 staat in die aanhaling *Mem. de l'Acad.* 1729. moet zijn 1727.

parae, 3 d. in 8°., en door een' *Cursus Matheseos applicatae*, in 6 d. in 8°. beroemd, en in 1813 in eenen hoogen ouderdom overleden, wordt bl. 260 aangehaald.

HERO *Alexandrinus*, leefde ten tijde van ARCHIMEDES: wordt door ons aangehaald I. Bep. 16. Aanm. 3, bl. 39. en in het III. Boek der Werkstukken, IX. Werkst. 2. Aanm. III, over zijne handelwijze om twee middel-evenredige te vinden.

HIPPIAS, die in de vijfde eeuw vóór onze tijdrekening leefde, is uitvinder van eene kromme lijn genoemd *Quadratrix*, wordt aangehaald VII. 26. Aanm. 6.

HIRE, (DE LA) *Sectiones Conicae*, *Parisiis* 1685 fol. Een der uitmuntendste werken geschreven in den trant der Ouden, wiens geest LA HIRE volkomen kende, en dien hij gaarne volgde. Het eerste gedeelte bevat eenige voorstellen over lijnen in *harmonische* evenredigheid gesneden: en het is daarom dat dit werk door ons wordt aangehaald in de derde Afdeeling van het III. Boek.

HORREBOW, *In continuam proportionem harmonicam Mathemata*, *1737*: herdrukt in het eerste deel zijner *Opera Mathematico-Physica*, *Hafniae* 1740. 3 vol. 4°.

HUILIER, (L') *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, *Berlin* 1786. 4°. De Schrijver heeft naderhand dit werk op nieuw bearbeid in zijne *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*, 1795. 4°.

Elémens d'Analyse Géométrique et d'Analyse Algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques, *Genève* 1809. 4°.

HUYGENS, *de Circuli Magnitudine inventa*, *Lugd. Batav.* 1654. 4°. herdrukt in deszelfs *Opera Varia*, *L. B.* 1724. 4. Deze groote man, in 1629 geboren, is in 1695 overleden.

HYPSICLES, uit Alexandrie, leefde ten tijde van PTOLOMAEUS, of iets later. Hij is hoogstwaarschijnlijk Schrijver van het XIV. en XV. Boek der *Elementa* van EUCLIDES. Zie EUCLIDES.

KAESTNER, een der beroemste Mathematici van onze tijden, in 1800 te Gottingen, in hoogen ouderdom, overleden, heeft eene menigte werken en verhandelingen uitgegeven, waarvan er hier maar één wordt aangehaald, t. w. *Geometrische Abhandlungen*, *Göttingen*, 8°. *erste sammlung*, 1790. *zweyte sammlung* 1791.

KARSTEN *Mathesis Theoretica Elementaris atque Sublimior*, *Rostochii et Gryphiswaldiae*, 1760. 8°.

KLINKENBERG, een wel bekend Wiskonstenaar en Sterrekundige, 1799 in hoogen ouderdom overleden, wordt aangehaald VII. 26. Aanm. 4.

KOCHANSI, aangehaald bl. 317.

KOENIG. Zie EUCLIDES.

KRAAIJENHOFF, *Précis historique des Opérations Géodésiques et Astronomiques faites en Hollande; La Haye* 1815. 4°.

KRAFFT, (G. W.) *Institutiones Geometriae Sublimioris, Tubingae* 1753. 4°. De Schrijver, te regt, door dit werk en vele andere beroemd, is in 1754 overleden.

LAGNY. (DE) Een zeer goed wiskunstenaar, door vele fraaije Verhandelingen bekend, en in 1733 overleden, wordt hier aangehaald bl. 304, 314.

LAMBERT, (JAN HENDRIK) *Beyträge zum gebrauch der Mathematick und dessen anwendung, Berlin* 1765. 8°. 3 *theile*. In het eerste staat eene schoone Verhandeling ten tijtel voerende: *Aanmerkungen und Zusätsen zur praktische Geometrie*. Deze voortreffelijke Wiskundige en scherpzinnige Wijsgeer, schrijver van vele uitmuntende werken, is den 25 September 1777 overleden.

LAMI, *Elémens de Mathématiques, ou Traité de la Grandeur, Amst.* 1710. 8°. Een zeer nuttig werk: wij hebben alleen van het laatste gedeelte des VIII. Boeks dat over de harmonische evenredigheid handelt, gebruik gemaakt. Die geleerde en zeer verdienstelijke man is in 1715. overleden.

LEUPOLD, (JACOB) *Theatrum Machinarum*. 1727. 5 deelen in fol.

LEXELL, beroemd Wiskonstenaar, wordt aangehaald bl. 269.

LUDOLF VAN CEULEN, *Van den cirkel*, Leijden 1615. 2de druk, 4°. — *Fundamenta Arithmetica et Geometrica, e vernaculo in latinum translata a* W. SN. R. F. (W. SNELLIO *Rudolphi Filio*) *Lugd. Bat.* 1615. in 4°. LUDOLF is te Leijden, alwaar hij Hoogleeraar was, in 1610 overleden.

MACLAURIN, *Treatise of Fluxions, Edenb.* 1742. in 4°. 2 deelen. De Fransche vertaling draagt tot tijtel *Traité des Fluxions, Paris* 1746. 4°. 2 vol. Deze uitmuntende Wiskonstenaar is in 1746 gestorven.

MARTIN, (BENJAMIN) *Young Trigonometers Guide, Lond.* 1736. 8°. 2 deelen, een zeer nuttig werk.

MAUDUIT, een zeer goed Wiskonstenaar, door vele schoone werken bekend, en vóór weinige jaren overleden, wordt XI. 29. aangehaald.

MAYER *Gründliches und ausfürliches unterricht über die praktische Geometrie. Gött.* 1802. 4 th. 8°.

ME-

MENECHMUS, broeder van DINOSTRATES, wordt in het derde boek der Werkstukken, Werkst. IX. Aanm. 2. aangehaald wegens het vinden van twee middel-evenredige tusschen twee lijnen.

METIUS, (ADRIAAN) *Geometria Practica*, *Franequerae* 1620, in 4°. Deze beroemde man is in 1635 overleden.

MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, *Paris* 1718. 2 vol. 4°. Er is vervolgens een tweede veel vermeerderde en verbeterde druk uitgekomen, in vier deelen; waarvan de twee eerste, in 1799, kort vóór het overlijden des schrijvers, door hem zelven zijn uitgegeven: de twee laatste zijn in 1802 uitgekomen door de zorg van LA LANDE, die, het gene de schrijver niet hadt kunnen voltooijen, getracht heeft te volbrengen; het geheel maakt een zeer belangrijk werk. — *Histoire de la Quadrature du Cercle*, *Paris* 1754. in 8°. doch zonder den naam des schrijvers: een zeer schoon werk.

MORGENSTER, *Werkdadige Meetkonst*, *vermeerderd door* J. H. KNOOP, 's Hage 1756. in 8°.

NASSER-EDDIN-AL TUSSI, een der beroemdste Musulmannen, heeft over de *Elementa* van EUCLIDES en de *Spherica* van THEODOSIUS en MENELAUS geschreven; hij is in het jaar 677. of, gelijk andere willen, in 687 van de *Hegira* (dat is in 127½ of in 1288 van onze tijdrekening) overleden. Hij wordt I. 10. Aanm. aangehaald.

NEPER, (JOHANNES) een Schots Edelman, de eerste uitvinder der Logarithmen, heeft daarover te Edinburg, in 1614, in klein 4°. uitgegeven *Logarithmorum Canonis descriptio*. Een jaar na zijn overlijden, d. i. in 1619, gaf zijn Zoon te Edinburg, te gelijk met den tweeden druk van het gemelde werk, uit *Mirifici Logarithmorum Canonis constructio; una cum appendice de alia atque praestantiorum Logarithmorum specie condenda:* quibus accesserunt *propositiones ad Triangula Spherica faciliori calculo resolvenda, una cum annotationibus Henrici Briggii*, 4°.

NEWTON *Arithmetica Universalis*, eerste druk 1707. in 8°. door WHISTON uitgegeven; de beste drukken zijn die, welke 's GRAVESANDE te Leijden, in 1732, heeft bezorgd in 4°., en vooral die, welke CASTILLON, in 1761, in twee deelen in 4°., met eenen zeer breden *Commentarius*, te Amsterdam heeft uitgegeven. — *Principia Philosophiae Naturalis Mathematica*, 4°.; de eerste druk London 1686, de tweede 1713, en de derde en laatste 1726, kort vóór den dood des schrijvers, die in 1727 voorviel, uitgegeven.

NICOMEDES, die waarschijnlijk in de tweede of in de eerste Eeuw vóór onze tijdrekening leefde, wordt in het III. Boek der Werkstukken, Werkst. IX. aangehaald, over het vinden van twee *middel-evenredige*. Hij is zeer beroemd door het uitvinden van de *Conchoide*, of *Schulpstrek*.

OZANAM, *Usage du Compas de proportion*, *Paris* 8°. — *Méthode de lever les Plans*, Paris 1716. 8°. Deze schrijver heeft vele zeer goede en nuttige werken uitgegeven, en is in 1717 overleden.

PAPPI *Alexandrini*, *Collectiones Mathematicae a* FREDERICO COMMANDINO *éditae*, *Bononiae* 1666. *Folio*. De Griekfche tekst van dezen schrijver, die in de vijfde Eeuw van onze tijdrekening leefde, is nog nimmer in zijn geheel uitgegeven, slechts hebben eenige stukken het licht gezien. Ook zijn er van hem *Lemmata* over APOLLONIUS, die door HALLEY, bij zijne uitgave van APOLLONIUS, gevoegd zijn.

PELL, (JOHN) *Controversia de vera circuli mensura inter* LONGOMONTANUM et PELLIUM Amstel. 1647. 4°. PELL was toen Hoogleeraar te Amsterdam, werd het kort daar na te *Breda*, vertrok in 1652 weder naar Engeland, en is in 1682 overleden.

PERRAULT, (CLAUDE) een verdienstvolle Natuurkenner en Bouwkundige, door vele werken beroemd, en onder anderen door zijne Fransche vertaling van VITRUVIUS, hier aangehaald bl. 39.

PHILO van *Byzantium*, een beroemd Grieksch *Mathematicus*, die na HERO leefde, misschien twee Eeuwen vóór onze tijdrekening, wordt aangehaald V. 17. Gev. 4, en in het IX. Werkstuk van het III. Boek, over het vinden van twee middel-evenredige.

PITOT, een schrander Wiskonstenaar, in 1774 overleden, wordt aangehaald VI. 2.

PLATO, beroemd Grieksch Wijsgeer, die vierhonderd jaren vóór onze tijdrekening leefde, en aan wien vele uitvindingen in de Meetkunde worden toegeschreven, wordt aangehaald IV. 15. Aanm. 5. en *Werkstukken* III. 9. over eene zeer vernuftige wijze om twee middel-evenredige te vinden.

PROCLUS, *In primum librum* EUCLIDIS *Commentariorum Libri* IV. *edente* FRANCISCO BAROCIO. *Pataviae* 1560. *Fol.* De Griekfche tekst van PROCLUS, welke in 't midden der vijfde Eeuw van onze tijdrekening leefde, is in 't jaar 1535 te Bazel, achter den EUCLIDES, gedrukt; doch BAROCIUS klaagt over het gebrekkige van die uitgave. Er is te Londen, in

1792,

1792, in twee deelen in 4°., eene Engelsche vertaling van dit werk uitgekomen, verrijkt met vele aanteekeningen, met verhandelingen over de Platonische Wijsbegeerte, en met nog een ander werk van PROCLUS. De geheele tijtel is, *The Philosophical and Mathematical Commentaries of* PROCLUS *on the first Book of* EUCLID'S *Elements: To which were added a history of the restoration of Platonic Theology by the latter Platonists, and a translation from the greek of* PROCLUS *Theological Elements.*

PTOLEMAEI *Almagestum, seu magnae compositionis mathematicae opus*, is te vinden in des schrijvers werken, in het Latijn uitgegeven te Bazel, in *folio*, in 1515; en later, ook in 1551, door ERASMUS OSWALD SCHREKKENBUSIUS. Het oorspronkelijk werk is in 't Grieksch, in het jaar 1538 te Bazel met den *Commentarius* van THEON gedrukt. De Heer HALMA bereidt eene uitmuntende uitgave van dit werk, in 't Grieksch en in 't Fransch. De vertaling is geheel door DELAMBRE nagezien, die het werk met schoone en nuttige aanmerkingen heeft verrijkt. Het eerste deel is in 1813, te Parijs in 4°. uitgekomen. PTOLEMAEUS leefde in de eerste helft der tweede Eeuw van onze tijdrekening.

PUISSANT, *Traité de Géodésie*, *Paris* 1806. 4°.
Traité de Topographie, d'Arpentage, et de Nivellement, *Paris* 1807. 4°.

PYTHAGORAS, deze beroemde Wijsgeer, die vijf Eeuwen vóór onze tijdrekening leefde, is in de Wiskunde bekend door het voorstel dat zijnen naam draagt (II. 16.) en wordt ook aangehaald (II. 16. Aanm. 3.) wegens een middel daar uit afgeleid om winkelhaken te beproeven.

RENALDINI, (CAROLUS) Hoogleeraar te *Padua*, en aldaar in 1700 overleden, heeft vele werken uitgegeven, van welke er hier maar één aangehaald wordt, te weten: *Ars analytica Mathematum*, *Florentiae* 1665. *Fol.* en daarin zijn tractaat *de Resolutione et Compositione Mathematica.* De Hoogleeraar THOLEN heeft de vriendelijkheid gehad mij uit dat werk (dat ik niet bezit) het geen mij noodig was, te bezorgen.

ROBERTSON, (JOHN) *A Treatise of Mathematical Instruments*, *Lond.* 1749. 8°. — *The Elements of Navigation*, *London* 1806. The 5 *Edition*, 2 deelen 8°. De eerste druk is van 1748.

SAURIN, (JOSEPH) overleden in 1739, wordt aangehaald bl. 266.

SAUVEUR, (JOSEPH) *Géométrie Elémentaire et Pratique*, uitgegeven en vermeerderd door LE BLOND 1753, in 4°. De schrijver was reeds in 1716 overleden.

SE-

SERENUS, een goed Wiskunstenaar, die in de vierde of vijfde Eeuw van onze tijdrekening leefde, heeft een werk geschreven *de Sectione Coni*, en een de *Sectione Cylindri*, welke HALLEY bij zijne uitgave van APOLLONIUS gevoegd heeft.

SHERWIN. Zie hier onder, Mathematische Tafels.

SIMSON, (ROBERT) *Sectionum Conicarum*, Libri V. *Edienb.* 1750 4°.

——— *Opera quaedam reliqua post auctoris mortem in lucem edita*, *Glasguae* 1776, op kosten van Lord STANHOPE uitgegeven, die maar een zeer klein getal exemplaren, tot geschenk, heeft laten opleggen, waar door het werk zeer zeldzaam is. Zie verder op EUCLIDES.

SIMPSON, (THOMAS) *Elements of Geometry*, *2th. Edit. London* 1760. 8°.

SLUSII, (RENATI FRANCISCI) *Mesolabum*, *Leodii* 1668. 4°. Deze beroemde Wiskunstenaar overleed in 1685.

SNELLIUS, (WILLEBRORD) *Cyclometricus.*, *Lugd. Batav.* 1621. 4°. Deze uitmuntende man is, in den bloei zijns levens, in 1626 overleden.

SPORUS, aangehaald in het III. Boek der Werkstukken, Werkst. 9. over het vinden van twee middel-evenredige.

STEDMAN, aangehaald bl. 253.

STEENSTRA, *Grondbeginsels der Meetkunst* 8°., een werk waarvan zeven drukken zijn. Het wordt, kortsheidshalve, door de letters St. aangewezen. *Verhandeling over de klootsche driehoeksmeeting*, Amst. 1770. 8°. wordt hier aangehaald met de verkorting, kl. dr. De schrijver is in 1788 overleden.

STURMIUS. (JOH. CHRISTOPH) Van de menigvuldige werken door dezen verdienstelijken man, die in 1703 overleden is, uitgegeven, wordt alleen op het einde der Werkstukken aangehaald, *Mathesis Enucleata*, *Noribergae* 8°. De eerste druk, in 1686 uitgekomen; de tweede, na des schrijvers dood, in 1711.

TACQUET, (ANDREAS) Zie op EUCLIDES. Verscheide Mathematische Verhandelingen zijn in één deel, in folio, onder den tijtel, A. TACQUET *Opera*, verschenen. Hij stierf in 1660.

THALES. Aan dezen beroemden Griekschen Wijsgeer, die 600 jaren vóór onze tijdrekening leefde, worden verscheide ontdekkingen in de Meetkunde toegeschreven. Hij wordt hier aangehaald V. 7. Aanm. 4.

THEONIS SMYRNAEI, *Eorum quae in Mathematicis ad* PLATONIS *Lectionem utilia sunt expositio: edidit* ISMAEL BULLIALDUS. *Gr. Lat. Lutetiae* 1644. 4°. THEON leefde in het begin der tweede eeuw van onze tijdrekening.

VIE-

VIETA, *Opera Mathematica, operâ atque studio Fr. van Schooten; Lugd. Bat.* 1646. in Folio. Deze groote man is in 1603 overleden.

VIVIANI, *De locis solidis secunda divinatio Geometrica. Florentiae*, 1701. in Folio. Deze vernuftige Wiskonstenaar, die vele goede werken heeft uitgegeven, stierf in 1703.

WALLIS, *De Algebra Tractatus:* dit boek is in het jaar 1685 in het Engelsch uitgekomen, en in het Latijn herdrukt in het 2de deel der *Opera Mathematica* van dien schrijver, *Oxford* 1693. 3 vol. folio. Deze verdienstelijke en door en door geleerde man stierf in 1703. in het 88ste jaar zijns ongemeen nuttigen levens.

WOLFII, (CHRISTIANI) *Elementa Matheseos Universae, Halae* 1742, 5 deelen in 4°. Verscheide Mathematische en Wijsgeerige werken van dien schrijver, die in 1754 overleden is, zijn in onze taal in 8°. gedrukt.

AAN.

AANWIJZING VAN TAFELS.

Men behoort zich in de studie der Wiskunde van verscheide Tafels te voorzien, als daar zijn: I. *Sinus-Tafels*; II. *Quadraat-* en *Cubic-Tafels*; III. Tafels van *Divisoren* en *Prim-getallen*.

I. Van de *Sinus-* en *Logarithmus-Tafels* zijn vele drukken in alle talen; de beste in de onze zijn:

Tafelen bevattende de Sinussen, Tangenten, en Secanten enz. benevens derzelver Logarithmen, als mede de Logarithmen der gewone getallen van 1 *tot* 10,000, *door* B. J. DOUWES, *te Amsterdam*, *bij* G. Hulst van Keulen, 1779, in 8°.

En vooral, de groote Tafels van denzelven, die tot tijtel voeren, *Tafelen, behelzende de Sinussen, Tangenten, Secanten, en Sinus versus enz. benevens de vergrootende breedte, als mede de Logarithmen voor alle getallen van* 1 *tot* 100,000, *door* B. J. DOUWES, *te Amsterdam*, *bij* J. van Keulen en Zoonen, 1776. 8°.

Deze zijn geschikt naar de Tafelen van SHERWIN; doch daar de Heer DOUWES in de Tafels der Logarithmen van *Sinussen* enz. de verschillen weggelaten heeft, zijn deze Tafels veel minder nuttig dan die van SHERWIN, welke tot tijtel voeren:

SHERWIN's *Mathematical Tables: carefully revised and corrected, by* WILLIAM GARDINER. Ik gebruik den druk in 1761, te Londen, in 8°. uitgegeven; daar na zijn nog nadere drukken in 't licht verschenen; men heeft mij berigt dat er onder deze zijn waarin zeer vele drukfeilen gevonden worden.

De uitgestrektste en beste Tafels zijn; die van VLACQ, in 1628 en 1633, te Gouda in *folio* gedrukt, doch die thans zeer zeldzaam voorkomen en zeer duur zijn. VEGA heeft eenen herdruk van dezelve bezorgd; de groote *Logarithmus-Tafels* van GARDINER, zijn in 1742, te Londen in 4°. uitgegeven: men vindt er de Logarithmen der *Sinussen* enz. van 10 tot 10 seconden: deze Tafels zijn in 't Fransch met vele en belangrijke vermeerderingen uitgegeven door den Heer PEZENAS, onder den tijtel:

Tables des Logarithmes, contenant les Logarithmes des nombres depuis 1 *jusqu'à* 102100 *&c. publiées ci-devant, par* M. GARDINER, *Avignon* 1770. 4°.

Doch vóór eenige jaren zijn die Tafels wederom met alle mogelijke naauwkeurigheid in 8°. herdrukt, en, wat de schikking der Logarithmen betreft, verbeterd, onder den tijtel van:

Ta-

Tables portatives de Logarithmes, publiées à Londres, par GARDINER, *augmentées et perfectionnées dans leur disposition, par* M. CALLET, *Paris, chez* Didot, 1783.

Deze Tafels verdienen, mijns oordeels, de voorkeuze boven alle andere van dien aard (*), vooral zederd den druk van 1795, welke *gestereotypeerd* is geworden. In de achtervolgende uitgaven heeft men het zoo ver gebragt, dat men, tot nu toe, in de laatste geen drukfeilen heeft kunnen ontdekken. Men behoort echter te letten dat men in dezelve (even als in die van PEZENAS of GARDINER) de *natuurlijke* of *flecht Sinusfen, Tangenten* en *Secanten* niet aantreft, zoo als in de gewone Tafels, noch de *finus verfus*, zoo als in die van SHERWIN. Daar echter de *flecht-finusfen* en *finus verfus* in fommige deelen der Stuurmanskunst te pas komen, moet men zich ook van eenige dier reeds opgenoemde kleine tafels voorzien, hoewel men, zonder veel moeite, uit den *Logarithmus-finus* den *Natuurlijken finus*, door de *Logarithmus*-Tafels kan opmaken. MACKENZIE heeft in zijne Verhandeling over de Lengte op Zee, Tafels van *flecht-finus verfus* uitgegeven van 10 tot 10 feconden; welke ik in de vijfde druk mijner Verhandeling *over de Lengte op Zee* heb laten herdrukken, tevens van dezelve eene meer duidelijke en kortere fchikking gevende.

Onder alle de drukken van kleine *Logarithmus*-Tafels, die in verre de meeste gevallen der praktijk genoegzaam zijn, en als een handboek kunnen dienen, zijn de volgende de beste, inzonderheid voor de fchikking der getallen, die voortreffelijk is.

Tables de Logarithmes pour les Sinus et Tangentes de toutes les minutes du quart de cercle, et pour tous les nombres naturels depuis 1 *jusqu'à* 10800. *Paris chez* Guerin *et* de la Tour, 1760. 8°. en vooral de Tafels van LA LANDE, in klein *duodecimo*, getijteld: *Tables de Logarithmes pour les nombres et pour les finus.* Deze zijn *gestereotypeerd*, en zoo veel men tot nu heeft kunnen nagaan, zijn er geen feilen in.

II. Het kan fomtijds in de praktijk nuttig en aangenaam zijn met een opflag van het oog het *quadraat* of den *cubus* van eenig getal te vinden, of den *quadraat-* of *cubiek*-wortel van eenig getal te kunnen nagaan: hiertoe dienen de zoogenaamde *Quadraat-* en *Cubiek-Tafels* die men in eenige boeken over de Algebra, en ook afzonderlijk, aantreft: zoo als die, welke door BUCHNER met eene Hoogduitfche verklaring zijn uitgegeven, onder den tijtel JOH. PAUL BUCHNERS *Tabula radicum* *qua-*

(*) Ik zeg van dien aard. Want MICHAEL TAYLOR heeft in 1792. te Londen Tafels in 4to uitgegeven van *Logarith. finus* enz. van feconde tot feconde.

quadratorum et cuborum, bis auf 12000, *Nurnberg* 1701: in langwerpig 8°. In deze Tafels zijn vele drukfeilen.

Tables des quarrés et des cubes et de leurs racines représentées pour les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à dix mille par C. SEGUIN *l'Ainé. Paris* 1801. 8°. Deze Tafels zijn zeer naauwkeurig en door eene uitvoerige en keurige verklaring voorafgegaan.

Tetragonometria Tabularia, auctore L. J. LUDOLFIO, *Amstelodami* 1690. 4°. bevat zeer uitvoerige Quadraat-Tafels.

Er staan ook Quadraat- en Cubiek-Tafels van 1 tot duizend, in het werk van LAMBERT, tot tijtel voerende:

Zusaetse zu dem Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen, Berlin 1770. 8°.

III. Men vindt Tafels van *Prim-getallen* in het reeds aangehaalde boek van LAMBERT; doch zij zijn van zelf begrepen in die Tafels, welke de deelers van alle de getallen opleveren, vermits de getallen, welke geen deelers hebben dan de eenheid, *prim-getallen* zijn: onder deze munten zeer uit:

ANJEMA, *Table des diviseurs de tous les nombres naturels depuis* 1 *jusqu'à* 10,000, Leyde 1767.

MARCI, (ADOLPH FREDERIK) *Uitvoerige Tafelen van* Primgetallen *van* 1 *tot* 400,000; *benevens eene verhandeling over de wijze van vinding en de nuttigheid der* prim-getallen: *Amsterdam* 1771. 8°.

Doch vooral

CHERNAC, (L.) *Cribrum arithmeticum*, Daventriae 1811. 4°. In dit werk vindt men de *divisoren* van alle de getallen die niet door 1, 3, of 5 deelbaar zijn; van 1 tot 1020000.

BURCKHARD heeft het tweede en derde millioen uitgewerkt in Tafels, ten tijtel dragende: *Table des diviseurs de tous les nombres du deuxième million, Paris* 1814. *du troisième million, Paris* 1815. beide in 4°. op het zelfde formaat als het werk van CHERNAC, waaraan dit tot vervolg dient.

IV. Voor de beschrijving van Mathematische Instrumenten. Zie hier boven de werken van BION, OZANAM, CUNN, ROBERTSON.

AAN-

AANWIJZING

DER

MATHEMATISCHE WERKTUIGEN,

WELKE IN DIT WERK UITGELEGD WORDEN.

UITLEGGING DER TEEKENS

IN DIT WERK GEBRUIKT.

= *beteekent* gelijkheid; A = B is A *gelijk aan* B.

∞ Dit teeken werd oudtijds voor *gelijkheid* gebruikt: wij zullen het gebruiken om *gelijkhaltigheid*, of *gelijkheid van inhoud* aan te duiden: zoo dat A ∞ B beteekent dat A gelijken inhoud heeft als B, hoe veel ook anderzins van B in gedaante verschillende: en A = B zal bestendig beteekenen A, in alle opzichten *gelijk* aan B: en dus ook, *gelijkhaltig.*

> ——— grooter; A > B is A *grooter* dan B.

<

$<$ *beteekent* kleiner; A $<$ B is A *kleiner* dan B.
Sommigen gebruiken het teeken ⊏ in plaats van $>$ en ⊐ in plaats van $<$.

$+$ —— *plus* of *ſom*; A $+$ B dat is A *plus* B, of de *ſom* van A en B.

$-$ —— *minus*; A $-$ B dat is A *min* B; of B *afgetrokken* van A.

$\times$ of . —— multiplicatie; A $\times$ B of A . B beteekent A *gemultipliceerd* door B; en (C $\pm$ D) . E, of $\overline{C \pm D}$. E, beteekent de ſom van C $+$ D of het verſchil van C en D door E gemultipliceerd.

$\frac{A}{B}$ —— diviſie; $\frac{A}{B}$ is A *gedivideerd* door B.
Dit wordt ook ſomtijds door twee ſtippen (:) aangeduidt; als A : B beteekent ook A *gedivideerd* door B.

∽ —— gelijkvormig; A ∽ B dat is A *gelijkvormig* aan B.

: —— rede; A : B beteekent de rede van A tot B; dit wordt wanneer de rede *geometrisch* is, wel eens door *diviſie*, en dus ook door $\frac{A}{B}$ uitgedrukt, want *geometriſche* rede is *diviſie*.

$\perp$ —— loodregt; A $\perp$ B is A *loodregt* op B.

$//$ —— evenwijdig; A $//$ B is A *evenwijdig* met B.

$\angle$ —— hoek.

∟ —— regte hoek.

$\triangle$ —— driehoek.

▱ —— parallelogram.

▭ —— regthoek.

□ —— vierkant.

⊟ —— *parallelepipedum*.

⊙ —— omtrek van den cirkel.

⌒ —— boog van eenen cirkel.

⊙ —— cirkel, de geheele inhoud van de figuur.

AANTEEKENING DER PROPOSITIEN VAN EUCLIDES, DIE MET DE VOORSTELLEN VAN DIT WERK OVEREENKOMEN.

NB. *De letter* W *duidt de Werkstukken aan.*

I. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij	ons	W. II. 2.
II.	——	—	—	W. I. 1.
III.	——	—	—	W. I. 2.
IV.	——	—	—	I. 21.
V.	——	—	—	I. 27.
VI.	——	—	—	I. 28.
VII.	——	—	—	I. 26. Gev. 2.
VIII.	——	—	—	I. 26.
IX.	——	—	—	W. I. 15.
X.	——	—	—	W. I. 7.
XI.	——	—	—	W. I. 3.
XII.	——	—	—	W. I. 5.
XIII.	——	—	—	I. 3.
XIV.	——	—	—	I. 4.
XV.	——	—	—	I. 5.
XVI.	——	—	—	I. 15. Gev. 1.
XVII.	——	—	—	(*).
XVIII.	——	—	—	I. 18.
XIX.	——	—	—	I. 17.
XX.	——	—	—	I. 19.
XXI.	——	—	—	I. 20.
XXII.	——	—	—	W. II. 1.
XXIII.	——	—	—	W. I. 12.
XXIV.	——	—	—	I. 23.
XXV.	——	—	—	I. 23. Aanm.
XXVI.	——	—	—	I. 22.
XXVII.	——	—	—	} I. 8.
XXVIII.	——	—	—	}
XXIX.	——	—	—	I. 7.
XXX.	——	—	—	I. 9.
XXXI.	——	—	—	W. I. 6.

XXXII.

(*) „ Twee hoeken van eenen driehoek zijn kleiner dan twee reg-„ ten." Dit ligt in het XV. Voorstel van ons eerste Boek stilzwijgend opgesloten.

XXXII. Propositie is bij ons I. 15.
XXXIII. —— — — I. 30.
XXXIV. —— — — I. 31. 33.
XXXV. —— — — II. 11.
XXXVI. —— — — II. 12.
XXXVII. —— — — } II. 13.
XXXVIII. —— — — }
XXXIX. —— — — } II. 13. Aanm.
XL. —— — — }
XLI. —— — — II. 11. Gev. 2.
XLII. —— — — W. II. 12.
XLIII. —— — — II. 14.
XLIV. —— — — W. II. 14.
XLV. —— — — W. II. 17.
XLVI. —— — — W. II. 5.
XLVII. —— — — II. 16.
XLVIII. —— — — II. 17.

II. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Propositie is bij ons II. 1.
II. —— — — II. 1. Gev. 1.
III. —— — — II. 1. Gev. 2.
IV. —— — — II. 3.
V. —— — — II. 5.
VI. —— — — II. 6.
VII. —— — — II. 4.
VIII. —— — — II. 7.
IX. —— — — II. 8.
X. —— — — II. 9.
XI. —— — — W. I. 10.
XII. —— — — } II. 19.
XIII. —— — — }
XIV. —— — — W. II. 20.

III. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Propositie is bij ons W. V. 1.
II. —— — — V. 1.
III. —— — — } V. 9.
IV. —— — — }
V. —— — — } V. 22.
VI. —— — — }
VII. —— — — V. 10.
VIII. —— — — V. 11.
IX. —— — — V. 9. Gev.

X.	Propositie	is bij	ons	V. 25.
XI.	—	—	—	V. 23.
XII.	—	—	—	
XIII.	—	—	—	V. 24.
XIV.	—	—	—	V. 11. Gev 2.
XV.	—	—	—	V. 11. Gev. 1.
XVI.	—	—	—	V. 3. 4.
XVII.	—	—	—	W. V. 12.
XVIII.	—	—	—	V. 4.
XIX.	—	—	—	
XX.	—	—	—	V. 5.
XXI.	—	—	—	V. 5. Gev. 1.
XXII.	—	—	—	VI. 6.
XXIII.	—	—	—	VIII. 4. Gev. 3.
XXIV.	—	—	—	VIII. 4 Gev. 2.
XXV.	—	—	—	W. V. 2.
XXVI.	—	—	—	V. 6.
XXVII.	—	—	—	
XXVIII.	—	—	—	V. 6. Gev 6.
XXIX.	—	—	—	V. 6. Gev. 5.
XXX.	—	—	—	W. V. 7.
XXXI.	—	—	—	V. 7.
XXXII.	—	—	—	V. 8.
XXXIII.	—	—	—	W. V. 5.
XXXIV.	—	—	—	W. V. 6.
XXXV.	—	—	—	V. 12.
XXXVI.	—	—	—	V. 20.
XXXVII.	—	—	—	

IV. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij	ons	W. V. 3.
II.	—	—	—	W. VI. 1.
III.	—	—	—	W. VI. 2.
IV.	—	—	—	W. VI. 4.
V.	—	—	—	W. VI. 5.
VI.	—	—	—	W. VI. 6.
VII.	—	—	—	W. VI. 7.
VIII.	—	—	—	W. VI. 8.
IX.	—	—	—	W. VI. 9.
X.	—	—	—	W. II. 10.
XI.	—	—	—	W. VI. 11.
XII.	—	—	—	W. VI. 12.
XIII.	—	—	—	W. VI. 13.
XIV.	—	—	—	W. VI. 14.
XV.	—	—	—	W. VI. 15.
XVI.	—	—	—	W. VI. 16.

V. BOEK VAN EUCLIDES.

De I, II, III, V. en VI. Propositien, betreffen de bijzondere leer van EUCLIDES omtrent de *gelijkvouden*.

IV.	Propositie	is bij	ons III. 6.
VII.	—	—	— III. Axioma 1.
VIII	—	—	— III. — 2.
IX.	—	—	— III. — 3.
X.	—	—	— HL. — 2.
XI.	—	—	— III. — 5.
XII.	—	—	— III. 18.
XIII.	—	—	— III. Axioma 6.
XIV.	—	—	— III. 4.
XV.	—	—	— III. Axioma 4.
XVI.	—	—	— III. 6.
XVII. } XVIII. }	—	—	— III. 8.
XIX.	—	—	— III. 8. Aanm. 2.
XX. } XXI. }	—	—	— III. 11. Gev. 1.
XXII. } XXIII. }	—	—	— III. 11. Aanm. 1.
XXIV.	—	—	— III. 13. Aam.
XXV.	—	—	— III. 9.

VI. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij	ons IV. 6.
II.	—	—	— IV. 1.
III.	—	—	— IV. 12.
IV.	—	—	— IV. 2.
V.	—	—	— IV. 3.
VI.	—	—	— IV. 4.
VII.	—	—	— IV. 5.
VIII.	—	—	— IV. 15.
IX.	—	—	— W. I. 9.
X.	—	—	— W. III. 1.
XI.	—	—	— W. III. 4.
XII.	—	—	— W. III. 5.
XIII.	—	—	— W. III. 7.
XIV. } XV. }	—	—	— IV. 8. Gev. 4.
XVI.	—	—	— IV. 8. Gev. 5.
XVII.	—	—	— IV. 8. Gev. 6.
XVIII.	—	—	— W. IV. 2.
XIX.	—	—	— IV. 11.

XX.	Propositie is	bij	ons	IV. 24.
XXI.	—	—	—	(*)
XXII.	—	—	—	IV 25.
XXIII.	—	—	—	IV. 8. Gev. 1.
XXIV.	—	—	—	IV. 23. Gev. 2.
XXV.	—	—	—	W. IV. 3.
XXVI.	—	—	—	(†)
XXVII.	—	—	—	(§).
XXVIII.	—	—	—	(§).
XXIX.	—	—	—	(§).
XXX.	—	—	—	W. III. 11.
XXXI.	—	—	—	IV. 26.
XXXII.	—	—	—	(.)
XXXIII.	—	—	—	VIII. 1.

VII. BOEK VAN EUCLIDES.

NB. Dit Boek, het VIII. en het IX., handelen over de eigenschappen der getallen, en derhalve behooren dezelve niet tot de Geometrie. Er worden echter uit die boeken in ons Werk eenige bepalingen verklaard, en eenige propositien bewezen. Zie hier dezelve

V.	Bepaling is	bij	ons	III. Bep. 2.
XVI.	—	—	—	IV 9. Aanm. 2.
XVII, XVIII	—	—	—	III. Bep. 4. Aanm. 1. en XI. 12. Aanm. 3.
XIX.	—	—	—	XI. 12. Aanm. 3.
XX.	—	—	—	III. Bep. 12. Aanm. 4.
XXI.	—	—	—	IV. 9. Aanm. 2. en XI. 12. Aanm. 3

XI.

(*) De propositie is, „ Regtlijnige figuren, die aan eene en de „ zelfde figuur gelijkvormig zijn, zijn onderling gelijkvormig " Dit is in de daad een Axioma.

(†) De woorden zijn, „ Indien men (Fig. 52.) van een parallelogram „ AD, een ▱ GB afneemt, dat aan het eerstgemelde gelijkvor- „ mig en gelijkelijk geplaatst is, en eenen hoek FBE met het zelve „ gemeen heeft; zal dat parallelogram om de diagonaal van het „ eerstgemelde parallelogram staan."

(§) Zie hier over de 4. en 5. Aanmerking op V. 18.

(.) De propositie is: „ Indien twee driehoeken (Fig. 89.) BDF en „ ADE, waarin twee zijden evenredig zijn aan twee zijden (BF: „ DF = DE: EA zoodanig met eenen hoek (BDF en ADE) aan „ elkander gesteld zijn, dat de eveneensgeplaatste zijden (BF en DE: „ DF en AE) evenwijdig aan elkanderen zijn, zullen de twee overige „ zijden (DB en DA) eene regte lijn BDA uitmaken." Het komt, wat het wezen der zaak betreft, met IV. 2. Gev. 3. overeen.

XI. Propositie is hier III. 8.
XII. — — III. 18.
XIII. — — III 6.
XVII. en XVIII. — — III. Axioma 4.
XIX. — — III. 5.
XX. — — III 5. Gev. 1.
XXII }
XXIII. } — — III. 11.

VIII. BOEK VAN EUCLIDES

V. Propositie is hier IV. 9. Aanm. 2.
XI. — — IV. 9. Aanm. 1.
XII. — — XI. 11. Gev. 3.
XVIII. — — IV. 24. Gev. 2.
XIX. — — XI. 13. Gev. 3.
XXI. — — XI. 12. Gev. 3.
XXVI. — — IV. 24. Gev. 2.
XXVII. — — XI. 13. Gev. 3.

IX. BOEK VAN EUCLIDES.

VIII en IX. Propositie zijn hier III, 17. Gev. 1.
XVIII en XIX. (*)
XXXV. Propositie is hier III 18. Gev. 3.

X. BOEK VAN EUCLIDES.

In dit Boek, dat zeer moeijelijk te verstaan is, behandelt de Schrijver de leer der onmeetbare grootheden op eene zeer volledige, en naar den trant der Ouden geschikte wijze: sommige Bepalingen en Voorstellen worden ook op eenige plaatsen van ons Werk uitgelegd.

II. Bepaling is bij ons III. Bep. 8.
III. }
IV. }
V. } —— zie hier over IV. 9. Gev. 10.
VI. }

I.

(*) In deze propositien stelt EUCLIDES voor te bepalen, of men aan twee of drie gegeven getallen een derde of vierde evenredige vinden kan: het geen schijnt te strijden met III. 5. Gev. 2. alwaar wij den regel om die getallen te vinden, als algemeen opgegeven hebben. Doch de rede is, dat EUCLIDES door het woord *getal*, geheel getal zonder breuken verstaat; en wij getal in het algemeen, het zij *geheel*, het zij *breuk*. Wanneer nu het product der middelste getallen niet zonder overschot door het eerste kan worden gedivideerd, is het gezochte getal geen geheel getal, en dus, volgens den zin in welken EUCLIDES dat woord neemt, geen getal.

I.	Voorstel is bij	ons	VII. 1.
II.	———	——	III. Bep. 8. Aanm. 1.
III.	———	——	III. Bep. 7. Aanm. 4.
IX.	———	——	IV. 9. Gev. 10. N°. 4.
X.	———	——	III. Bep. 12. Gev. 1. Aanm. 3.
XIV.	———	*Lemma*: is bij ons	II. 16. Gev. 12.
XXII.	———	komt over een met	IV. 9. Gev. 10. N°. 1.
XXXIV.	———	*Lemma* 1. is	II. 18.
LXXIV.	———	——	IV. 19. en VI. 22. Gev. 2.
CXVII.	———	——	III. Bep. 8. Aanm. 2, 3.
CLXXXV.	———	——	IV. 22. Gev. 1.

XI. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij	ons	X. Bep. 1. Aanm.
II.	——	—	—	X 1. en Gev. 2.
III.	——	—	—	X. Bep. 2. Aanm.
IV.	——	—	—	X. 2.
V.	——	—	—	X. 3.
VI.	——	—	—	X 4.
VII.	——	—	—	(*).
VIII.	——	—	—	X. 4.
IX.	——	—	—	X. 5.
X.	——	—	—	X. 6.
XI.	——	—	—	X 2. Aanm. 1.
XII.	——	—	—	X. 4. Aanm.
XIII.	——	—	—	X. 2. Gev. 1.
XIV.	——	—	—	X. 7.
XV.	——	—	—	X 6.
XVI.	——	—	—	X. 7. Gev. 2.
XVII.	——	—	—	X. 8.
XVIII.	——	—	—	X. 2. Gev. 4.
XIX.	——	—	—	X. 2. Gev. 6.
XX.	——	—	—	XI. 1.
XXI.	——	—	—	XI. 2.
XXII.	——	zie bij	ons	XI. Bep. 2. Gev. 2. Aanm.
XXIII.	——	—	—	XI, 3. Aanm. 2.
XXIV.	——	—	—	XI Bep. 9. Gev. 1.
XXV.	——	is bij	ons	XI. 7.
XXVI.	——	—	—	XI. 5. Gev. 1.
XXVII.	——	zie bij	ons	XI. Bep. 9. Gev. 3.

XXVIII.

(*) „ Indien twee regte lijnen evenwijdig aan elkander zijn, en men „ een stip in ieder derzelve neemt, welke stippen men door eene „ regte lijn vereenigt, zal die lijn in het zelfde vlak liggen als de „ twee gegeven evenwijdige lijnen." Dit is een Axioma.

XXVIII.	Propositie	is bij	ons	XI. 6.
XXIX. } XXX. }	—	—	—	XI. 8.
XXXI.	—	—	—	XI. 9.
XXXII.	—	—	—	XI. 10.
XXXIII.	—	—	—	XI. 13.
XXXIV.	—	—	—	XI. 12. Gev. 1.
XXXV.	—	zie bij	ons	XI. 5. Gev. 2.
XXXVI.	—	is bij	ons	XI. 13. Gev. 4.
XXXVII.	—	—	—	XI. 13. Gev. 2.
XXXVIII.	—	—	—	X. 2. Gev. 5.
XXXIX.	—	—	—	XI. 6. Gev. 3.
XL.	—	—	—	XI. 16. Aanm. 1.

XII. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij	ons	VI. 9.
II.	—	—	—	VII. 16.
III.	—	—	—	XI. 20.
IV.	—	—	—	XI. 21.
V.	—	—	—	XI. 23.
VI.	—	—	—	XI. 24.
VII.	—	—	—	XI. 25.
VIII.	—	—	—	XI. 26. Gev. 6.
IX.	—	—	—	XI. 26. Gev. 4.
X.	—	—	—	XII. 8.
XI.	—	—	—	XII. 2. Gev. 2.
XII.	—	—	—	XII. 5. en 9. Gev. 3.
XIII. } XIV. }	—	—	—	XII. 2. Gev. 3. en 9. Gev. 1.
XV.	—	—	—	XII. 2. Gev. 4.
XVI. } XVII. }	—	—	—	(*)
XVIII.	—	—	—	XII. 19.

XIII. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij	ons	IV. 18.
II.	—	—	—	IV. 20.
III.	—	—	—	IV. 21.
IV.	—	—	—	IV. 22.
V.	—	—	—	IV. 16.

VI.

(*) Twee Werkstukken die in ons bestek niet te pas kwamen: doch een gedeelte van de bewerking van het XVII. kan hier tot de aanmerking op het 5. Gevolg van XII. 32. gebragt worden.

VI.	Propositie	is bij ons	IV. 19.
VII. (*)	—	—	—
VIII.	—	—	— IV. 32.
IX.	—	—	— VI. 21. Gev. 3.
X.	—	—	— VI. 22.
XI.	—	—	— VI. 22. Gev. 1.
XII.	—	—	— VI. 18.
XIII.	—	—	— XII. 38. N°. I.
XIII.	*Lemma*	—	— IV. 15. Gev. 3.
XIV.	Propositie	—	— XII. 38. N°. II.
XV.	—	—	— XII. 38. N°. III.
XVI.	—	—	— XII. 38. N°. IV.
XVII.	—	—	— XII. 38. N°. V.
XVIII.	—	—	— XII. 38.
XVIII.	*Scholium*	—	— XI. 31. Gev. 1.

——— *Lemma* komt, wat den vijfhoek betreft, overeen met II. 29. Gev. 1.

XIV. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij ons	VI. 21. Gev. 2.
II.	—	—	IV. 37. Gev. 5.
	Lemma	—	VI. 22. Gev. 2.
III.	Propositie	—	XI. 35. Aanm. 3.
IV.	—	—	XII. 40. Gev. 1.
	Lemma	—	VI. 23.
V.	Propositie	—	XII. 37. Gev. 2.
VI.	—	—	XII. 37. Gev. 2.
VII.	—	—	IV. 17.

XV. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie	is bij ons	XI. 38. Gev. 3.
II. } III. }	—	—	XI. 38. Gev. 4.
IV.	—	—	XI. 38. Gev. 5.
V.	—	—	XI. 38. Gev. 6.
VI.	—	—	XI. 32.
VII.	—	—	XII. 33. Aanm. 2.

(*) „ Zoo in een' gelijkzijdigen vijfhoek drie hoeken onderling gelijk zijn, is de vijfhoek gelijkhoekig." Dit Voorstel kwam in ons bestek niet te pas.

———

IN.

INLEIDING.

I.

De Meetkunde is dat gedeelte der Wiskunde, dat de eigenschappen der uitgebreidheid navorscht, en dezelve door zekere redeneringen bewijst.

II.

De uitgebreidheid en hare drie afmetingen, lengte, breedte en dikte, zoo wel als de Figuren die daaruit ontstaan, zijn het onderwerp der Meetkunde.

III.

Het is enkel door eene aftrekking des Verstands, dat men deze drie afmetingen van de ligchamen zelven afscheidt, om ze afzonderlijk te kunnen beschouwen.

IV.

Het Voorwerp der Meetkunde is dus een afgetrokken en zeer eenvoudig denkbeeld.

D'ALEMBERT, *Mélanges*, T. IV. p. 158—63.

V.

Het is aan die eenvoudigheid van het Onderwerp, aan de Grondbeginsels welke de Meetkundigen stellen, en aan de wijze op welke zij voortgaan, dat men de klaarblijkelijkheid der Meetkunde verschuldigd is.

D'ALEMBERT, *Mélanges*, T. IV. p. 164.

VI.

De Grondbeginsels waaruit de Wiskundigen hunne bewijzen ontleenen, zijn de bepalingen zelve der voorwerpen die zij beschouwen; waar bij sommigen eenige algemeene kundigheden voegen, die zoo klaarblijkelijk zijn dat niemand van gezond verstand er aan kan twijfelen. Deze worden *Axiomata* genoemd: bijv. als

1°. Twee grootheden die aan ééne en dezelfde gelijk zijn onderling gelijk.

2°. Het deel is kleiner dan het geheel.

3°. Alle de deelen te samen maken het geheel uit.

4°. Indien men gelijke grootheden bij gelijke grootheden voegt, of van dezelven aftrekt, zijn de sommen of de verschillen ook gelijk.

VII.

VII.

De Wiskundigen maken van twee foorten van bewijzen gebruik: de *regtstreeksche* en de *bewijzen uit het ongerijmde.*

Een bewijs, dat *regtstreeks* voortgaat, bestaat hierin; dat men, door eene aanëengeschakelde redenering, het geen bewezen moet worden uit de eenmaal gestelde grondbeginsels afleidt.

VIII.

De *bewijzen uit het ongerijmde* bestaan hierin, dat men bewijze dat eene zaak waar is om dat ze niet valsch kan zijn: dat is, om dat men, met te stellen dat zij valsch, en dus het tegendeel waar is, in ongerijmdheden vervalt.

D'ALEMBERT, *Mélanges*, T. IV. p. 166: men treft reeds een voorbeeld van die bewijzen aan, in I. 2.

IX.

Men maakt in beide de foorten van bewijzen een gedurig gebruik van het grondbeginsel van *op elkander stelling* (*superpositio*) en *overeenkomst* (*congruentia*). Men verbeeldt zich namelijk, dat eene Figuur zoodanig op eene andere geplaatst zij, dat eenige der deelen van de eerstgemelde met eenige deelen der laatstgemelde overeenkomen, of op dezelven vallen: en men gaat daaruit na, of alle de andere deelen van de eerstgemelde Figuur op alle de andere deelen van de laatstgemelde vallen, en dus of die beide Figuren geheel met elkander overeenkomen, en gevolgelijk onderling gelijk zijn, ja dan neen.

D'ALEMBERT, *Mélanges*, p. 165, 166. Dit grondbeginsel is het oorspronkelijk grondbeginsel van gelijkheid; zie I. Boek, Bep. VIII. Aanm. III. en reeds in het I. Voorstel van het zelve treft men een voorbeeld aan van die foort van bewijzen.

GROND-

GRONDBEGINSELS
DER
MEETKUNDE.

EERSTE BOEK.

OVER DE ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN DER REGTE LIJNEN, ZOO WEL OP ZICH ZELVE BESCHOUWD, ALS IN ZOO VERRE ZIJ DE HOEKEN VAN DRIEHOEKEN EN VIERHOEKEN UITMAKEN, OF DERZELVER ZIJDEN ZIJN.

INLEIDING.

I. BEPALING.

Wanneer men de uitgebreidheid alleen met betrekking tot hare *lengte* beschouwt, op de *breedte* en *dikte* geen acht gevende, maar deze beide aftrekkende, verkrijgt men het denkbeeld eener *linie* of *lijn*.

EUCL. I. Bep. 2. — St. I. Bep. 2. — L. G. I. Bep. 1.

AANMERKING. Van daar de gewone spreekwijze der Wiskundigen, dat de lijn *eene lengte is zonder breedte*, *of dikte*. AB, fig. 1 en fig. 2.

II. BEPALING.

De uiteinden der lijnen, en hare onderlinge snijdingen, worden *stippen* genoemd. Bij voorbeeld: A, B, fig. 1. A, B, C, D, fig. 3.

EUCL. I. Bep. 1 en 3. — St. I. Bep. 2. — L. G. I. Bep. 1.

I. AANMERKING. Van daar de gewone spreekwijze der Wiskundigen, dat *de stippen geen deelen bezitten*.

II. AANMERKING. Sommigen beschouwen de lijn [bij voorb. AB, fig. 1. ADB, fig. 2.] als door den gedurigen voortgang van een stip geboren; zoo men wil, als de *moet*, of het *spoor*, dat een bewogen stip, al voortgaande, zoude nalaten.

III. AANMERKING. De lijnen welke men in de Meetkunde beschouwt zijn *regte* of *kromme* lijnen.

III. BEPALING.

Eene *regte* lijn is eene zoodanige lijn, die overal gelijkelijk tusschen hare stippen gelegen is. Fig. 1. AB:

EUCL. I. Bep. 4. — St. I. Bep. 5.

GEVOLG.

Wanneer twee stippen gegeven zijn, wordt derzelver afstand van elkander gemeten door de regte lijn die van het eene tot het andere getrokken wordt.

St. I. Bep. 8.

I. AANMERKING. Anderen zeggen: eene regte lijn is die, welke de kortste is tusschen twee stippen. Deze bepaling komt mij voor eerder een gevolg van onze bepaling, dan wel een grondbeginsel te zijn. Hoe dit zij, indien zij aangenomen wordt, is ons XIX Voorstel een *Axioma*, maar dan wordt ook ons eerste *Axioma* een Voorstel dat bewezen moet worden.

L. G. I. Bep. 3.

II. AANMERKING. Het is met deze bepaling gelegen, even als met alle bepalingen van zaken, die te eenvoudig zijn om met woorden uitgelegd te kunnen worden: zij zijn alle onvolmaakt, en meer of min duister. De Heer D'ALEMBERT heeft hier over uitmuntend gehandeld in zijne *Mélanges de Philosophie* IV Deel, bl. 163 en V Deel, bl. 203—206.

III. AANMERKING. Uit deze bepaling van eene regte lijn volgen deze drie *Axiomata*, of *algemeene kundigheden*; en deze drie *algemeene vooronderstellingen*, of *Postulata*.

I. AXIOMA.

Regte lijnen waarvan twee stippen overeenkomen, komen geheel over een, of liggen geheel op elkander.

AANMERKING. Wanneer men tot bepaling aanneemt, „ dat de kortste lijn tusschen twee stippen regte lijn genoemd wordt," is dit *Axioma* geen *Axioma*, maar een voorstel dat bewezen moet worden, gelijk ook LE GENDRE gedaan heeft, I: 3.

II. AXIOMA.

Regte lijnen [AB, CE, fig. 3.] die elkander snijden,

of

of die uit het zelfde ſtip getrokken worden, [gelijk BC, BE, fig. 8.] hebben niets met elkander gemeen dan het ſtip waarin zij zich ſnijden, of ontmoeten, of waaruit zij getrokken worden: dit is het eenigſte het welk tot alle die lijnen behoort.

St. I. *Axioma* 13.

III. AXIOMA.

Regte lijnen, wier uiterſte ſtippen met elkander overeenkomen, en die gevolgelijk [*Axioma* I.] geheel overeenkomen, zijn aan elkander gelijk; en *omgekeerd*, lijnen die aan elkander gelijk zijn, komen geheel met elkander overeen, zoo men hare uiterſte ſtippen, of uiteinden, op elkander legt.

St. I. *Axioma* 11.

AANMERKING. Het is uit dit eenvoudig grondbeginſel dat alle de bewijzen, de gelijkheid van regte lijnen betreffende, oorſpronkelijk ontleend worden.

I. VOORONDERSTELLING.

Men vooronderſtelt dat het mogelijk is eene regte lijn van eenig ſtip tot eenig ander, of onbepaaldelijk, te trekken.

EUCL. I. *Postulatum* 1.

AANMERKING. In de praktijk wordt daartoe niets anders dan een liniaal en eene trekpen vereischt.

II. VOORONDERSTELLING.

Men vooronderſtelt dat het mogelijk is eene gegeven regte lijn te verlengen; het zij zoo ver men wil, het zij tot dat zij aan eene andere gegeven lijn gelijk zij, of grooter worde dan deze.

EUCL. I. *Post.* 2.

AANMERKING. Hoe men handelen moet om uit een gegeven ſtip eene regte lijn te trekken, die aan eene gegeven lijn gelijk zij, is het onderwerp van het eerſte werkſtuk, in het eerſte boek der werkſtukken. De oplosſing is gevestigd op het vierde *Axioma*, na de V Bepaling opgegeven.

III. VOORONDERSTELLING.

Men vooronderstelt dat men van eene gegeven regte lijn een stuk kan afnemen dat aan eene gegeven lijn gelijk is.

AANMERKING. Dit is het onderwerp van het 2de werkstuk, in het I Boek der werkstukken. De oplossing is gevestigd op het volgende IV *Axioma*.

IV. BEPALING.

Eene *kromme lijn* is eene lijn, welke [zoo als ADB fig. 2.] ongelijkelijk tusschen hare uiteinden gelegen is.

I. AANMERKING. De II. Aanmerking op de III. Bepaling is ook hier toepasselijk. Anderen, gelijk LE GENDRE, [I. Bep. 4.] noemen *kromme lijnen*, die, welke noch regte lijnen, noch een samenstel van regte lijnen, zijn.

II. AANMERKING. Van het oneindig getal kromme lijnen die men zich kan voorstellen, wordt er maar ééne éénige beschouwd, in het geen men, volgens den strikten zin door de Ouden aan dat woord gegeven, *Elementaire Geometrie*, of *Grondbeginsels der Meetkunde*, noemt; te weten, de *omtrek des cirkels*, en de deelen van dien omtrek.

V. BEPALING. Fig. 4.

Men noemt *cirkel* eene ruimte door ééne éénige kromme lijn [ABDEF] besloten, welke de *omtrek des cirkels* genoemd wordt, en zoodanig gesteld is, dat alle de lijnen [AC, BC, DC, EC, FC] die men uit alle de stippen van denzelven trekt tot zeker stip (C) binnen den cirkel gelegen, en waarin zij derhalven samenkomen, gelijk zijn. Dit stip (C) wordt het *middelpunt* des cirkels genoemd: de gemelde lijnen [CA, CB, CD, CE, CF] welke daaruit naar den omtrek [ABDEF] getrokken worden, dragen den naam van *stralen*, of *radii*. Die van *diameter*, of *middellijn*, wordt aan de lijn [ACE] gegeven, welke, door het middelpunt [C] gaande, den omtrek wederzijds raakt. Deelen des omtreks [gelijk BD, DEF enz.] worden *cirkel-bogen* genoemd.

EUCL. I. Bep. 15, 16, 17. — St. I. Bep. 9, 10, 11. — L. G. II. Bep. 1, 2, 3.

GEVOLG.

Iedere straal is de helft van eene middellijn: waarom de stralen ook *halve middellijnen* genoemd worden.

IV. VOORONDERSTELLING.

Men vooronderstelt dat het mogelijk is uit een gegeven stip, als middelpunt, en met een' bepaalden straal, of *radius*, eenen cirkel te trekken.

EUCL. I. *Post.* 3.

AANMERKING. Gelijk men, om eene regte lijn te trekken, in de praktijk geen ander werktuig behoeft dan een *liniaal* en eene *trekpen*: zoo ook om eenen *cirkel* te trekken heeft men niets noodig dan een *passer*. Vermits men nu, gelijk reeds gezegd is, [Bep. IV. Aanm. 2.] in de *Elementaire Geometrie* niets anders dan regte lijnen, mitsgaders de figuren uit dezelve samengesteld, en cirkels beschouwt; zegt men, dat er, om alles te bewerken wat daarin te verrigten valt, geene andere werktuigen vereischt worden dan een liniaal, een passer, en eene trekpen.

IV. AXIOMA. Fig. II.

Indien men uit de twee uiteinden [A en B] van eene lijn, als middelpunten, twee cirkels trekt met een' en den zelfden straal [AB, BA] welke gelijk is aan die lijn, of grooter dan dezelve; zullen die cirkels [CBGED, en ACFG] elkander [in C en G] snijden.

I. AANMERKING. Men kan thans het 1 en 2 Werkstuk van het I. Boek oplossen.

II. AANMERKING. EUCLIDES heeft wel dit voorstel niet met zoo vele woorden uitgedrukt; doch hij gebruikt het, klaarblijkelijk, in de bewerking van het 1, 2 en 3 Voorstel van zijn eerste Boek.

III. AANMERKING. Wij stellen dit Voorstel onder de *Axiomata* om dat het van zelf blijkbaar is. WOLF heeft er in zijne *Elementa Matheseos* I. Deel, §. 197. *Elem. Geom.* een bewijs van gegeven: het geen hier op neer komt, dat de cirkels zich snijden om dat het middelpunt van den eenen binnen den omtrek van den anderen valt.

IV. AANMERKING. Indien men tot straal eene lijn gebruikte die korter ware dan AB, zouden de cirkels zich wel snij-

 den,

den, zoo lang die lijn grooter is dan de helft van A B: indien zij gelijk was aan die helft, zouden de cirkels zich slechts op de lijn zelve aanraken: zoo kleiner, zouden de cirkels zich noch raken, noch snijden, maar geheel van elkander afstaan.

VI. BEPALING.

Men noemt *oppervlakte* eene ruimte die men alléén met betrekking tot lengte en breedte beschouwt, zonder op de *dikte* te letten, maar, in tegendeel, dezelve aftrekkende.

I. AANMERKING. Van daar de spreekwijze der Wiskundigen, dat de oppervlakte alléén uit *lengte* en *breedte* bestaat, zonder *dikte*.

EUCL. I. Bep. 5. — St. I. Bep. 3. — L. G. I. Bep. 5.

GEVOLG.

De uiteinden eener oppervlakte zijn lijnen: het zij regte, het zij kromme lijnen.

EUCL I Bep 6. — St. I. Bep. 3.

II AANMERKING. Sommigen beschouwen de oppervlakte als door den voortgang eener lijn geboren: als het *spoor*, of de *moet*, die eene bewogen lijn zoude nalaten.

VII. BEPALING.

Een *Vlak*, of *effen* oppervlakte, of *platte* oppervlakte, is eene zoodanige, welke overal gelijkelijk tusschen hare uiteinden ligt.

EUCL. I. Bep. 7. — L. G. I. Bep. 6.

I. AANMERKING. Anderen bepalen het *Vlak* aldus: eene oppervlakte, welke eene regte lijn in alle hare deelen kan raken: op welke eene regte lijn geheel past en sluit.

Zie CLAVIUS op de 7 Bep. van het I. Boek van EUCLIDES. — St. I. Bep. 6.

II. AANMERKING. Wij zijn hier wederom in het geval, waarvan wij in de II. Aanmerking van onze III Bepaling gewag gemaakt hebben.

III. AANMERKING. Men merke eens vooral op, dat alle de deelen van de figuren, die in de negen eerste Boeken voorkomen, vooronderosteld worden voor iedere figuur, of samenstel.

ftelling, in een en het zelfde vlak te liggen, zoo dat alle de figuren *vlakke figuren* zijn.

VIII. BEPALING. Fig. 5.

De onderlinge helling van twee lijnen [DB en EB] die in het zelfde vlak gelegen zijn, en verlengd worden, tot dat zij elkander in eenig ftip [B] fnijden, of ontmoeten, wordt *vlakke hoek* genoemd. Die hoek is regtlijnig, zoo de lijnen, die denzelven uitmaken, regt zijn.

Het ftip [B], waar de beide lijnen elkander ontmoeten, of waarin zij zich fnijden, wordt de *kruin*, of de *top*, van den hoek genoemd: de lijnen zelve [BD, BE] zijn de *beenen* van den hoek.

EUCL. I. Bep. 8 en 9 — St. I. Bep. 13. — L. G. I. Bep. 9.

I. AANMERKING. Wanneer een hoek met letters wordt uitgedrukt, gebruikt men daartoe, of drie letters, of ééne letter: als men er ééne gebruikt, is het altijd de letter die aan den top ftaat; als men er drie gebruikt, ftelt men altijd de letter van den top in het midden; dus wordt de hoek in fig. 5. of hoek DBE, of wel enkel hoek B, genoemd. Als een hoek, gelijk in fig. 5., alleen ftaat, gebruikt men meest enkel de top-letter: maar wanneer, gelijk in fig. 7, verfcheide lijnen AB, EB, DB, FB, CB in een ftip B famen komen, en dáár verfcheide hoeken maken, moet men noodzakelijk drie letters gebruiken, en zeggen de hoeken ABE, EBD, DBF, FBC: of wel, men ftelt in zoodanig geval een klein lettertje *m*, *n*, *p*, *q*, in ieder der hoeken digt bij de kruin, en noemt iederen hoek naar het lettertje dat er in ftaat, hoek *m*, hoek *n* enz.

II. AANMERKING. Daar de hoek de helling van twee lijnen is; volgt het, dat de grootte van den hoek alléén uit de grootte van die helling, en geenszins uit de lengte der *beenen* van denzelven, moet beöordeeld worden. Of de beenen lang of kort zijn, of zij meer of min verlengd worden, blijft hunne helling, en dus de hoek dien zij maken, de zelfde: in fig. 5 is hoek DBE de zelfde hoek als IBK.

III. AANMERKING. Men beoordeelt de gelijkheid van twee hoeken uit derzelver overeenkomst. Zij zijn namelijk gelijk, indien, wanneer men vooronderftelt, dat [fig 5 en 6] de beide toppen F en B op elkander, en een been [FN] van den éénen hoek langs een been [EB] van den anderen, gelegd zijnde, het tweede been [CF] van den eerstgemelden, met het tweede been [DB] van den laatstge-

melden, overeenkomt, en dus de zelfde helling heeft. Zoo dit geen plaats heeft, zal die hoek de grootste zijn, wiens tweede been buiten het tweede been van den anderen valt, gelijk in fig. 8, hoek DBE grooter is dan hoek DBC; en hoek EBF kleiner is dan hoek CBF.

Dit is het oorspronkelijk denkbeeld, en de natuurlijke maat, van de gelijkheid of ongelijkheid van hoeken. De *zwaai* der Timmerlieden steunt op dat grondbeginsel. En het is daarop, en *daarop alléén*, dat de Wiskundigen alles bouwen, wat zij van de gelijkheid of ongelijkheid van verschillende hoeken bewijzen.

IV. AANMERKING. Er zijn er, die willen, dat men in de vergelijking van twee hoeken dus te werk gaa: dat men namelijk [fig. 5 en 6.] van de beenen gelijke deelen BI, BK, LF, MF afsnijde; met dezelven als *stralen*, uit de toppen B en F, cirkelbogen IK, LM beschrijve: en dat men dan uit de gelijkheid of ongelijkheid der ruimten IBK, LFM over de gelijkheid of ongelijkheid der hoeken oordeele. Zie D'ALEMBERT, *Melanges*, V. Deel, p. 207. en p. 38. Doch men moet met het denkbeeld van een hoek, welke enkel in de helling van twee lijnen bestaat, dat van eene ruimte, die tusschen drie lijnen begrepen is, niet verwarren. Ook niet met dat van eenigen boog IK dien men als maat van den hoek aanneemt. [St. I. Bep. 14.] Wij zullen, wel is waar, in het eerste en tweede Voorstel van ons VIII Boek bewijzen, dat de cirkelbogen eene eigenaartige maat voór hoeken opleveren: doch ik twijfel of dit grondbeginsel wel als een *eerste grondbeginsel* kan beschouwd worden: vooral wanneer men tevens het denkbeeld van *graden* waarin de omtrek des cirkels verdeeld wordt, voegt bij dat van den boog waar door men zegt den hoek te meten, dat is, bij dat van den hoek zelven.

I. AFDEELING.

OVER DE REGTE LIJNEN OP ZICH ZELVE BESCHOUWD.

I. VOORSTEL.

Wanneer eene lijn [EB) op eene andere [DF) in het zelfde vlak gelegen, in eenig ſtip [B] invalt, maakt zij om dat ſtip [B] twee hoeken, [EBF en EBD] die of onderling gelijk zijn [fig. 9.) of ongelijk [fig. 8.)

AANMERKING. Dit voorſtel is, in de daad, een *Axioma*. De voorwaarde *in het zelfde vlak gelegen*, is hier, duidelijkheids halve, nog eens bij gevoegd: maar zij moet, gelijk reeds gezegd is (Bep. VII. Aanm. 3.) voor alle de voorſtellen in de negen eerſte Boeken, ſtilzwijgend vooronderſteld worden.

IX. BEPALING. Fig. 9.

Wanneer eene lijn [EB] zoodanig op eene andere lijn [DF] invalt, dat zij ter wederzijde van het ſtip [B] van invalling *gelijke hoeken* [EBD, EBF] maakt, worden die hoeken *regte hoeken* genoemd: de invallende lijn [EB] wordt gezegd *loodregt* op de andere [DF] te ſtaan, en draagt den naam van *loodregte*, of *perpendiculaire*, lijn.

Een hoek [EBD fig. 8.] die grooter is dan een *regte* hoek [DBC] wordt *ſtompe*, of *plompe* hoek genoemd: en een hoek [EBF] die kleiner is dan een regte [CBF] wordt *ſcherpe hoek* genoemd.

EUCL. I. Bep. 10, 11, 12. — St. I. Bep. 15, 16, 17. — L. G. I. Bep. 10, 11,

AANMERKING. Uit deze bepaling van den regten hoek volgt dit *Axioma*.

V. AXIOMA.

Wanneer een ſtip [A fig. 18.] buiten eene lijn [ID], of derzelver verlenging, gegeven is: zal er onder de menigvuldige lijnen die men uit dat ſtip [A] op die lijn [ID] trekken kan, zeker eene zijn [AB] die loodregt op dezelve valt: en insgelijks onder de menigvuldige lijnen [BC, BE, fig. 8.) die men uit een gegeven ſtip

[B] van eene gegeven lijn [DF] trekken kan, zal er eene [BC] zijn welke op die lijn loodregt staat.

AANMERKING. Dat er uit een stip in eene gegeven lijn maar éénе éénige loodregte op die lijn gerigt kan worden, zal in Voorstel II. Gev. 2. bewezen worden: dat er insgelijks uit een stip buiten eene lijn, maar éénе éénige loodregte op die lijn vallen kan zal bewezen worden in het XI. Voorstel.

II. VOORSTEL. Fig. 9 en 10.

Alle regte hoeken zijn onderling gelijk.

L. G. I. 1.

VERKLARING. De vraag is hier niet of, wanneer de lijn EB [fig. 10.] loodregt valt op de lijn AI, de hoek ABE gelijk is aan den hoek EBI? en of, wanneer de lijn EB [fig. 9.] loodregt valt op de lijn DF, de hoek DBE gelijk is aan den hoek FBE? want de gelijkheid dier hoeken levert de bepaling op van loodregte lijnen [Bep. 9.]: Maar de vraag is, of de hoek ABE [fig. 10.] welke door de loodlijn BE gevormd en *regt* genoemd wordt, gelijk is aan den hoek EBD [fig. 9.] die door de loodlijn EB gevormd, en ook *regte hoek* genoemd wordt?

BEWIJS. Men onderstelle dat de fig. 9. op de fig. 10. zoodanig geplaatst worde, dat het stip B op B en de lijn BE op BE valle. Ik zeg dat de lijn DF op de lijn AI vallen zal. Zoo iemand het lochent, onderstelle hij dat de lijn DBF niet op de lijn ABI valle, maar van dezelve verschillende zij: dan is ∠ DBE > ∠ ABE, en derhalve is de gelijke ∠ EBF ook > ABE: maar ∠ ABE = ∠ EBI [Bep. 9.]: gevolglijk ∠ EBF ook > EBI: dat onwaar is, want hij is kleiner [Bep. VIII, Aanm. 3.], dus is het onwaar dat de lijn DF niet op AI valt: derhalve is het waar dat DF op AI valt: en gevolgelijk ook dat ∠ DBE = ∠ ABE : en ∠ EBF = ∠ EBI.

AANMERKING. EUCLIDES heeft die gelijkheid der regte hoeken, als eene zaak welke van zelf spreekt, aangenomen: doch PROCLUS heeft, te regt, beweerd, in zijne aanmerkingen op dien Schrijver, dat de zaak bewezen moest worden. Men zie denzelven, zoo als ook CLAVIUS in zijne Aanmerkingen op het 12 *Axioma* van het I. Boek van EUCLIDES.

I. GEVOLG.

Daar dan de regte hoeken allen aan elkander gelijk zijn, en dus eene bepaalde en bestendige grootte hebben, le-

levert die hoek eene eigenaartige *maat* op, welke tot het bepalen der grootte van alle andere hoeken zal kunnen dienen.

II. GEVOLG.

Uit een ſtip B van eene regte lijn DF, kan maar eene loodlijn BC [fig. 8.] opgerigt worden.

St. I. 1. Gev. 1.

III. VOORSTEL. Fig. 8 en 9.

Wanneer eene regte lijn [BE] op eene andere [DF] invalt, en dezelve in eenig ſtip [B] ſnijdt, maakt zij om dat ſtip, of twee regte hoeken [DBE en EBF, fig. 9.] of twee hoeken [DBE en EBF, fig. 8.], die, te ſamen genomen, gelijk zijn aan twee regte hoeken.

EUCL. L. 13. — St. I. 1. — L. G. I. 2.

BEWIJS. Voor het eerſte geval, wanneer de lijn EB [fig. 9.] gelijke hoeken DBE en EBF maakt, blijkt de zaak uit Bep. 9.

In het tweede geval [fig. 8.], wanneer de lijn EB ſchuins invalt, en dus niet loodregt ſtaat, maar ongelijke hoeken DBE en EBF maakt, ſtelle men [*Axioma* 5.] dat de lijn BC loodregt zij. Dan wordt het bewijs ontleend uit de beſchouwing dat de ſom der hoeken DBE en EBF gelijk is aan de ſom der twee regte hoeken DBC en CBF.

GEVOLG. Fig. 7.

Alle de hoeken [ABE, EBD, DBF, FBC] welke om een en het zelfde ſtip [B], en aan den zelfden kant van eenige lijn [AC], door zoo vele lijnen [EB, DB, FB] als men wil gevormd worden, zijn te ſamen genomen gelijk aan twee regte hoeken.

L. G. I. 2. Gev. 3.

IV. VOORSTEL. Fig. 12 en 13.

Indien twee regte lijnen [AB en BC] eene derde [DB] in het zelfde ſtip [B] ontmoeten, zoodanig dat zij met dezelve twee hoeken maken [ABD en DBC] die, te ſamen genomen, gelijk zijn aan twee regte hoeken; zullen die twee regte lijnen [AB, BC] maar eene en de zelfde regte lijn [AC] uitmaken.

EUCL. L. 14. — St. I. 1. Gev. 3. — L. G. I. 4.

BEWIJS. Het wordt afgeleid uit de ongerijmdheid waarin men vervalt, met het tegendeel te stellen, en te beweren, dat niet AB de verlenging van BC is, en met deze maar ééne lijn AC uitmaakt [fig. 12.], maar dat EB [fig. 13.], bij voorbeeld, de verlenging van BC zoude zijn en CB, BA twee lijnen zouden uitmaken. De ongerijmdheid is uit het III. Voorstel blijkbaar.

AANMERKING. Dit Voorstel is het *omgekeerde* van het voorgaande. Niet alle Voorstellen kunnen omgekeerd worden, of zijn, gelijk men zich in de redeneerkunde uitdrukt, *omgekeerd* waar. Wij zullen het altijd doen opmerken, wanneer die omkeering plaats heeft.

V. VOORSTEL. Fig. 3.

Indien twee lijnen [AB, CE] elkander in een stip [D] snijden, zullen de tegenoverstaande of *schriks-hoeken* die om dat stip [D] gevormd worden. [ADE en CDB; ADC en EDB] aan elkander gelijk zijn: en de vier hoeken zullen; te samen genomen, gelijk zijn aan vier regte hoeken.

EUCL. I. 15. — St. I. 2. — L. G. I. 5.

BEWIJS. Uit Voorstel III..

AANMERKING. Het eerste gedeelte van dit Voorstel komt mij voor geen bewijs noodig te hebben, en onder de algemeene kundigheden gesteld te moeten worden, daar AD en DE, als zijnde de verlengingen van BD en CD, noodwendig de zelfde onderlinge helling hebben, als deze, en dus eenen even grooten hoek maken.

GEVOLG. Fig. 7.

Alle hoeken, die om één stip gemaakt kunnen worden, door zoo vele regte lijnen men wil., zijn te samen genomen gelijk aan vier regte hoeken.

St. I. 2. Gevolg 1. — L. G. I. 5. *Scholie.*

VI. VOORSTEL. Fig. 14.

Indien eene regte lijn [CK] twee andere regte lijnen [AD en GE] zoodanig mogt komen te snijden [in B en in F] dat de uitwendige hoek [CBA] aan den eenen kant gelijk ware aan den tegenovergestelden inwendigen [CFG] aan den zelfden kant; zal ook de andere uitwendige hoek [GFK] aan den zelfden kant gelijk

zijn

zijn aan zijnen tegenovergestelden inwendigen [ABK]: en de uitwendige hoeken [CBD en EFK] aan den anderen kant zullen ook gelijk zijn aan hunne tegenovergestelde inwendigen [CFE en DBK] aan dien kant, ieder aan ieder.

BEWIJS: Uit Voorstel III.

X. BEPALING. Fig. 14.

Regte lijnen [AD, GE] worden gezegd aan elkander *parallel* of *evenwijdig*, te zijn, als zij, ten opzigte van eene derde lijn [CK] die haar snijdt de zelfde helling hebben: d. i. met deze eenen uitwendigen hoek [CBA] aan eenen kant, gelijk maken aan den tegenovergestelden inwendigen [CFG] aan den zelfden kant.

I. AANMERKING. Het zesde Voorstel toont aan dat het onverschillig is aan welken kant men de hoeken neme die men zegt gelijk te zijn. (t. w. of CBA en CFG: of GFK en ABK: of CBD en CFE: of EFK en DBK).

I. GEVOLG.

Wanneer twee, of meer, regte lijnen onderling evenwijdig zijn, zal de lijn die eene derzelve snijdt, ook (des noods verlengd zijnde) alle de andere, (des noods verlengd) snijden.

II. AANMERKING. EUCLIDES heeft wel dit gevolg niet uitdrukkelijk voorgedragen, maar hij gebruikt het, niet te min, stilzwijgend, op verscheide plaatsen: gelijk in de bereiding van het 30 en 31 Voorstel van zijn eerste boek. Zie de aanmerkingen van KOENIG op het 27 Voorstel. Misschien echter volgt die stelling niet zoo onmiddelijk uit de bepaling welke EUCLIDES van de evenwijdige lijnen gegeven heeft.

III. AANMERKING. Het valt niet gemakkelijk een waar en eenvoudig denkbeeld van evenwijdige lijnen te geven. Daar over zijn, in vroegere en latere dagen, geheele boekdeelen geschreven, die het noodeloos zoude zijn hier aantehalen. Men kan zich vergenoegen met D'ALEMBERT, *Mélanges de Philosophie*, V. Deel, p. 202, gelijk mede TACQUET en CLAVIUS, in hunne verklaringen over de 34ste bepaling des eersten boeks van EUCLIDES te raadplegen. Ik heb die bepaling voorgedragen welke mij voorkomt de eenvoudigste en meest juiste te zijn, en die tevens toelaat, om alle de eigenschappen der evenwijdige lijnen te bewijzen, zonder, gelijk EUCLIDES gedaan heeft, de eigenschappen der driehoeken interoepen.

IV. AANMERKING. EUCLIDES geeft (I. B. Bep. 35.) deze bepaling van de evenwijdige lijnen: „ het zijn lijnen die, in het zelfde vlak „ gelegen, en in het oneindige verlengd, elkander nimmer snijden."

„ den." Ik twijfel of het denkbeeld van eene *verlenging in het oneindige*, en van *nimmer* te snijden, voor een eerst grondbeginsel duidelijk genoeg zij: wij zullen in het Gevolg van het X. Voorstel bewyzen, dat die eigenschap van zich nimmer te snijden, ook uit onze bepaling der evenwijdige lijnen volgt.

L. G. I. Bep, 12.

V. AANMERKING. Anderen geven deze bepaling: evenwijdige lijnen zijn die, welke altijd even ver van elkander afstaan, dat is, die zoodanig zijn, dat alle loodlijnen [BL, CK, DI, fig. 15] tusschen dezelve getrokken, gelijk zijn. Wij zullen in het XIII. Voorstel bewijzen, dat dit ook uit onze bepaling volgt: doch wij behooren te doen opmerken, dat deze bepaling niet doorgaat, ten zij men te voren bewezen hebbe, of vooronderstelle, dat de afstand van eenig stip [B] tot eene regte lijn [MG], door de loodlijn [BL] moet gemeten worden.

St. I. Bep. 27.

II. GEVOLG. Fig. 14.

Eene lijn [GE] en een stip [B] gegeven zijnde, kan men altijd vooronderstellen dat er eenige lijn [BD] door dat stip [B] gaat welke aan de gegeven lijn [GE] evenwijdig is.

BEWIJS. Indien men door het stip B eene lijn CBK naar welgevallen trekt, welke de lijn GE snijdt, en derhalven met haar eenen hoek CFE maakt: zal er onder alle de lijnen welke men uit B trekken kan, noodzakelijk eene zijn, waar mede de lijn CK eenen hoek CBD maken zal gelijk aan den hoek CFE.

Hoe men eene zoodanige evenwijdige lijn trekken kan, is het onderwerp van het VI. werkstuk des eersten boeks: en zal naderhand geleerd worden.

AANMERKING. Op deze onze bepaling steunt de wijze door velen gebruikt, om door middel van twee *linialen* evenwijdige lijnen te trekken: Immers, indien men het liniaal NH [fig. 49.] met den kant NI tegen de lijn legt, waaraan men evenwijdigen trekken wil, en men stelt den kant OH van het liniaal OI, tegen IH: zal het liniaal NH, langs den kant OH zich zoodanig bewegen, dat het daar mede bestendig gelijke hoeken maakt aan den zelfden kant, dat is, zich evenwijdig aan zich zelven beweegt.

VII. VOORSTEL. Fig. 14.

Wanneer eene regte lijn (CK) twee evenwijdige regte lijnen [AD, GL] snijdt, zijn 1°. de *overhandsche*, of *verwisselende* hoeken [ABF en BFL, of DBF en BFG] onderling gelijk: en 2°. de twee inwendige hoeken, die

aan

aan den zelfden kant ſtaan [ABF en GFB, of DBF en BFL] zijn te ſamen genomen gelijk aan twee regte hoeken.

EUCL. I. 29. — St. I. 12. — L. G. I. 23.

BEWIJS. Voor het eerſte uit den aard der evenwijdige lijnen; d. i. uit Bepaling X, bl. 13. en uit Voorſtel V.

Voor het tweede, uit Bepaling X, en Voorſtel III.

GEVOLG. Fig. 15.

Regte lijnen [BL, CK, DI], welke op de eene [AF] van twee evenwijdige lijnen [AF, MG] loodregt ſtaan, ſtaan ook loodregt op de andere [MG].

St. I. 12. Gev. 1.

VIII. VOORSTEL. Fig. 14.

Indien eene regte lijn [CK] twee andere [AD, GL] zoodanig ſnijdt, dat de overhandſche hoeken [ABF en BFL of CBD en GFK] onderling gelijk zijn: of dat de *ſom* der beide inwendige [ABF en GFB of BFL en FBD] aan den zelfden kant genomen, gelijk is aan twee regte hoeken; zijn die twee lijnen [AD, GL] evenwijdig.

EUCL. I. 27 en 28. — St. I. 12. Gev. 3.

BEWIJS. Voor het eerste uit de onderſtelling, Voorſtel V. en Bepaling X.

Voor het tweede, uit de onderſtelling, Voorſtel III. en bepaling X.

AANMERKING. Dit Voorſtel is het omgekeerde van het voorgaande: en het kan ook, gelijk, meestal, voor de omgekeerde voorſtellen plaats heeft, uit het ongerijmde bewezen worden: want indien AD niet evenwijdig is aan GL, zal eenige andere lijn HI, door het ſtip B gaande, evenwijdig aan GL zijn [Bep. X. Gev. 2.], doch dan vervalt men (door Voorſtel VII.) in de ongerijmdheid dat ∠ HBF = ∠ ABF zoude zijn,

GEVOLG. Fig. 15.

Regte lijnen [BL, CK, DI] welke loodregt ſtaan op eene en de zelfde lijn [AF] zijn onderling evenwijdig.

IX. VOORSTEL. Fig. 16.

Zoo twee, of meerdere, regte lijnen [CD, EF] aan eene

eene en de zelfde regte lijn [AB] evenwijdig zijn, zijn zij onderling evenwijdig.

EUCL. I. 30. — L. G. I. 24.

BEREIDING. Men trekt naar willekeur de lijn GL die de lijnen AB, CD, EF, in H, I en K snijdt.

BEWIJS. Uit Bepaling X. Gevolg 1.

X. VOORSTEL. Fig. 14.

Indien eene lijn [CK] twee andere regte lijnen [HI en GL] zoodanig snijdt, dat de beide inwendige hoeken [IBF en BFL] aan den zelfden kant, te samen genomen, kleiner zijn dan twee regte hoeken: zullen 1°. die twee lijnen [HI en GL] niet evenwijdig zijn aan elkander: en 2°. zij zullen, des nood's verlengd zijnde, elkander ergens [in E] naar dien kant, snijden, of ontmoeten.

L. G. I. 22.

BEWIJS. Voor het I. Zoo het onwaar is, dat HI en GL niet evenwijdig zijn aan elkander; is het waar dat zij onderling evenwijdig zijn: en derhalven [Voorst. VII.] dat ∠ IBF + ∠ BFL = 2 L dat ongerijmd is, om dat het tegengestelde vooronderstelд wordt.

Voor het II. Vermits (door het eerste) HI niet evenwijdig is aan GE, gaat er door B eenige andere lijn AD die aan GE evenwijdig is [Bep. X. Gev. 2.]. Dan snijdt HI de lijn AD: gevolglijk ook de evenwijdige GL [Bep. X. Gev. 1.], dat is HI en GL ontmoeten elkander ergens in E.

AANMERKING. EUCLIDES heeft dit voorstel onder de algemeene kundigheden gesteld: het is namelijk bij hem de elfde: doch het behoort niet tot die klasse: Zie KOENIG op die plaats en op het 27 Voorstel van het I Boek, en TACQUET op het 31. MONTUCLA (*Hist. des Mathem.* I. p. 209.) gist, te regt, dat dit *Axioma*, door onnaauwkeurigheid der oude Copisten, uit zijne ware plaats is gerukt, en dat het eene gevolgtrekking geweest is uit het 28 Voorstel. NASSAREDDIN-AL-TUSSI heeft dit *Axioma* in zijne Arabische uitlegging van EUCLIDES, welke te Romen is uitgegeven, bewezen: WALLIS heeft eene Latijnsche vertaling van dat bewijs in zijne *Opera Mathematica*, *Vol.* II. bl 667 en 672 geplaatst en er eene andere van zich zelven, mitsgaders vele aanmerkingen op dit onderwerp, bijgevoegd. Men raadplege ook over dat bewijs, en over de leer der evenwijdige lijnen, de Verhandelingen van CASTILLON, in de *Memoires de l'Académie de Berlin*, voor de jaren 1786 en 1788.

I. GEVOLG. Fig. 14.

Evenwijdige lijnen ſnijden, of ontmoeten, elkander nimmer.

BEWIJS. Zoo neen, laten de lijnen HI, GL, hoewel evenwijdig, zich in E ontmoeten. Dan maakt de lijn HIE met de lijn GLE, in het ſtip E, eenen hoek HEG: men neme in de lijn HE een ſtip B, naar welgevallen; dan zal er, onder alle de lijnen welke uit B getrokken kunnen worden, éénе zijn die in B met BE eenen hoek maakt gelijk aan den hoek BEF: zij ABD die lijn, zoo dat $\angle$ DBE = $\angle$ BEF: dan is [door Voorſt. VIII.] AD // GE: en derhalve 1°. $\angle$ DBF + $\angle$ BFE = 2 L. maar om dat, door de onderſtelling, HE // GE, is [Voorſt. VII.] 2°. $\angle$ EBF + $\angle$ BFE = 2 L: derhalve 3°. $\angle$ DBF + $\angle$ BFE = $\angle$ EBF + $\angle$ BFE: en dus $\angle$ DBF = $\angle$ EBF, dat valsch is. Het is dus onwaar dat de lijnen HI en GL, zoo zij onderling evenwijdig zijn, zich ergens ontmoeten. Zij ontmoeten zich derhalve nimmer.

AANMERKING. Het blijkt dan dat de bepaling welke EUCLIDES van de evenwijdige lijnen gegeven heeft (X. Bep. Aanm. 4. bl. 13.) een gevolg wordt van de onze.

II. GEVOLG. Fig. 14.

Twee lijnen [AD, GL] die elkander nimmer ontmoeten, of ſnijden, zijn evenwijdig.

BEWIJS. Zoo neen, d. i. zoo AD niet // GL, is niet $\angle$ DBF + $\angle$ BFL = 2 L [Voorſtel VII.], maar of >, of < 2 L. Zoo $\angle$ DBF + $\angle$ BFL > 2 L, is [Voorſt. III.] $\angle$ ABF + $\angle$ BFG < 2 L, en derhalven zouden (door dit Voorſtel) AD en GL zich naar dien kant ontmoeten, dat tegen de onderſtelling ſtrijdt, en dus ongerijmd is. Zoo $\angle$ DBF + $\angle$ BFL < 2 L, zouden AD en GL zich naar den kant van L ſnijden: dat insgelijks tegen de onderſtelling ſtrijdt, en dus ongerijmd is.

AANMERKING. Het blijkt dan dat ook onze bepaling uit die van EUCLIDES volgt.

III. GEVOLG. Fig. 14.

Indien uit twee ſtippen [F en B] van eene en de zelfde lijn BF, twee lijnen [FE en BE] getrokken worden, die el-

kander ergens [in E] ontmoeten, zal de som der beide inwendige hoeken [EFB en FBE] die zij met de gemelde lijn BF maken, kleiner zijn dan twee regte hoeken.

BEWIJS. Immers zoo die som gelijk aan twee regte hoeken was, zouden die lijnen evenwijdig zijn [Voorstel VIII]: zoo zij grooter was zouden de lijnen zich aan den anderen kant van BF, en niet in E, ontmoeten: dat tegen de onderstelling strijdt.

AANMERKING. Dit gevolg is het omgekeerde van het voorstel.

XI. VOORSTEL. Fig. 17.

Indien verscheide regte lijnen [AB, AC, AD], uit een en het zelfde stip [A] getrokken, op eene regte lijn [EF] invallen, kan er maar ééne derzelve [stel AB] loodregt zijn: 2°. de overige zullen, met de gegeven lijn [EF] ten opzigte der loodlijn [AB] des te kleiner scherpe inwendige [ACB en ADB] en des te grooter stompe uitwendige hoeken [ACF en ADF] maken, dat de gemelde lijnen zich meer van de loodlijn verwijderen: 3°. de loodlijn is de kortste van alle die lijnen: de overige zijn des te langer dat zij verder van de loodlijn afstaan.

L. G. I. 15, 16.

BEWIJS. Voor het I. Uit Voorstel X Gev. 3. is, zoo ∠ ABC regt, ∠ ACB, of ∠ ADB noodzakelijk kleiner dan regt of [Bepaling IX.] scherp: en dus [uit Voorstel III.] ∠ ACF of ∠ ADF grooter dan regt, of stomp.

Voor het II. Zij ID // AC: dan is ∠ IDB = ∠ ACB [Bep. X.]: derhalve is ∠ADB die < is ∠IDB, ook < ACB: en gevolgelijk [uit Voorstel III.] ∠ ADF > ∠ ACF.

Voor het III: BEREIDING. Zij CG ⊥ op AC en CH ⊥ op AC: dan zal, om dat ∠ ACB scherp is [uit het I.] en ∠ ACG = L, de lijn CG onder CB vallen, en dus AB verlengd ontmoeten: en om dat ∠ ACD stomp is, en dus > ∠ ACH die regt is, zal CH op AD tusschen A en D vallen.

BEWIJS. AC is of = AB, of < AB, of > AB: zoo AC = AB, is om de zelfde reden AG = AC: en dus AG = AB: dat valsch is. Zoo AC < AB, is, om de zelfde reden, AG < AC en dus AG < AB: dat valsch is. Daar dan AC noch = AB, noch < AB, is AC > AB. Dan is ook AH > AC, en dus AD > AC.

I.

I. GEVOLG. Fig. 17.

De loodlijn [AB] uit eenig ftip [A] op eene lijn [EF] nedergelaten, is de eigenaartige maat des afftands van dat ftip tot die lijn.

St. I. Bep. 26.

Immers de kleinfte zijnde van alle de lijnen die nedergelaten worden, heeft zij eene bepaalde grootte, en dus het vereischte om tot maat te dienen: daar alle de andere lijnen grooter of kleiner zijn, naar mate van de hoeken onder welke zij invallen.

II. GEVOLG. Fig. 18.

Er kunnen uit eenig ftip [A] op eene lijn EF aan den zelfden kant van de loodlijn geen twee lijnen getrokken worden die aan elkander gelijk zijn: maar wel twee [AC en AI] gelijke, waar van de eene aan den eenen de andere aan den anderen kant van de loodlijn valt; deze maken gelijke hoeken [IAB en CAB] met de loodlijn, en ook gelijke hoeken [AIB en ACB] met de lijn waarop zij vallen.

BEWIJS. Indien men uit A met den *radius* AC eenen cirkelboog trekt, die de lijn EF in I fnijdt, en dan de lijn AI trekt, is AI = AC.

Indien men zich verbeeldt de lijn BC op te tillen, en langs BI te leggen, blijvende B in B, en BA op BA vallen, zal het ftip C op I vallen: want viel het tusfchen I en B, zoude de lijn AC korter, en zoo voorbij I zoude zij langer zijn dan AI, (door dit Voorftel) daar echter AC = AI [Ber.]. Zoo nu C op I valt, is BI = BC; en valt AC op AI, dan is ∠ IAB = ∠ CAB en ∠ AIB = ∠ ACB.

I. AANMERKING. Men is nu in ftaat om het 3 en 4 werkftuk van het I. Boek op te losfen.

II. AANMERKING. De drie leden van dit Voorftel, en deszelfs twee gevolgen, kunnen ook uit de leer der driehoeken bewezen worden, en worden het doorgaans: men zie hier onder Voorftel XVII. de Aanmerking, en Voorftel XXVII. Gev. 4. Aanmerking 3, welke uit andere gronden, dan dit Voorftel, bewezen worden.

XII. VOORSTEL. Fig. 19.

Indien twee regte lijnen [AC, AB] elkander in eenig ftip [A] ontmoeten of fnijden: ftaan de verfchillende ftippen [H, F, D, C] van de eene lijn [AC] des te verder

 van

van de andere lijn [AB] af, dat zij meerder van het ſtip van ontmoeting [A] verwijderd zijn.

CLAVIUS op EUCLIDES I. 28. — Vergelijk L. G. I. 20.

UITLEGGING. Daar wij nu weten [Voorſtel XI. Gev. 1.] dat de afſtand van een ſtip tot eene lijn door de loodlijn uit dat ſtip op de gemelde lijn nedervallende gemeten wordt, moet men bewijzen dat die loodlijnen (ſtel HI, FG, DE, CB) grooter en grooter worden naar mate de ſtippen H, F, D, C verder van A afſtaan.

BEWIJS. Zoo dit Voorſtel al niet als *Axioma* mag beſchouwd worden; zij HI eene ⊥ op AB, en HG eene ⊥ op AC, en GF ⊥ op AB, en FE ⊥ op AC en ED ⊥ op AB, en DB ⊥ op AC en BC ⊥ op AB: dan is door Voorſtel XI. N°. 3.: BC > DB > DE > FE > FG > HG > IH.

XIII. VOORSTEL. Fig. 15.

Twee regte lijnen die onderling evenwijdig zijn, [AF, MG] ſtaan altijd op den zelfden afſtand van elkander: *dat is*, de loodlijnen [ſtel BL, CK; DI] tusſchen en op dezelve getogen, zijn onderling gelijk.

L. G. I. 25.

UITLEGGING. De reden van de woorden *dat is* ligt in het I. Gevolg van het XI. Voorſtel.

BEWIJS. Indien de ⊥⊥ BL en CK niet gelijk aan elkander zijn, zij eene derzelve bijv. CK grooter dan BL; zij dan het ſtuk KO = BL. Men trekke door B en O de lijn BO. Om dat BO binnen den ∠ LBC valt die regt is, is ∠ LBO < L en dus ∠ BLQ + ∠ LBO < 2 L: en derhalve ontmoet de lijn BO verlengd de lijn MG ergens in Q [door X.]: derhalven moet OK < LB zijn [Voorſt. XII.) dat ſtrijdt met de onderſtelling: dat OK = LB, en dus onmogelijk is: het is dan onwaar dat CK < BL: en dus is CK = BL.

I. AANMERKING. Men kan thans de 2 oploſſing verrigten van het 6 werkſtuk des eerſten boeks.

II. AANMERKING. De benaming *evenwijdige lijnen*, verwekt in onze taal terſtond het denkbeeld van lijnen die altijd *even wijd*, of *even ver* van elkander ſtaan: dit denkbeeld is nu ſtrikt bewezen: hoewel het misſchien, ingewikkeld, reeds

reeds besloten lag in het denkbeeld van *zich nimmer te ontmoeten.*

III. AANMERKING. Het blijkt dat uit onzen trant van de evenwijdige lijnen te beschouwen, ook die eigenschap volgt, welke sommigen als eene bepaling van evenwijdige lijnen gegeven hebben. Zie Aanmerking V. op Bepaling X.

XIV. VOORSTEL. Fig. 15.

Indien er op eene regte lijn [MG] twee gelijke loodlijnen [LB, CK] staan, en men door derzelver uiteinden [B, C] eene regte lijn AF trekt: zal die lijn aan de eerstgemelde [MG] evenwijdig zijn.

L. G. I. 19.

BEWIJS. Zoo neen: zij eene andere lijn BO aan MG evenwijdig: dan is [Voorstel XIII.] BL = KO; en dus KO = CK, dat ongerijmd is. Gevolgelijk is niet BO, maar wel BF, aan MG evenwijdig.

AANMERKING. Dit voorstel is het omgekeerde van het voorgaande.

ALGEMEENE AANMERKING *over de leer der evenwijdige lijnen.*

Wij hebben alle de eigenschappen der evenwijdige lijnen uit de bepaling zelve afgeleid, en zonder eenige hulp van de leer der driehoeken. Sommigen, en onder dezen CASTILLON, beweren dat EUCLIDES die eigenschappen ook uit zijne bepaling afgeleid heeft: maar is het wel in de daad zoo? Dan immers zoude het eerste Voorstel (het XXVII.) waarin hij van evenwijdige lijnen handelt, zoodanig moeten geweest zijn, dat het *zich nimmer ontmoeten* van regte lijnen, die evenwijdige genoemd worden, tot grondslag gelegd zijnde, daaruit de gelijkheid der overhandsche hoeken afgeleid geworden ware: het zoude bijv. aldus hebben moeten luiden: „ Wanneer twee regte lijnen, die zich nimmer ontmoeten, door „ eene derde gesneden worden, zal deze gelijke overhandsche „ hoeken maken;" als dan zoude die eigenschap der evenwijdige lijnen uit de bepaling zelve afgeleid geworden zijn. Maar zijn XXVII. Voorstel is juist het omgekeerde hiervan: te weten: „ Indien „ eene regte lijn, eene andere snijdende, de overhandsche hoeken „ gelijk maakt, zullen die lijnen evenwijdig zijn:" d. i. zij zullen elkander nimmer ontmoeten: zoo dat het *zich niet ontmoeten* hier niet als *grondbeginsel*, maar als *besluit* uit de gelijkheid der overhandsche hoeken voorkomt. In het volgende XXVIII Voorstel wordt *het evenwijdig zijn* uit de gelijkheid der hoeken aan den zelfden kant, (d. i. in de daad uit onze bepaling) afgeleid, maar met behulp van het voorgaande XXVII.

Wel is waar dat het XXIX. Voorstel het omgekeerde is van het XXVII. en, schijnbaar, zonder behulp der voorgaande XXVIII. of XXVII. Voorstellen bewezen wordt: zoo dat EUCLIDES het zelve vóór deze zoude hebben kunnen stellen: maar dat is zoo slechts in schijn: want in het bewijs gebruikt EUCLIDES zijn XI. *Axioma*, dat

dat is ons X. Voorstel (zie de aanmerking op dat Voorstel) het welk ver af is van een *Axioma* te zijn: en, indien men het, de bepaling van EUCLIDES aangenomen zijnde, bewijzen zal, kan het niet geschieden dan door zijn XXVII. Voorstel, waarvan het een gevolg is. Zie KOENIG in zijne Aanmerkingen op dat Voorstel.

EUCLIDES schijnt, wel is waar, aldus geredeneerd te hebben: twee regte lijnen zijn onderling zoodanig gesteld dat zij zich ergens ontmoeten, en dus eenen hoek met elkander maken, of zich nimmer ontmoeten, als wanneer zij evenwijdige genoemd worden: maar ik twijfel of het denkbeeld van zich *nimmer te ontmoeten* duidelijk genoeg zij om er een grondbeginsel van te maken: en wij hebben gezien hoe EUCLIDES dit ontdoken heeft met de gelijkheid der overhandsche hoeken in plaats te stellen.

II. AFDEELING.

OVER DE ZIJDEN EN HOEKEN VAN DRIEHOEKEN EN PARALLELOGRAMMEN.

XI. BEPALING.

Men noemt *Figuur* eene ruimte die tusschen regte, of kromme, lijnen begrepen, en door dezelve besloten is.

EUCL. I. Bep. 14. — St. I. Bep. 18. — L. G. I. Bep. 13.

GEVOLG.

Twee regte lijnen kunnen nimmer eene figuur uitmaken: er worden daartoe ten minsten drie lijnen vereischt.

EUCL. I. *Axioma* 12.

AANMERKING. Wij herhalen nogmaals, het geen reeds hier boven gezegd is [Bep. VI. Aanm. 3.] dat iedere figuur altijd vooronderSteld wordt op een *vlak* geteekend te zijn: zoo dat alle hare deelen in het zelfde vlak liggen.

XII. BEPALING.

Wanneer eene figuur alleen door regte lijnen gevormd en besloten wordt, draagt zij den naam van *regtlijnige figuur*.

EUCL. I. Bep. 20. — St. I. Bep. 18. — L. G. I. Bep. 13.

AANMERKING. De *cirkel*, (zie Bep. V. bl. 4.) is geen lijn maar eene figuur, want dezelve wordt door den omtrek geheel besloten en bepaald. De cirkel is de eenige kromlijnige figuur die men in de zoogenoemde *elementaire* Meetkunde beschouwt.

XIII.

XIII. BEPALING.

Aan de *regtlijnige* figuren worden de namen van *driezijdige*, of *driehoeken*; van *vierzijdige* of *vierhoeken*; van *vijfzijdige* of *vijfhoeken* enz. gegeven; naar mate van het getal van zijden, en dus ook van hoeken, waaruit zij bestaan. Men begrijpt echter, meestal, onder den naam van *veelhoeken* alle de regtlijnige figuren welke door meer dan vier zijden gevormd worden.

EUCL. I. Bep. 21, 22, 23. — L. G. I. Bep. 14.

XIV. BEPALING. Fig. 20.

Wanneer men in den driehoek [ABC] eene der zijden, om het even welke, [AC] als *grondlijn*, of *bazis*, aanneemt, wordt de hoek [B], over die grondlijn [AC] staande, de *tophoek*, en deszelfs kruin [B] *top* of *toppunt* van den driehoek genoemd. De twee zijden [BA, BC] welke den tophoek vormen, dragen dan den naam van *beenen* des driehoeks.

XV. BEPALING. Fig. 20, 34, 21.

Een driehoek [ABC, fig. 20.] wordt *gelijkzijdig* genoemd, wanneer de drie lijnen, of *zijden* [AB, BC, AC] uit welke hij bestaat gelijk aan elkander zijn. Hij wordt *gelijkbeenig* genoemd [fig. 34.], indien twee zijden [AB, BC] aan elkander gelijk zijn; en *ongelijkzijdig* [fig. 21.] wanneer de drie zijden [AC, AB, BC] ongelijk zijn.

EUCL. I. Bep. 24, 25, 26. — St. I. Bep. 19, 20, 21, 22. — L. G. I. Bep. 15.

GEVOLG. Fig. 20.

Alle gelijkzijdige driehoeken zijn ook gelijkbeenig.

I. AANMERKING. Hoe men eenen *gelijkzijdigen*, of eenen *gelijkbeenigen*, driehoek moet vervaardigen, wordt in het II. en III. Werkstuk van het II. Boek der werkstukken getoond, en men is daartoe door het IV. *Axioma* (bl. 5.) reeds in staat gesteld.

II. AANMERKING. Men kan ook reeds nu eenen ongelijkzijdigen driehoek CAB [fig. 21.] maken: maar om zulks in alle gevallen te doen, moet men zoodanigen driehoek uit drie gegeven lijnen, die onderling ongelijk zijn, kunnen daar-

ſtellen: dit is het onderwerp van het I. Werkſtuk des II. Boeks: doch daartoe wordt vereischt dat men het XIX. Voorſtel kenne.

XV. VOORSTEL. Fig. 21.

In alle driehoeken [A B C] is 1°. de uitwendige hoek [B C E] die eene der zijden [B C] met de verlenging van de aangrenzende zijde [A C] maakt, gelijk aan beide de overſtaande inwendige hoeken te ſamen genomen [A + B]: en 2°. de drie hoeken van een driehoek zijn, te ſamen genomen, [∠ A + ∠ B + ∠ C], gelijk aan twee regte hoeken.

EUCL. I. 32. — St. I. 13. — L. G. I. 27.

BEREIDING. Voor het I. gedeelte: Daar A B en C B elkander ontmoeten, en dus [Voorſt. X. Gev. 1.] C B niet evenwijdig is aan A B, ſtelt men dat eene andere lijn C D aan A B evenwijdig is.

BEWIJS. Voor het I. uit Bep. X. en Voorſt. VII.
Voor het II. uit het eerſte en uit Voorſt. III.

I. GEVOLG.

In alle driehoeken [A B C] is de uitwendige hoek [B C E] door eene der zijden [B C] met de verlenging der aangrenzende zijde [A C] gemaakt, grooter dan eene der overſtaande inwendige hoeken [A of B].

EUCL. I. 16. — St. I. 13. Gev. 2.

II. GEVOLG. Fig. 30.

Wanneer in eenen driehoek [A B D] de ſom van twee hoeken [A en B] gelijk is aan de ſom van twee hoeken [F E I en F] in eenen anderen driehoek [E F I], zal de derde hoek [D] van den eerstgemelden gelijk zijn aan den derden hoek [E I F] van den laatstgemelden: en omgekeerd: zoo eene hoek [B] van den eenen gelijk is aan eenen hoek [F] van den anderen, is de ſom der twee overige hoeken in den eerstgemelden driehoek gelijk aan de ſom der twee overige in den laatstgemelden.

St. I. 13. Gev. 1. — L. G. I. 27. Gev. 2.

III. GEVOLG. Fig. 22.

Indien in eenen driehoek [A B C] een der hoeken [B] regt

regt is; zijn de twee andere hoeken, [BAC en ACB] te samen genomen gelijk aan éénen regten hoek.

St. L. 13. Gev. 4. — L. G. I. 27. Gev. 4.

IV. GEVOLG.

Een driehoek kan niet meer dan éénen regten of éénen stompen hoek hebben: in zoodanig geval zijn de beide overige, scherpe hoeken.

St. L. 13. Gev. 3.

XVI. BEPALING.

Men noemt *regthoekigen driehoek*, eenen driehoek [ABC, fig. 22.] waarin één hoek regt is. Als dan wordt de zijde [AC] over den regten hoek, *schuinsche zijde*, of *span-zijde*, of *hypothenusa* genoemd: de beide overige [AB en BC] die den regten hoek [B] bevatten, dragen den naam van *regthoeks-zijden*, of *Catethae*.

Men noemt *stomp-* of *plomp-hoekigen driehoek* [ACD, fig. 22.] eenen driehoek waarin een der hoeken [ACD], *stomp*, of *plomp* is: de zijde [AD] over den stompen hoek wordt dan ook *schuinsche-* of *span zijde* genoemd.

Wanneer in eenen driehoek [CAB, fig. 20.] alle de hoeken scherp zijn: wordt dezelve *scherphoekige driehoek* genoemd.

EUCL. I. Bep. 27, 28, 29. — St. I. Bep. 23, 24, 25. — L. G. I. Bep. 16.

XVI. VOORSTEL. Fig. 22 en 23.

Indien er uit den top [A] van een driehoek eene loodlijn [AB] op de grondlijn valt; zal die loodlijn met de regthoekszijde overeenkomen, indien de driehoek [BAC, fig. 22.) op de grondlijn regthoekig is: buiten den driehoek [CAD, fig. 22.] vallen zoo de driehoek op de grondlijn [CD, stomphoekig is, en wel aan den kant van den stompen hoek [ACD]: en binnen den driehoek [CAD, fig. 23.] indien beide de hoeken op de grondlijn [CD] scherp zijn.

BEWIJS. Uit het ongerijmde door Voorstel XI.

XVII. VOORSTEL. Fig. 22 en 23.

In alle driehoeken staat de grootste zijde over den grootsten hoek.

EUCL. I. 19. — L. G. I. 14.

BEWIJS. Indien △ BAC [fig 22.] regthoekig, volgt uit Voorstel XI dat AC > AB: Indien △ CAD [fig. 22.] stomphoekig is: zij AB ⊥ op CD: dan is [door XI] AC > AB: AD > AC. Indien △ CAD [fig. 23.] scherphoekig en ∠ ACD > ∠ ADC: zij AB ⊥ op CD: en AE = AC. Om dat in △ ABD, ∠ ABD = L: en insgelijks in △ CAB, ∠ CBA = L: is [Voorst. XV. Gev. 2.] ∠ BAD + ∠ ADB = ∠ ACB + ∠ BAC: Maar ∠ ACB > ∠ ADB (onderst.) derhalve ∠ BAC < ∠ BAD; maar [Voorst. XI. Gev. 2] ∠ BAE = ∠ BAC dus ∠ BAE < ∠ BAD; derhalve valt het stip E tusschen B en D: gevolglijk [Voorst. XI] AD > AE of AC.

AANMERKING. Uit dit Voorstel, doch uit andere gronden bewezen, wordt doorgaans afgeleid het geen wij in ons XI. Voorstel, en in deszelfs twee gevolgen, bewezen hebben.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 22 en 23.

In alle driehoeken staat de grootste hoek over de grootste zijde.

EUCL. I. 18. — St. I. 14. — L. G. I. 14.

BEWIJS. Zij de zijde AD grooter dan AC: en AB de ⊥ uit het stip A op CD (zoo noodig verlengd): dan wordt door het ongerijmde uit Voorst. XVII. bewezen, dat ∠ ACD niet kleiner zijn kan dan ∠ ADC: en uit Voorst. XV. Gev. 2. dat ∠ ACD niet gelijk kan zijn aan ∠ ADC.

AANMERKING. Dit voorstel, het omgekeerde van het voorgaande, wordt meest regtstreeks bewezen: doch dan moet het voorstel dat bij ons het XXVII. is vorafgaan.

XIX. VOORSTEL. Fig. 22 en 23.

In alle driehoeken zijn twee zijden te samen genomen grooter dan de derde.

EUCL. I. 20. — St. I. 15. — L. G. I. 8.

BEREIDING. Zij CH ⊥ op AD.

BEWIJS. Uit Voorst. XI. eerst in △ ACH op de zijden AC

AC en AH, en dan nog in eens in Δ CHD op de zijden DC en DH toegepast.

I. AANMERKING. Men kan thans het I. Werkstuk uit het II. Boek oplossen.]

II. AANMERKING. Indien men als bepaling van de regte lijn aanneemt, dat zij de kortste is tusschen twee stippen, is dit Voorstel een *Axioma*: Zie Aanmerking I. op Bepaling III.

XX. VOORSTEL. Fig. 24.

Indien men uit de twee uiteinden [A en C] van eene zijde [AC] eens driehoeks [ABC] twee lijnen [AD, CD] trekt naar een stip [D] binnen den driehoek gelegen: zullen die twee lijnen te samen genomen [AD + CD] kleiner zijn dan de twee overige zijden des driehoeks, ook te samen genomen [AB + CB]: maar zij zullen eenen grooteren hoek [ADC] bevatten.

EUCL. I. 21. — St. I. 16. — L. G. I. 9.

BEREIDING. Men verlenge AD tot in E.

BEWIJS. Voor het I. uit Voorst. XIX. op de ΔΔ ABE en DEC toegepast:
Voor het II. uit Voorst. XV. Gev. 1.

AANMERKING. Het blijkt dat het zelfde zoude plaats hebben al viel het stip D op eene der zijden AB of BC.

XXI. VOORSTEL. Fig. 25.

Wanneer twee driehoeken [BAC en GAC] zoodanig gesteld zijn, dat een der hoeken [A] van den eersten gelijk is aan een der hoeken [A] van den anderen, en dat beide beenen [AB, AC] van den gemelden hoek [A] in den eersten driehoek onderling gelijk zijn aan de beide beenen [GA, CA] van den gemelden hoek in den anderen driehoek, (namelijk BA gelijk aan GA, AC gelijk aan AC); zal 1°. de derde zijde [BC] gelijk zijn aan de derde zijde [GC]; en 2°. de hoeken die in de beide driehoeken over gelijke zijde staan, zullen ook gelijk zijn (namelijk B aan G, ACB aan ACG).

EUCL. I. 4. — St. I. 3. — L. G. I. 6.

BEWIJS. Men vooronderstelt dat men den driehoek GAC, bij voorbeeld, zoodanig op den driehoek BAC plaats, dat de kruinen A en A, zoo als ook dat de zijden AC en

AC,

AC, AG en AB op elkander komen [I. Bep. Aanm. 8.], en men besluit dan, dat alle de overige deelen ook overeenkomen, en dus gelijk zijn.

GEVOLG.

De ruimten welke door beide de driehoeken bevat worden zijn ook gelijk: en derhalven zijn deze driehoeken *in alle opzigten* gelijk.

I. AANMERKING. Men kan dit gevolg niet omkeeren, en zeggen: dat alle de driehoeken waarin de ruimten door de zijden bevat, gelijk zijn, ook gelijke hoeken, en gelijke zijden bezitten: wij zullen in het II. Boek bewijzen, dat vele driehoeken gelijk zijn, wat den inhoud, of de ruimte die zij bevatten, betreft, zonder dat er gelijkheid van hoeken of zijden plaats heeft; dat is, zonder dat zij in alle opzigten gelijk zijn.

II. AANMERKING. De onderstellingen, in welke dit Voorstel plaats heeft, zijn 1°. de onderlinge gelijkheid van twee zijden in beide de driehoeken, ieder aan ieder en dan 2°. de gelijkheid, niet van twee hoeken *in het algemeen*, een in iederen driehoek, maar juist van die hoeken, welke tusschen de gelijke zijden begrepen zijn. Hierop moet men behoorlijk letten. Indien men de gelijkheid onderstelde niet van den hoek *tusschen* de gelijke zijden begrepen, maar van een der hoeken, die in iederen driehoek *over* eene der gelijke zijden staat; dan zoude het besluit niet algemeen zijn, maar alleen voor de regthoekige driehoeken in het algemeen, en voor de overige in een bijzonder geval plaats hebben; welke beide stukken het onderwerp zijn van ons XXV. Voorstel.

XXII. VOORSTEL. Fig. 25.

Wanneer twee driehoeken [ABC en AGC] zoodanig gesteld zijn, dat eene zijde [AC] van den eenen gelijk is aan eene zijde [AC] van den anderen: en dat twee hoeken van den eenen gelijk zijn aan twee hoeken van den anderen, ieder aan ieder, (bij voorb. ∠ BAC = ∠ GAC, ∠ ACB = GCA) zal 1°. de derde hoek B gelijk zijn aan den derden hoek G; 2°. zullen de overige zijden ook aan elkander gelijk zijn, die namelijk, welke tegen over gelijke hoeken staan, (dat is AB = AG, BC = GC).

EUCL. I. 26. — St. I. 21. — L. G. I. 7.

BEWIJS. Voor het eerſte gedeelte uit het XV. Voorſtel, Gev. 2.

Voor het tweede gedeelte, door te onderſtellen dat de zijde AC van △ GAC op de zijde AC des △ BAC geſteld wordt; en te toonen dat als dan, om dat ∠ GAC = ∠ BAC, AG langs AB valt: en dat vermits ∠ ACG = ∠ ACB, ook CG langs CB vallen, en AG = AB zijn moet: want dat, indien dit niet ware, en G geſteld wierdt op I te vallen: als dan, trekkende CI, △ IAC = △ BAC zoude zijn (Voorſtel XXI.) en derhalve ∠ ACI = ∠ ACG = ∠ ACB dat ongerijmd is. Gevolgelijk valt G op B: en is AG = AB, CG = CB.

GEVOLG.

De driehoeken ABC en ACG bevatten ook gelijke ruimten, en zijn dus *in alle opzigten* gelijk.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 26, 27 en 28.

Wanneer in twee driehoeken CAB, CAG, twee zijden van den eenen [AC, AB] onderling gelijk zijn aan twee zijden [AC, AG] van den anderen, doch eenen grooteren hoek [CAB] bevatten: zal ook de derde zijde [BC] van den eerstgemelden driehoek [CAB] grooter zijn dan de derde zijde [CG] van den anderen driehoek [CAG].

EUCL. I. 24. — St. I. 20. — L. G. I. 10.

BEREIDING. Men ſtelle dat de kruin A van den △ GAC valle op de kruin A van den △ BAC, en AC langs en op AC: dan zal AG binnen den hoek CAB vallen [Bep. VIII. Aanm. 3. bl. 7.]: en het uiteinde G der zijde AG zal vallen, of op BC fig. 26, of onder BC fig. 27, of boven BC fig. 28.

BEWIJS. Voor het I. Fig. 26. Klaarblijkelijk.

Voor het II. Fig. 27. Uit Voorſtel XIX. is in △ GAC, GC < GI + IC: in △ IAB is AB < BI + IA: derhalve GC + AB < GI + IC + BI + IA: dat is GC + AB < AG + BC, waaruit, om dat AG = AB het voorſtel volgt, t. w. GC < BC.

Voor het III. Fig. 28. Uit Voorſtel XX.

AANMERKING. Het omgekeerde van dit Voorſtel: dat

„ zoo

„ zoo de zijden A B en A C van den △ B A C, gelijk zijn
„ aan de zijden A G en A C van den △ G A C, ieder aan
„ ieder, maar de grondlijn B C grooter is dan de grondlijn
„ G C: als dan de hoek B A C grooter is dan de hoek
„ G A C," wordt gemakkelijk uit dit Voorſtel door het
ongerijmde afgeleid.

EUCL. I. 25. — St. I. 20. Gev. — L. G. I. 10. Schol.

XXIV. VOORSTEL. Fig. 29 en 30.

Indien twee zijden [A B, B D] van een driehoek [A B D] eenen hoek [A B D] bevatten die gelijk is aan den hoek [E F G] in een anderen driehoek [E F G] begrepen door twee zijden [E F, F G], waarvan de eene [E F] gelijk is aan eene der zijden [A B] van den eerſten driehoek [A B D], doch de tweede [F G] langer is dan de tweede [B D]; zal de grondlijn [E G] van dien tweeden driehoek altijd grooter zijn dan de grondlijn [A D] van den eerſten driehoek, zoo in dezen de hoek [D] welke op de grondlijn tegen over de gelijke zijde [A B] ſtaat, of regt of ſcherp is: doch zoo die hoek ſtomp is, zal de grondlijn [E G] van den tweeden driehoek zoo wel kleiner als grooter kunnen zijn dan die [A D] van den eerſten, of ook gelijk aan de zelve.

BEREIDING. Neem F I = B D, trek E I, welke dan gelijk is aan A D (Voorſt. XXI.), gelijk mede ∠ E I F = ∠ A D B.

BEWIJS. Voor het I. Fig. 29. Zoo ∠ A D B regt of ſcherp, is ∠ E I F ook regt of ſcherp: dus ∠ E I G regt of ſtomp, en derhalven > ∠ E G I: en dus (Voorſtel XVII.) E G > E I of A D.

Voor het II. Fig. 30. Zoo ∠ A D B en dus ∠ E I F ſtomp, is ∠ E I G ſcherp, en kan derhalve zijn of > of = of < ∠ E G F, en dus ook E G > = < E I, of A D.

XXV. VOORSTEL. Fig. 31 en 32.

Indien twee zijden [A B, A C] eens driehoeks [A B C] gelijk zijn aan twee zijden [G A, A C] van een anderen driehoek [A G C] ieder aan ieder, en boven dien een hoek, [A C B] doch die niet tusſchen de gegeven zijden gelegen is, maar tegen over eene derzelve [A B] ſtaat, gelijk is aan den hoek [A C G] die in den anderen driehoek tegen

over

over de gelijke zijde [AG] is: zullen die twee driehoeken in alle opzigten gelijk zijn, indien de hoeken [ABC, AGC] welke over de tweede der gelijke zijden [AC en AC] ſtaan, beide regt, of beide ſtomp, of beide ſcherp zijn.

BEWIJS. Indien men den top A van den Δ CAG op den top A van den Δ CAB ſtelt, en AC op AC legt, zal C op C vallen, en, om de gelijkheid der hoeken, CG langs CB. Ik zeg dat G op B zal vallen. Dit ſpreekt van zelfs indien de hoeken ABC en AGC regt zijn, en dus de lijnen AB en AG loodregt vallen. Maar zoo de hoeken niet regt zijn, zal ook het ſtip G op het ſtip B vallen: want *zoo neen*, zij AI ⊥ op CB, en valle het ſtip G wel op de lijn CB, maar of tusſchen C en B, of voorbij B. Om dat de hoeken AGC en ABC of beide ſcherp, of beide ſtomp zijn: zullen de ſtippen G en B op CB beide aan den zelfden kant van de loodlijn vallen [XVI]. Maar om dat AG = AB, zouden er dan twee gelijke lijnen aan den zelfden kant van de loodlijn ſtaan: dat [XI. Gev. 2.] onmogelijk is. Dus valt G op B; waaruit al het overige volgt.

GEVOLG.

Alle ſtomphoekige en alle regthoekige driehoeken waarin twee zijden om eenen der ſcherpe hoeken gelijk zijn aan elkander, zijn in alle opzigten gelijk.

St. I. 11. Voor de regthoekige driehoeken. — L. G. I. 11.

I. AANMERKING. Het onderſcheid der gevallen ontſtaat hier uit; dat er uit het ſtip A [fig. 31.] altijd twee gelijke lijnen Ag, AG getrokken kunnen worden, doch die aan verſchillende kanten van de loodlijn zullen vallen: waar door de twee driehoeken CAg en CAG zeer verſchillende zijn hoewel AC = AC, Ag = AG = AB, en ∠ ACB = ∠ ACG = ∠ ACg.

II. AANMERKING. Sommigen drukken dit Voorſtel aldus uit:
„ Indien in twee driehoeken ABC en GAC twee zij-
„ den AC en AB van den eenen gelijk zijn aan twee zij-
„ den van den anderen [AC en AG] en boven dien eenen
„ hoek [ACB] ſtaande tegen over eene der gelijke zijden
„ [AB], gelijk is aan den hoek die in den anderen drie-
„ hoek over de gelijke zijde [AG] ſtaat; zullen die drie-
„ hoeken in alle opzigten gelijk zijn, indien de zijden

„ [AB],

„ [AB, AG] welke over de gelijke hoeken ſtaan grooter „ zijn dan de gegeven aangrenzende zijden [AC, AC].” Immers zoo AB > AC en AG > AC is de hoek ∠ ACB > ∠ ABC en ∠ ACG > ∠ AGC: en gevolglijk zijn de hoeken ABC en AGC altijd ſcherp. Het voorſtel aldus uitgedrukt is dan wel in het onze begrepen, maar is minder algemeen.

KARSTEN, *Matheſis Theoretica: Geom.* §. 87.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 25.

Indien de drie zijden van een driehoek [ABC] gelijk zijn aan de drie zijden van een anderen [GAC] ieder aan ieder [AB = AG, AC = BC, BC = GC] zullen de hoeken welke tusſchen en over gelijke zijden ſtaan onderling gelijk zijn. (t. w. ∠ BAC = ∠ GAC: ∠ ABC = ∠ AGC: ∠ ACB = ∠ ACG).

EUCL. I. 8. — St. I. 5. — L. G. I. 11.

BEWIJS. Uit het ongerijmde waarin men [door XXIII.] vervalt, indien men ſtelt dat een der hoeken, bijv. BAC, grooter of kleiner mogt zijn dan ∠ GAC. Zoodra nu de gelijkheid dier hoeken bewezen is, volgt het overige door Voorſt. XXI.

I. GEVOLG.

Deze driehoeken bevatten ook gelijke ruimten, en zijn dus in alle opzigten gelijk.

II. GEVOLG.

Indien er uit twee ſtippen [B en C] van eene lijn [BC] twee lijnen [BA, CA] getrokken zijn, die elkander in een ſtip [A] ontmoeten: kunnen er uit die zelfde ſtippen geen twee andere lijnen aan den zelfden kant getrokken worden, die aan de eerstgemelde gelijk zullen zijn, ieder aan ieder, en die in eenig ander ſtip te ſamen zouden komen.

EUCL. I. 7.

I. AANMERKING. Men is thans in ſtaat om de volgende werkſtukken op te losſen, te weten:
Uit het I. Boek, Werkſt. 6, 12 en 13. uit het II. Werkſt. 4.

I.

AANMERKING. Men kan dit Voorstel niet omkeren en zeggen: „ wanneer in twee driehoeken de drie hoeken gelijk „ zijn, ieder aan ieder, zullen de zijden welke over gelijke „ hoeken staan onderling gelijk zijn." Want driehoeken kunnen onderling gelijkhoekig, en niet te min zeer verschillende in grootte zijn Indien men bijv. binnen den driehoek EBF, fig. 33. de lijn AC evenwijdig aan EF trekt: zullen de twee driehoeken EBF en ABC, gelijkhoekig zijn (Bep. X. bl. 13.). Wij zullen in het IV. Boek Voorstel II. bewijzen dat de gelijkhoekigheid in verschillende driehoeken, niet derzelver *gelijkheid*, maar alléén derzelver *gelijkvormigheid*, uitmaakt.

XXVII. VOORSTEL. Fig. 33 en 34.

In eenen gelijkbeenigen driehoek [ABC] zijn de hoeken [BAC en BCA] op de grondlijn gelijk: en zoo de beenen verlengd worden, zijn de hoeken [EAC en ACF] onder de grondlijn het ook.

EUCL. I. 5. — St. I. 4. — L. G. I. 12.

I. BEWIJS. Fig 33. in den trant van EUCLIDES. Men verlengt de beenen en maakt BF = BE: men trekt AF, CE: en bewijst uit Voorstel XXI, dat AF = CE, ∠ AFC = ∠ AEC, ∠ BAF = ∠ BCE; daaruit, en uit Voorstel XXI, dat ∠ ACE = ∠ CAF en ∠ EAC = ∠ ACF, waaruit het overige volgt.

II. BEWIJS. Fig. 34. Met te onderstellen dat BK den tophoek in twee gelijke deelen snijdt, en dan door Voorst. XXI.

III. BEWIJS. Fig. 34. Dat het eenvoudigste voorkomt, en tevens een aantal gevolgen oplevert. Men beschrijve op AC eenen anderen gelijkbeenigen driehoek AIC, het zij aan den zelfden, het zij aan den anderen kant der grondlijn AC: en trekke BI, die AC snijdt in K. Dan past men Voorstel XXVI. op de ΔΔ ABI en IBC toe: en dan het XXI. op de ΔΔ BAK en BCK.

I. AANMERKING. Men kan thans het XIV. Werkstuk van het I. Boek oplossen.

I. GEVOLG.

Als de tophoek van een gelijkbeenigen driehoek bekend is, zijn de hoeken op de grondlijn het ook: en ieder hunner is het verschil van den halven tophoek met

éénen regten hoek: of van den geheelen tophoek met twee regte hoeken (III.).

St. I. 13. Gevolg 6.

II. GEVOLG.

Een gelijkbeenige driehoek kan geen regten hoek dan alleen in den top bezitten; en in dat geval zijn de overige hoeken ieder gelijk aan eenen halven regten hoek.

Het bewijs wordt uit dit Voorstel en het 3. Gevolg van het XV. opgemaakt.

St. I. 13. Gev. 7.

III. GEVOLG.

Een gelijkzijdige driehoek is altijd gelijkhoekig: en ieder hoek is twee derde gedeelten van den regten hoek.

Het laatste gedeelte wordt uit het XV. Voorstel opgemaakt.

St. I. 13. Gev. 8. — L. G. I. 12. Cor.

I. AANMERKING. Men is thans in staat om het XVI. Werkstuk van het I. Boek optelossen.

IV. GEVOLG. Fig. 34.

Eene loodlijn [B K] uit den top van een' gelijkbeenigen, of gelijkzijdigen, driehoek [A B C] op de grondlijn [A C] neergelaten, snijdt die lijn in twee gelijke deelen [A K en K C], en deelt insgelijks den tophoek [A B C] in twee gelijke hoeken.

En, *omgekeerd;* die lijn welke uit den top van een gelijkbeenigen, of gelijkzijdigen driehoek, [A B C] nedergelaten wordt, en, of den tophoek, of de grondlijn, in twee gelijke deelen verdeelt, staat loodregt op de grondlijn A C.

TACQUET op de 26 Prop. van EUCLIDES I. Boek. — St. I. 4. Gev. 1 en 2.

BEWIJS. Uit dit Voorstel met het XXII. gepaard.

II. AANMERKING. Men kan thans de oplossing van het III. en de eerste oplossing van het IV. Werkstuk uit het eerste Boek verrigten.

III. AANMERKING. Uit dit gevolg wordt doorgaans bewezen het geen wij in Voorstel XI. Gev. 2. gesteld hebben.

V.

V. GEVOLG. Fig. 34.

Indien op de zelfde grondlijn [A C], twee verſchillende gelijkbeenige driehoeken A B C, en A I C ſtaan, zal de lijn [B I], die door de toppen [B en I] der beide driehoeken gaat, (zoo noodig tot op de grondlijn [A C] in K verlengd), die grondlijn in twee gelijke deelen ſnijden, en loodregt op dezelve ſtaan.

BEWIJS. Het ligt in het derde bewijs van dit voorſtel opgeſloten.

IV. AANMERKING. Dit ſtelt ons in ſtaat om uit het eerſte Boek optelosſen het V, VII, XV Werkſtuk.

V. AANMERKING. Dat de lijn, welke den tophoek in twee gelijke deelen deelt, ook de grondlijn in twee gelijke deelen ſnijdt, is den gelijkbeenigen, en dus ook den gelijkzijdigen, driehoek alléén eigen. In alle andere wordt de grondlijn door zoodanige lijn in twee ongelijke deelen geſneden, en het grootſte ſtuk grenst aan de grootſte zijde: want zij [fig. 35] in △ A B C, A B > B C, en ∠ A B D = ∠ D B C: maak B I = B C, trek D I: dan is (XXI.) I D = D C: ∠ D I B = ∠ B C D: en ∠ I D B = ∠ B D C; maar ∠ B D C = ∠ A + ∠ A B D: en ∠ A I D = ∠ A B D + ∠ I D B = ∠ A B D + ∠ B D C. Gevolgelijk ∠ A I D = ∠ A + ∠ 2 ∠ A B D en derhalve ∠ A I D > ∠ A en (XVII.) A D > I D; of A D > D C. In het IV. Boek Voorſt. XII. zal daarover nader gehandeld worden.

Deze aanmerking is reeds door PROCLUS gemaakt, en door CLAVIUS, op EUCLIDES I, 19. voorgedragen.

VI. GEVOLG. Fig. 33.

Indien men op de beenen [A B, B C] van een' gelijkbeenigen driehoek, of op derzelver verlengden, uit den top B, gelijke deelen afſnijdt [B E, B F], zal de lijn [E F] die de uiterſten [E, F] van die deelen vereenigt, met dezelve eenen gelijkbeenigen driehoek [B E F] maken, waarvan de hoeken onderling aan die van den gegeven driehoek [A B C], gelijk zullen zijn, en wiens grondlijn [E F] evenwijdig aan de grondlijn [A B] van den gegeven driehoek zijn zal.

BEWIJS. Het volgt uit dit Voorſtel en uit de X. Bep. bl. 13.

VII. GEVOLG. Fig. 34.

Twee regthoekige driehoeken [ABK, BKC] in welke de schuinsche zijden [AB, BC] gelijk aan elkander zijn, en eene der regthoekszijden [BK] ook gelijk is in beiden; zijn in alle opzigten gelijk.

St. L. 11. — L. G. I. 18.

BEWIJS. Het zelve ligt reeds in het 2de Bewijs van dit voorstel opgesloten: of wel, men stelt de driehoeken met de regthoekszijde BK, die in beiden gelijk is, tegen elkander: dan maken AK en CK ééne regte lijn [IV. Voorstel]; en het overige wordt uit dit Voorstel, en zijn 4. Gevolg afgeleid.

VI. AANMERKING. Dit gevolg is een bijzonder geval van het XXV. voorstel, waarvan het een gevolg uitmaakt.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 36.

Alle driehoeken waarin de hoeken op de grondlijn gelijk zijn, zijn gelijkbeenig.

EUCL. I. 6. — St. I. 14. Gev. — L. G. I. 13.

BEWIJS. Uit de ongerijmdheid waarin men door het Voorstel XXVII. vervallen zoude met te stellen [fig. 36.] dat niet AB, maar wel AG, gelijk aan BC zoude zijn.

GEVOLG.

Een driehoek waarin alle de hoeken onderling gelijk zijn, is gelijkzijdig.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 37, 38 en 39.

Indien men uit eenen der hoeken [C] op de grondlijn [AC] van een' gelijkbeenigen driehoek [AGC] op het tegenovergestelde been [AG], zoo noodig, verlengd, eene lijn [CD], gelijk aan dat been [AG] laat vallen: zal die lijn [CD] met de verlengde grondlijn [AE] in dat stip eenen hoek [DCE] maken, die het drievoud is van den hoek [A] op de grondlijn in den driehoek.

UITLEGGING. Er kunnen drie gevallen zijn, want CD valt buiten den driehoek voorbij G [fig. 37.] of binnen den driehoek tusschen G en A [fig. 38.] of buiten den driehoek voorbij A [fig. 39.].

BEWIJS. I. GEVAL. Fig. 37. ∠ DGC = 2 ∠ A (XV.) = ∠ GDC (XXVII.). ∠ DCE = ∠ A + ∠ D (XV.) = 3 ∠ A.

II. GEVAL. Fig. 38. ∠ DCE = ∠ A + ∠ ADC (XV.) = ∠ A + ∠ AGC + ∠ DCG (XV.) = ∠ A + ∠ GDC + ∠ DCG (XXVII.) = ∠ A + ∠ FGC (XV.) = ∠ A + 2 ∠ A (XV.) = 3 ∠ A.

III GEVAL. Fig. 39. ∠ DCE of *m* = ∠ D + ∠ DAC (XV.) = ∠ G + ∠ DAC (XXVII.) = 2 ∠ G + ∠ ACG (XXVII.) = 4 L — 4 ∠ ACG + ∠ ACG (XXVII. Gev. 1.) = 4 L — 3 ∠ ACG. Derhalve ∠ *m* + 3 ∠ ACG = 4 L. Maar 4 L = ∠ *m* + ∠ DCE *uitspringend* (V. Gev. 1.). Derhalve ∠ *m* + 3 ∠ ACG = ∠ *m* < ∠ DCE *uitspringend*. Derhalve ∠ DCE *uitspringend* = 3 ∠ ACG = 3 ∠ GAC.

I. AANMERKING. De lijn CD valt altijd op de verlenging van AG aan den kant van GC zoo ∠ AGC stomp is [fig. 37.] en derhalve ∠ DGC scherp. Indien de hoek AGC regt was zoude CD op CG vallen: derhalve hoek A = $\frac{1}{2}$ L (XXVII. Voorst. Gev. 2.) en ∠ GCE = L + $\frac{1}{2}$ L = $\frac{3}{2}$ L = 3 ∠ A Zoo ∠ AGC scherp wordt [fig. 38.], valt D tusschen G en A, tot dat GA = AC = GC, of tot dat de driehoek gelijkzijdig is, dan is (Voorstel XXVII. Gev. 3.) ∠ A = $\frac{2}{3}$ L en DC op CA vallende, wordt ∠ DCE = 2 L of eene regte lijn (Voorst. IV.): dus ook = 3 × $\frac{2}{3}$ L = 3 ∠ A. Wordt ∠ AGC nog scherper [fig. 39.], dan valt CD beneden A: daar ∠ G kleiner wordt, wordt ∠ GAC grooter dan in het voorgaande geval, of dan $\frac{2}{3}$ L; en derhalve 3 ∠ A > 2 L; dus moet ∠ DCE > 2 L, dat is moet een *uitspringende hoek* zijn, gelijk ik in de figuur door een cirkelboogje heb trachten aanteduiden dat men dien hoek aan dien kant nemen moet.

II. AANMERKING. Indien men dan, een hoek DCE gegeven zijnde, uit het stip D van het been CD, de lijnen DGA en CG geometrisch, en dus zeker, zoodanig trekken kon, dat GC = AG = CD: zoude de ∠ A = $\frac{1}{3}$ ∠ DCE zijn; en het beroemd Werkstuk om eenen hoek in drie gelijke deelen te deelen ware opgelost. Maar

 dit

dit kan niet geschieden. Wij zullen in het XVIII. Voorst. van het V. en in het VIII. Voorstel., Gev. 1 en 2 van het VIII. Boek nader daar over handelen.

III. AANMERKING. Er zijn nog verscheide andere belangrijke eigenschappen, de zijden en hoeken van driehoeken betreffende, doch die, of gevoegelijker elders plaats zullen vinden, of uit het geen tot nu bewezen is niet afgeleid kunnen worden. Tot de eerste soort behooren V. 2, VI. 3: tot de tweede IV. 13, 14, enz.

XXX. VOORSTEL. Fig. 40.

Indien twee lijnen [AB, CD] onderling evenwijdig, en tevens gelijk zijn, zullen de lijnen [BD, AC] welke dezelve vereenigen, ook onderling gelijk en evenwijdig zijn.

EUCL. I. 33. — St. I. 22. — L. G. I. 31.

BEREIDING. Men trekt de lijn CB, uit den hoek C naar den tegenovergestelden hoek.

BEWIJS. Uit de X Bep. en Voorstel XXI.

AANMERKING. De figuur ABDC, is dan zoodanig uit vier lijnen samengesteld dat de tegenovergestelde zijden onderling evenwijdig zijn.

XVI. BEPALING. Fig. 40.

Eene vierzijdige figuur, waarvan de tegenovergestelde zijden onderling evenwijdig zijn, draagt den naam van *parallelogram*; en wordt ook *raam* genoemd. De lijnen CB en AD, van den eenen hoek naar den tegenovergestelden getrokken, zijn de *diagonalen* of *hoeklijnen*, of *hoekpunts-lijnen*.

St. I. Bep. 29, 30. — L. G. I. Bep. 17, 18.

I. AANMERKING. *Parallelogram* beteekent, in het Grieksch, eene figuur, waarvan de zijden *parallel* zijn: het is de zelfde figuur die EUCLIDES in zijne 33 Bep. van het I. Boek *Rhomboides* noemt: derhalve zouden in dien zin (gelijk in het II. en IV. Boek nader blijken zal), de regelmatige veelhoeken uit een even getal zijden bestaande ook *parallelogrammen* zijn, indien niet die benaming aan eene figuur van vier zijden, bij uitsluiting, wierdt gegeven.

II. AANMERKING. Men zoude het parallelogram kunnen beschouwen als de moet, of het spoor, nagelaten door de beweging van eene regte lijn CD, die zich evenwijdig aan

zich

zich zelve beweegt; door welke beweging de uiteinden C en D de lijnen CA en DB, als het ware, doen geboren worden: Zie Bep. II. Aanm. 1. Het parallelogram wordt scheefhoekig, wanneer de lijn CD zich beweegt, niet alleen van E naar A, maar tevens zijdelings van C naar F, en dus eene dubbelde, of samengestelde, beweging heeft. Maar indien de lijn slechts eene enkele beweging heeft, van E naar A, zoude de lijn CA loodregt staan op CD, de hoek ACD zoude regt zijn, en het parallelogram zoude worden het geen wij in de XVIII. Bepaling *regthoek* zullen noemen.

III. AANMERKING. Hierop steunt het fraai *parallel-liniaal*, voor vele jaren door den Heer ECKHARDT, in den Haag, uitgevonden. Het bestaat uit een enkel liniaal dat zich op twee gekartelde en *volmaakt gelijke* rolletjes, of schijfjes, beweegt, en daardoor altijd aan zich zelven evenwijdig blijft. De *volmaakte* gelijkheid der gekartelde schijfjes is hier volstrekt noodzakelijk. Indien zij ongelijk waren, zoude het liniaal den omtrek van eenen cirkel beschrijven, wiens *radius* des te langer zoude zijn, dat het verschil tusschen de middelijnen der schijfjes geringer en derzelver afstand van elkander grooter is. Dit middel is reeds door HERO *den Alexandrijner* gebruikt om aan konstbeelden eene *circulaire* beweging te geven. Zie zijne *Automata* in de *Mathem. Veteres*, bl. 249. PERRAULT heeft die uitvinding in praktijk gebragt om zeer groote cirkels, met een zeer klein werktuig te beschrijven: zie de afbeelding en beschrijving in zijne Fransche vertaling van VITRUVIUS, p. 82: daaruit is zij overgenomen door LEUPOLD, *Theatr. Mach.*, I. Deel, pl. XX. *b.* fig. 7.

XXXI. VOORSTEL. Fig. 40.

In alle parallelogrammen heeft het volgende plaats:

1°. De tegen elkander overgestelde zijden [AB en CD: AC en BD] zijn gelijk.

2°. De tegenovergestelde hoeken [ACD en ABD; CAB en CDB] zijn gelijk.

3°. De hoeken op iedere zijde zijn te samengenomen gelijk aan twee regte hoeken [$\angle$ ABD + $\angle$ BDC = 2 L: $\angle$ BAC + $\angle$ ACD = 2 L].

4°. De diagonaal snijdt het parallelogram in twee gelijke driehoeken.

EUCL. I. 34. — St. I. 23. — L. G. I. 29, 31.

BEWIJS. Voor het I, II en IV. uit Bep. X. en Voorstel XXI. op de $\triangle\triangle$ ABC en ACD toegepast.

Voor het III. uit Voorstel VII.

 I.

I. GEVOLG.

De ruimte welke het *parallelogram* [ABDC] beslaat, is dus dubbeld van die, welke ieder der driehoeken, [ABC of BCD] waarin het verdeeld wordt, bevat.

AANMERKING. Over de ruimte welke driehoeken en parallelogrammen bevatten, zal nader in II. 12, 13 gehandeld worden.

II. GEVOLG.

Indien een der hoeken van een parallelogram regt is, zijn zij het alle: indien twee aan elkander grenzende zijden gelijk zijn, zijn de vier zijden gelijk.

XVII. BEPALING.

Men noemt *ruit* eene vierhoekige figuur waarin de vier zijden gelijk zijn, fig. 42.

EUCL. I. Bep. 32. — L. G. I. Bep. 17.

GEVOLG.

De overstaande zijden van de ruit zijn aan elkander evenwijdig.

XVIII. BEPALING.

Men noemt *regthoek*, ook wel *regthoekig raam*, een parallelogram waarin de vier hoeken regt zijn, fig. 41.

EUCL. I. Bep. 31. — St. I. Bep. 39. — L. G. I. Bep. 17.

XIX. BEPALING.

Men noemt *vierkant*, of *quadraat*, eene vierhoekige figuur, waarin de vier hoeken regt, en de vier zijden onderling gelijk zijn, fig. 46. ADCB.

EUCL. I. Bep. 30. — St. I. Bep 32. — L. G. I. Bep. 17.

I. AANMERKING. Hoe men handelen moet om op eene gegeven lijn een vierkant te beschrijven, wordt in het V. Werkstuk van het II. Boek geleerd, en men is daartoe reeds in staat.

II. AANMERKING. Het *parallelogram*, de *ruit*, de *regthoek*, het *vierkant*, zijn de eenige, zoogenoemde, *geschikte vierhoeken:* alle andere worden *ongeschikte vierhoeken*, of *trapezia* genoemd, gelijk ADCB fig. 47.

EUCL. I. Bep. 34.

XXXII.

XXXII. VOORSTEL. Fig. 40.

In alle vierhoeken [ABDC] waarin de tegenovergestelde zijden [AB en CD, AC en BD] onderling gelijk zijn; zijn dezelve ook onderling evenwijdig.

L. G. I. 30.

BEREIDING. Men trekt den diagonaal CB.

BEWIJS. Uit het XXVI. Voorstel en Bep. 10.

I. AANMERKING. Dit voorstel is het omgekeerde van het XXXI.

II. AANMERKING. Op dit voorstel steunt het vervaardigen van de *parallel-linialen* die men in de kokers met mathematische instrumenten aantreft.

XXXIII. VOORSTEL. Fig. 40.

In alle parallelogrammen [ABDC] snijden de beide diagonalen [AD, BC] zich onderling in twee gelijke deelen [AO = OD: BO = OC].

EUCL. I. 30. — L. G. I. 23.

BEWIJS. Door Voorstel XXII.

GEVOLG.

In de regthoeken en vierkanten, zijn de deelen der diagonalen, en de diagonalen zelve, gelijk. In de vierkanten en ruiten snijden zij, boven dien, elkander regthoekig.

XXXIV. VOORSTEL. Fig. 85.

Indien men uit een der uiteinden [B] van de diagonaal [CB] eens vierkants [ABLC] op die diagonaal een stuk [BD] neemt gelijk aan de zijde [BA] van het vierkant: en uit het uiteinde [D] van dat stuk eene loodlijn [DE] op de diagonaal oprigt, welke de grondlijn [AC] des vierkants in E] ontmoet: zal die lijn [DE] gelijk zijn aan het verschil [DC] tusschen de diagonaal [CB] en de zijde [AC] van het vierkant, en op de gronlijn een stuk [EA] afsnijden, gelijk aan hetzelve verschil [DC].

BEREIDING. Men trekt DA.

BEWIJS. Voor het I. Om dat in Δ ECD, $\angle$ EDC = L en $\angle$ DCA = ½ L: is $\angle$ DEC ook = ½ L: (XXVII. Gev. 2.) derhalve DE = DC (XXVIII.)

Voor het II. Om dat in Δ ABD, AB = BD en $\angle$

 ABD

ABD = ½ L is (XXVII.) ∠ BAD = ∠ BDA = ½ L: derhalve ∠ DAE = ½ L = ∠ ADE; en (XXVIII.) AE = DE = DC.

I. AANMERKING. Hieruit blijkt, hoe men te handelen hebbe om het VIII. Werkstuk van het II. Boek optelossen.

II. AANMERKING. Dit voorstel zal den grond leggen om in het vervolg geometrisch te bewijzen dat de diagonaal en de zijde van een vierkant onderling *onmeetbaar* zijn. Zie III. Boek, Bep. 8. Aanm. 2.

XXXV. VOORSTEL. Fig. 45.

Indien er uit drie stippen [I, B, F] op een der beenen [AD] van eenen hoek [DAE] op gelijke afstanden [IB, BF] van elkander geplaatst, drie lijnen [IN, BC, FL] alle evenwijdig aan elkander getogen zijn: zullen de deelen [NC, CL] van het ander been [AE] tusschen de gemelde lijnen begrepen, ook gelijk aan elkander zijn. En *omgekeerd*: indien twee evenwijdige lijnen [BC, FL], de beenen van een' hoek snijden, en eene derde lijn [IN], van ieder een stuk [IB, en NC] afsnijdt dat gelijk is aan dat stuk [BF, CL] van ieder, hetwelk tusschen de eerstgemelde lijnen begrepen wordt: is die derde lijn evenwijdig aan de twee eerste.

SIMPSON I. 27.

BEREIDING. Men stelt dat de lijn PO door C evenwijdig aan DA getrokken is, en de lijnen IN, verlengd, en FL, in P en O snijdt.

BEWIJS. Uit het XXXI. Voorstel besluit men de gelijkheid der lijnen PC en CO: en uit het XXII. die der lijnen NC en CL. — Het tweede gedeelte, of het omgekeerde, wordt door het eerste bewezen, uit de beschouwing der ongerijmdheid waarin men vervalt, met het tegendeel te stellen: d. i. met te stellen dat niet IN, maar eene andere lijn I*h* met BC evenwijdig zoude zijn.

GEVOLG.

Indien men eene zijde [AD] van een driehoek [DAE] in zoo vele gelijke deelen deelt als men wil, en uit ieder eene lijn evenwijdig aan de grondlijn [ED] trekt; zullen die lijnen de andere zijde [AE] in het zelfde aantal gelijke deelen snijden.

AAN-

AANMERKING. Hier door kan men het 8 en het 9 Werkstuk van het I. Boek oplossen.

XXXVI. VOORSTEL. Fig. 47.

Indien men de vier zijden van eenigen ongeschikten vierhoek [DCBA] in twee gelijke deelen deelt, zullen de lijnen [HG, GF, FE, EH], die de stippen daar de deeling geschied is vereénigen, een parallelogram uitmaken.

SIMPSON I. 29.

BEREIDING. Men trekt de diagonalen DB, AC.

BEWIJS. Men besluit uit het XXXV Voorstel dat HG en EF parallel zijn aan AC: en HE en GF aan DB: waaruit het voorstel door het IX. Voorstel volgt.

I. AANMERKING. Uit het geen in II. 13. en IV. 2. zal gezegd worden, valt gemakkelijk optemaken dat de ruimte HGFE welke het parallelogram beslaat, de helft is van die welke de vierhoek ADCB bevat.

I. GEVOLG.

Indien de gegeven vierhoek een regthoek, of een vierkant, ware, zoude het *parallelogram* HGFE ook een regthoek, of een vierkant, zijn.

II. GEVOLG. Fig. 46.

Indien DCBA een vierkant ware, en de stippen H, G, F, E niet op de helft der zijden AD, DC, CB, BA, maar op iedere zijde, op gelijke afstanden der hoeken, ieder in zijn rang, genomen worden [AH = DG = CF = BE] zal de figuur ook een vierkant zijn.

SIMPSON I. 28.

II. AANMERKING. Dit zal in II. 38. nader op alle veelhoeken toegepast worden.

TWEEDE BOEK.

OVER DEN INHOUD VAN REGTLIJNIGE FIGUREN.

INLEIDING.

I. BEPALING.

De ruimte welke tusſchen de lijnen begrepen is waaruit eene vlakke figuur beſtaat, wordt de *inhoud*, ook wel de *oppervlakte*, van die figuur genoemd.

St. I. Bep. 18. — L. G. III. Bep. 7.

II. BEPALING.

Figuren, welke gelijken inhoud, of gelijke oppervlakte hebben, worden gezegd *gelijkhaltig* te zijn.

I. AANMERKING. Doorgaans worden zoodanige figuren ook *gelijke* figuren genoemd: maar dan wordt die benaming in eenen meer beperkten zin genomen, dan wanneer men *gelijke figuren* de zulke noemt, waarvan alle de deelen, ieder aan ieder, onderling gelijk zijn, en die, gevolgelijk, op elkander gelegd geheel zouden overeenkomen: gelijk het geval was voor de driehoeken waarvan in Voorſtel 21, 22, 25, 26. van het I. Boek geſproken is. Bij deze wordt dan de gelijkheid in eenen ruimeren zin genomen, dan bij de zoodanige wier inhouden alleen gelijk zijn. Ik heb, om alle dubbelzinnigheid te vermijden, in navolging van LE GENDRE [III. Bep. 1] *gelijkhaltige figuren* (*figures équivalentes*) de zulke genoemd, welke alleen in inhoud gelijk zijn: terwijl ik door *gelijke* die blijf verſtaan, welke in alle opzigten gelijk zijn: en om ook, zelf in de teekens, alle dubbelzinnigheid te vermijden, zal ik beſtendig het teeken $=$ voor de ſtrikte gelijkheid, en het teeken ∞, dat men voorheen ook voor gelijkheid gebruikte, enkel voor gelijken inhoud te hebben, of *gelijkhaltig* te zijn, bezigen.

II. AANMERKING. Er kunnen echter gevallen zijn, waarin het gebruik van de uitdrukking *gelijk zijn* niet dubbelzinnig is, en de omſtandigheden aanwijzen, dat men alleen van *gelijkhaltig te zijn* ſpreken kan: bijv. wanneer men zegt dat eene figuur *gelijk* is aan de ſom van verſcheide andere: of dat eene figuur, een driehoek bijv. gelijk is aan eene andere, die klaarblijkelijk van gedaante verſchilt: bijv. aan een vierkant. Het wijst zich van zelf aan, dat als dan *gelijk*, eigenlijk *gelijkhaltig* aanduidt.

III.

III. AANMERKING. Insgelijks wanneer men, het woord figuur afzonderlijk gebruikende, zegt b. v. een driehoek, een parallelogram enz. is het dubbeld, of de helft van een ander, verstaat men altijd daar door den inhoud van dien driehoek, of van dat parallelogram.

III. BEPALING. Fig. 22.

Wanneer men in eene regtlijnige figuur eene zijde voor grondlijn, of *bazis*, aanneemt, wordt de loodlijn uit den top op die grondlijn nedergelaten, de *hoogte* van de figuur genoemd. In △ CAD, is AB de hoogte, zoo CD de grondlijn is; en CH is de hoogte zoo AD voor grondlijn genomen wordt.

EUCL. VI. Bep. 4. — St. VI. Bep. 4. — L. G. III. Bep. 5.

AANMERKING. De reden waarom de loodlijn de hoogte genoemd wordt, blijkt uit I. II. Gev. I.

GEVOLG. Fig. 40.

Wanneer eene figuur zoodanig gesteld is, dat er over de grondlijn [CD] geen *top* staat, maar wel eene zijde [AB] aan de grondlijn evenwijdig; zal de *hoogte* der figuur bepaald worden door de loodlijn [AE] welke tusschen die zijde en de grondlijn getogen wordt.

L. G. III. Bep. 4 en 6.

IV. BEPALING. Fig. 50 en 51.

Parallelogrammen [MBCL, MDEL, IDEH, fig. 50.] worden gezegd tusschen de zelfde evenwijdige lijnen, [AF, GN] te staan, als eene [GN] dier evenwijdige, of een gedeelte [ML, IH] derzelve, hun tot grondlijn, en de andere [AF], of een gedeelte derzelve [BC, DE] voor tegenovergestelde zijde strekt.

Driehoeken [ADI, AEI, HKL, fig. 51.] worden gezegd tusschen de zelfde evenwijdige lijnen [BK, AL] te staan, als eene [AL] dier lijnen, of een gedeelte [AI, HL] daarvan, hun tot grondlijn strekt: en hunne toppen [D, E, K] de andere evenwijdige lijn [BK] raken.

AANMERKING. De zelfde bepaling als voor de parallelogrammen heeft plaats voor alle de figuren waarin twee zijden evenwijdig zijn aan elkander, en eene dezer de grondlijn is: en de zelfde als voor de driehoeken geldt voor alle de fi-

figuren uit een oneven getal zijden bestaande, wanneer de zijde over een der hoeken staande voor grondlijn genomen wordt.

GEVOLG.

Figuren die tusschen de zelfde evenwijdige lijnen staan zijn even hoog: en die even hoog zijn kunnen tusschen de zelfde evenwijdige lijnen gesteld worden.

Uit I. 13. en hier Bep. III.

V. BEPALING. Fig. 41.

Een regthoek [ABDC] wordt gezegd de regthoek uit twee lijnen [E, F] te zijn, wanneer de grondlijn (CD] des regthoeks [ABDC] gelijk is aan eene van die lijnen [E] en de regthoekszijde [AC] aan de andere [F].

EUCL. II. Bep. 1. — St. II. Bep. 2.

I. AANMERKING. Wanneer de twee lijnen [AC, CD] welke den regthoek uitmaken gegeven zijn, is de geheele regthoek gegeven, en allezins bepaald. Want de hoeken alle regt zijnde [Bep. 18.] hebben zij alle eene bepaalde en gelijke grootte [I. 2.] en uit een en het zelfde stip C of D, kan maar eene eenige loodlijn getrokken worden [I. 11. Gev. 2.]: zoo dat uit twee gegeven lijnen maar eene eenige regthoek gemaakt kan worden. Hetgeen, in andere woorden, dit gevolg oplevert.

I. GEVOLG.

Alle regthoeken, uit gelijke, of de zelfde, lijnen gemaakt, zijn, in alle opzigten, gelijk.

II. AANMERKING. Dit gevolg wordt, te regt, onder de *Axiomata* geplaatst. KOENIG zegt, hieromtrent, met reden [op EUCL. II. *Axioma* 2.] „ dit is uit eene der eerste „ gronden van alle onze redekavelingen blijkbaar, welke „ vordert dat twee dingen volkomen gelijk zijn als er nergens verschil is tusschen een eenig der deelen waaruit „ zij bestaan."

III. AANMERKING. Dit gevolg heeft geen plaats voor parallelogrammen: om dat, tot derzelver bepaling, niet alleen de grootte der zijden, maar ook die van den hoek welken twee zijden onderling maken, vereischt wordt. De inhoud immers van twee parallelogrammen, uit gelijke lij-

lijnen bestaande, verschilt naar mate die hoek van den regten hoek afwijkt: en wordt kleiner als die afwijking grooter wordt. Zoo is in fig. 43. ▭ CABD > ▭ C*ab*D > ▭ C*αβ*D, (gelijk uit het gevolg van het tweede voorstel blijken zal) hoewel de zijden CA, C*a*, C*α* gelijk zijn.

IV. AANMERKING. Men duidt dikwijls den regthoek [ABDC, fig. 41.] aan door de drie letters welke eenen der hoeken bepalen: bijv. met te zeggen regthoek ACD. Het is om die reden dat bij velen, vooral onder de Ouden, en die welke derzelver trant stiptelijk volgen, drie letters van eene lijn [fig. 1.] agtereenvolgend geplaatst, den regthoek te kennen geven van de twee lijnen door die letters aangeduid: als bijv. regthoek ACB, om te zeggen den regthoek uit AC, en BC: regthoek ABC om te zeggen den regthoek uit AB en BC. De middelste letter is die, welke, met de eerste en laatste vereenigd, de lijnen aanduidt die de zijden van den regthoek zullen uitmaken. Van daar de uitdrukking der Ouden, het *begrepene* onder, of door, twee lijnen, om te zeggen den inhoud des regthoeks uit die lijnen gemaakt. Zoo is fig. 41. ▭ ABDC het *begrepene* onder, of door, de lijnen E en F.

Somtijds ook duidt men den regthoek aan door de letters aan de uiteinden der diagonaal staande: bij voorbeeld ▭ CB, om den regthoek ABDC aantewijzen.

II. GEVOLG. Fig. 48.

Het vierkant [ACEG] op eene lijn GE gesteld, d. i. het vierkant van, of op, die lijn, kan beschouwd worden als een regthoek door twee gelijke lijnen, AG, GE; of CE, EG; of EG, EG; gemaakt.

St. I. Bep. 33.

V. AANMERKING. Van daar de uitdrukking der Ouden, eene lijn *kan* zoo veel, de *magt* van eene lijn, het *vermogen* van eene lijn, om den inhoud van het vierkant op die lijn uittedrukken.

III. GEVOLG.

Vierkanten van, of op, gelijke lijnen, zijn in alle opzigten gelijk: en wanneer twee vierkanten in alle opzigten gelijk zijn, zijn ook de lijnen waarop zij staan gelijk.

VI.

VI. BEPALING. Fig. 52.

Wanneer men uit eenig ſtip [G] op de diagonaal [CB] van een parallelogram [CABD] lijnen [FI, HE] trekt evenwijdig aan de zijden des parallelograms: noemt men *parallelogrammen om de diagonaal* die [CHGI, GFBE] door welke de diagonaal gaat: en *aanvulſels* van deze, de twee overige parallelogrammen [HAFG, GEDI] door welke de diagonaal niet gaat. De geheele ruimte [AFGEDCA] door een der parallelogrammen om de diagonaal en de beide aanvulſels begrepen, draagt bij de Ouden den naam van *Gnomon.*

EUCL. II. Bep. 2. — St. I. Bep. 31.

GEVOLG.

Wanneer het parallelogram een regthoek is, zijn de parallelogrammen om de diagonaal, gelijk mede de aanvulſels, regthoeken: wanneer het een vierkant is, zijn de parallelogrammen om de diagonaal vierkanten, en de aanvulſels zijn regthoeken.

VII. BEPALING. Fig. 55. *b.*

Men noemt *regthoekig Trapezium* een ongeſchikte vierhoek [CAFE] waar van twee zijden [AC, FE] op de grondlijn [AF] regthoekig ſtaan.

St. I. Bep. 41.

I. AFDEELING.

OVER DEN INHOUD VAN REGTHOEKEN EN VIERKANTEN, OP GEGEVEN LIJNEN GESTELD, OF UIT DE VERDEELING VAN DEZE VOORTSPRUITENDE.

I. VOORSTEL. Fig. 44.

De ſom van verſcheiden regthoeken [LI, QH, PG], die de zelfde hoogte, doch verſchillende grondlijnen, hebben, is gelijk aan den inhoud van éénen regthoek [LG] wiens hoogte de zelfde, en wiens grondlijn de ſom van alle de gegeven grondlijnen is.

EUCL. II. 1. — St. II. 1.

BE-

BEREIDING. Men ſtelt de verſchillende regthoeken met de gelijke zijde, die de gemeene hoogte is, tegen elkander: dan maken zij [I. 4, 14.] éénen regthoek L F G K uit.

BEWIJS. Het voorſtel blijkt om dat de grondlijn K G des regthoeks L F G K de ſom is der grondlijnen K I + I H + H G.

I. GEVOLG. Fig. 48.

Het vierkant [A E] van eene lijn [G E] heeft den zelfden inhoud als de ſom der regthoeken [A F, B E] uit de geheele lijn [G E] met ieder der deelen [G F, F E], waarin zij verdeeld is, ſamengeſteld.

EUCL. II. 2. — St. II. 2.

II. GEVOLG. Fig. 48.

Indien eene lijn [G E] in twee deelen [G F, F E] gedeeld is, heeft de regthoek [G D] uit die gehele lijn [G E] en een der deelen [F E], gelijken inhoud als het vierkant [I E] op dat deel en den regthoek [H F] der beide deelen [G F, F E] te ſamen.

EUCL. II. 3. — St. II. 3.

III. GEVOLG. Fig. 49.

Indien van twee regthoeken [IHPQ en NOHI] die de zelfde grondlijn, of gelijke grondlijnen, hebben, de een [I H P Q] voor hoogte heeft eene lijn [I Q] die de helft is van de hoogte [I N] des anderen; zal de inhoud van den eerstgemelden regthoek [I H P Q] de helft zijn van die des tweeden [I H O N]. Het zelfde heeft plaats indien de hoogten gelijk zijn, maar de grondlijn [IQ] van den eenen [PQIH] de helft is van de grondlijn [NI] van den anderen [IHON].

AANMERKING. Welk deel de hoogte zij van de hoogte, de grondlijnen gelijk zijnde; of welk deel de grondlijn zij van de grondlijn, de hoogten gelijk zijnde; het zelfde deel zal de eene regthoek van den anderen zijn.

II. VOORSTEL. Fig. 44.

Het verſchil der inhouden van twee regthoeken [K L P H en Q P H I] die op verſchillende grondlijnen [K H, H I] ſtaan, doch gelijke hoogte hebben, is gelijk aan een regt-

 hoek

hoek [LQIK] die de zelfde hoogte heeft en wiens grondlijn [KI] het verfchil is der beide grondlijnen [KH, HI].

BEREIDING. Men plaatst den kleinften regthoek QPHI binnen eenen der hoeken KHP van den grootften, zoo dat de zijde IH op de zijde KH, en dus PH op PH ligge.

BEWIJS. Om dat de grondlijn KI = KH — IH is.

AANMERKING. Wanneer men het voorgaande voorftel met dit vergelijkt, ziet men duidelijk dat men uit beide een algemeener voorftel kan opmaken, te weten: „ De fom of „ het verfchil van verfcheide regthoeken die op verfchil„ lende grondlijnen ftaan, maar gelijke hoogte hebben, is „ gelijk aan den inhoud van eenen regthoek die van ge„ lijke hoogte is, en tot grondlijn eene lijn heeft gelijk „ aan de fom van alle de grondlijnen, of aan het verfchil „ van de grootfte en de fom der overige."

III. VOORSTEL. Fig. 48.

Indien eene lijn [GE] naar welgevallen in twee deelen [GF, FE], het zij gelijke, het zij ongelijke, gedeeld wordt: is het vierkant [AE] op de gehele lijn, de fom van de vierkanten [AI, IE] op ieder deel, en van den dubbelen regthoek [IG en IC] op beide de deelen.

EUCL. II. 4. — St. II. 4. — L. G. III. 8.

BEWIJS. Uit de V. Bepaling en Voorftel I. met het 1 en 2 Gevolg.

I. AANMERKING. Dit voorftel is de *Geometrifche uitdrukking* van de *Algebraifche Formule* $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$: waarom ook die deelen in de figuur zijn aangewezen: wel verftaande dat men in die overbrenging van uitdrukkingen vooronderftelt, het geen in het IV. Boek Voorft. IX. Gev. 2 en 5 zal bewezen worden; te weten, dat men voor het vierkant op eenige lijn, of voor den regthoek uit twee lijnen, ftelt het quadraat of de tweede magt van een getal, of het product van twee getallen.

I. GEVOLG.

Indien eene lijn in twee gelijke deelen gefneden wordt, is het vierkant van de gehele lijn, het viervoud van het vierkant op een der deelen.

II. GEVOLG.

Het vierkant [AI] van een der deelen [GF] heeft gelijken inhoud als het verfchil tusfchen het vierkant

van

van de geheele lijn en de ſom van het vierkant des tweeden deels, met den dubbelen regthoek der beide deelen te ſamen.

II. AANMERKING. Men kan dit tweede gevolg ook uitdrukken met te zeggen, dat „ het vierkant op een der deelen ge„ lijk is aan het verſchil tusſchen het vierkant op de ge„ heele lijn, en den *Gnomon* [Bep. VI]"

III. AANMERKING Men kan de lijn GF beſchouwen als het verſchil van twee gegeven lijnen GE en FE; en dan wordt het zelve uitgedrukt, in plaats van door □ op GF ∞ □ op GE − □ op FE — 2 Rh. uit GF, EF; door, □ op GF ∞ □ op [GE — FE] ∞ □ op GE — □ op FE — 2 Rh. uit GE, FE + 2 □ op FE ∞ □ op GE + □ op FE — 2 Rh. uit GE, FE; en dit levert op het volgend

III. GEVOLG.

Het vierkant van het verſchil tusſchen twee lijnen is gelijk aan het verſchil tusſchen de ſom der vierkanten van iedere lijn, te ſamen genomen, en den dubbelden regthoek uit beiden.

IV. AANMERKING. Dit derde Gevolg is de *Geometriſche uitdrukking* van deze *Algebraïſche Formule* $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. L. G. III. 9.

V. AANMERKING. Dit ons derde Voorſtel kan veel algemener uitgedrukt worden op deze wijze. „ Indien eene „ lijn in zoo vele deelen als men begeert geſneden is, „ wordt het vierkant van de geheele lijn gevormd door „ de ſom van de vierkanten op ieder deel, en de „ dubbele ſom der regthoeken, die uit alle de deelen, „ twee aan twee genomen, gemaakt kunnen worden." Want ſtel de lijn in verſcheiden deelen *a*, *b*, *c* geſneden: zoo is door ons Voorſtel, □ uit [*a* + *b* + *c*] ∞ □ uit [*a* + *b*] + 2 Regth. uit [*a* + *b*] en *c* + □ uit *c*: Maar het □ uit [*a* + *b*] en den regthoek uit [*a* + *b*] en *c* door dit Voorſtel, en door het I. ontwikkelende, heeft men □ uit [*a* + *b* + *c*] ∞ □ uit *a* + 2 regth. uit *a* en *b* + □ uit *b* + 2 regth. uit *a* en *c* + 2 regth. uit *b* en *c* + □ uit *c*, of, alles in orde ſchikkende, □ uit [*a* + *b* + *c*] ∞ □ uit *a* + □ uit *b* + □ uit *c* + 2 regthoeken uit *a*

 en

en b + 2 regthoeken uit a en c + 2 regthoeken uit b en c.

VI. AANMERKING. Wanneer men in acht neemt het geen wij in de I. Aanmerking gezegd hebben en in IV. 9. Gev. 2 en 5. bewijzen zullen, dat men van de vermenigvuldiging en tweede magten van getallen verstaan kan het geen wij hier van regthoeken en vierkanten zeggen: wordt de voorgaande Geometrische uitdrukking deze *Algebraische Formule*. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + 2(a + b) c + c^2$: het geen den regel oplevert dien men volgt om den quadraat-wortel uit een getal te trekken: Zie St. Inl. V, *def.* 15. en ons *Aanhangsel*. Die zelfde *Formule* nader ontwikkeld geeft, $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$: en het zijn die deelen welke in de 53 figuur aangewezen worden.

IV. VOORSTEL. Fig. 56.

Indien eene lijn [AD] in twee deelen [AC, CD] naar willekeur gesneden wordt; is het vierkant op de geheele lijn [AD] te samen met het vierkant van een der deelen [CD], van gelijken inhoud als tweemaal de regthoek uit de geheele lijn [AD] en dat deel [CD] te samen met het vierkant op het ander deel [AC].

EUCL. II. 7, — St. II. 7.

BEREIDING van de figuur. Men stelle op AD zijn vierkant ADFK, neme ED = CD, trekke EL en CI (verlengd) evenwijdig aan AD, en aan FD: neme op DF (verlengd) FG = CD = IF, en voltooije het □ IFGH.

I. BEWIJS. Uit de beschouwing dat ▭ ALED ∞ ▭ MHGE.

AANMERKING. Men kan dit voorstel en de vijf volgende, zeer gemakkelijk, bewijzen uit de Algebraische uitdrukkingen, waarvan in de Aanmerkingen I. en V. op het voorgaand voorstel gesproken is, en zonder behulp van eenige figuur: waarom wij die bewijzen, *bewijzen zonder figuur* zullen noemen.

II. BEWIJS. Zonder figuur. Zij $(a + b)$ de lijn: a en b hare deelen. $(a + b)^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 = a^2 + 2ab + 2b^2 = 2(a + b) b + a^2$.

V. VOORSTEL. Fig. 58.

Indien eene lijn [AB] in twee gelijke [AC = CB] en in twee ongelijke deelen [AD, DB] gedeeld wordt, zal de regthoek uit de ongelijke deelen [AD en DB] te sa-

famen met het vierkant op het middelste stuk [CD] gelijk zijn in inhoud aan het vierkant op de halve lijn [CB of AC].

EUCL. II. 5. — St. II. 5.

BEREIDING voor de figuur. Maak op AC het □ CAFH: neem AE = AD; voltooi den regthoek AIBE; trek DG evenwijdig aan AF: dan is ▭ BDLI de regthoek uit AD en DB, en □ HGLK het □ op CD.

I. BEWIJS. Uit de beschouwing der figuur, waarin ▭ CKIB ∞ ▭ AFGD.

II. BEWIJS. Zonder figuur. Zij $(a + b)$ de lijn; dus $\left(\frac{a + b}{2}\right)$ de halve lijn; $\frac{a + b}{2} - b$ het middelstuk. Nu is $ab + \left[\frac{a + b}{2} - b\right]^2 = ab + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - 2\left(\frac{ab + b^2}{2}\right) + b^2 =$

$$\frac{4ab + a^2 + 2ab + b^2 - 4ab - 4b^2 + 4b^2}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2.$$

VI. VOORSTEL. Fig. 59.

Indien men eene regte lijn [AB] in twee gelijke deelen [AC, CB] deelt, en ze naar welgevallen verlengt (tot in D); zal de regthoek uit de geheele aldus verlengde lijn en het bijgevoegde stuk [AD en DB] te famen met het vierkant op de helft [BC] der gegeven lijn [AB], gelijkhaltig zijn aan het vierkant van de lijn [CD], gevormd uit de helft [CB] der gegeven lijn en het bijgevoegde stuk DB.

EUCL. II. 6. — St. II. 6.

BEREIDING voor de figuur. Maak op CD het vierkant CDGH; neem DL = DB: voltooi den regthoek ADLI; trek uit B, BF // DG; dan is ▭ ADLI de regthoek van AD en BD, en □ KEFH het □ op BC.

I. BEWIJS. Uit de beschouwing der figuur, waarin ▭ CKIA ∞ ▭ LGFE.

 II.

II. BEWIJS. Zonder figuur. Zij a de lijn, b het aangevoegde stuk: dus

$$(a+b)\,b + \frac{a^2}{4} = ab + b^2 + \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)b + b^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2.$$

I. AANMERKING. Het blijkt duidelijk dat dit voorstel en het voorgaande eigenlijk een en het zelfde voorstel zijn: en dat zij onderling enkel hierin verschillen, dat AD in Voorstel V. het verschil, en in dit voorstel de som is van AB en DB.

II. AANMERKING. Vermits in dit voorstel □ op CD ∞ □ op BC + Rh. uit BD, AD: en dus □ op BC ∞ □ op CD − Rh. uit BD, AD, daar in het voorgaand voorstel □ op BC ∞ □ op CD + Rh. uit BD, AD: is in dit voorstel het vierkant op de helft der lijn gelijk aan het verschil, en in het voorgaand aan de som van een vierkant en een regthoek. In de stelkunde zoude men zeggen, dat hier BD *negatief* zijnde ten opzigte van BD in het voorgaand voorstel, om dat het aan de andere zijde van het stip D valt, de regthoek uit AB, BD *negatief* is.

VII. VOORSTEL. Fig. 57.

Indien eene lijn [AD] naar welgevallen in twee deelen [AC, CD] gesneden is, en men voegt er in de verlenging een der deelen bij [bijv. DB = CD], zal het vierkant op de aldus verlengde lijn [AB] gelijkhaltig zijn aan vier malen den regthoek uit de gegeven lijn en het bijgevoegde stuk [BD], te samen met het vierkant van het ander stuk [AC].

EUCL. II. 8.

BEREIDING der figuur. Men plaatse op AB het vierkant ABGK, neme EB = EF = DB = CD: trekke EO en FL // AB, en DH, CI // BG.

I. BEWIJS. □ LKIM is het □ op AC: ▭ LMPO = ▭ OPCA = ▭ IHNM = ▭ HGFN: bij ieder dezer een der vier □□ MNQP, QNFE, EQDB, DQPC gevoegd, heeft men 4 regthoeken elk ∞ ▭ ADQO ∞ Rh. uit AD, DB.

II. BEWIJS. Zonder figuur. Zij $a + b$ de lijn: b het aangevoegde stuk: dan is $[a + b + b]^2 = (a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 = 4(a + b)b + a^2$.

VIII.

VIII. VOORSTEL. Fig. 60.

Indien eene lijn [AB] gesneden is in twee gelijke deelen AC, CB, en in twee ongelijke [AD, DB]; zullen de vierkanten der ongelijke deelen [AD, DB] te samen genomen eenen inhoud bevatten, die dubbeld is van den inhoud der vierkanten van de halve lijn [AC] en van het stuk [CD] tusschen de helft [AC] en het kleinste deel [DB] begrepen, ook te samen genomen.

EUCL. II. 9.

BEREIDING voor de figuur. Men rigte op AD in D eene loodlijn DI gelijk aan de geheele lijn AB, en voltooije den regthoek ADIL. Zij DG = CB = AC: zij DF = DB. Men trekke uit G en F, GM en FN // AB, voltooije het vierkant FEBD, neme KH = DB: en trekke HQ // AB.

I. BEWIJS. Dan is □ NFIL het □ op AD; □ FEBD het □ op DB: □ LKPM = □ MPCA = ▭ MPON + ▭ NOCA is het □ op AC: □ PGFO = □ PHQG zijn vierkanten op CD: En □ FEBD = ▭ OEBC − □ OFCD = ▭ NOCA − □ KIQH; waaruit het besluit volgt.

II. BEWIJS. Zonder figuur. $(a+b)$ is de lijn: $\frac{a+b}{2}$ de halve lijn. $\frac{a+b}{2} - b$ het begrepen stuk. Nu is

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left[\frac{a+b}{2} - b\right]^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 -$$

$$(a+b)\,b + b^2 = \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 4ab - 4b^2 + 4b^2}{4}$$

$$= \frac{2a^2 + 2b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2} \text{: en dus}$$

$$a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right].$$

IX. VOORSTEL. Fig. 61.

Indien eene lijn [AB] in twee gelijke deelen [AC, CB] gedeeld wordt en men verlengt ze naar welgevalle tot in D: zal het vierkant der geheele verlengde lijn [AD] te samen met het vierkant op het aangevoegde deel eens zoo veel inhoud beslaan als het vierkant op de halve lijn [AC of CB], en het vierkant der lijn [CD]

uit de halve lijn [CB] en de verlengde [BD] samengesteld, ook te samen genomen."

" EUCL. II. 10.

BEREIDING voor de figuur. Men stelle het vierkant ADIL op AD: men verlenge AD, en neme D*b* = BD: verder DF = BD, FG = BC = AC; trekke uit F en G de lijnen FN en GM evenwijdig aan AD, en uit B en C, BR en CK // aan DI: men voltooije het vierkant DF*eb*.

I. BEWIJS. Dan zijn □□ LKPM, MPON vierkanten op AC; □ PGDC is het □ op CD, en ▭ KIGP + ▭ NOCA + □ F*eb*D maken ook een □ op CD uit.

II. BEWIJS. Zonder figuur. *a* is de lijn, dus $\frac{a}{2}$ de halve; *b* de verlenging. Dus $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + ab + b^2 = \frac{a^2 + 2ab + 2b^2}{2} = \frac{(a + b)^2 + b^2}{2}$: en dus $(a + b)^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2\right]$.

AANMERKING. Het blijkt, en uit den aard der zaken, en uit de figuren, dat dit voorstel en het voorgaande eigenlijk één éénig voorstel zijn, maar dat hier AD > AB, en daar AD < AB.

X. VOORSTEL. Fig. 62.

Het verschil van twee vierkanten [GCAH en KIBC] op twee ongelijke lijnen [GC, KC] gesteld, heeft gelijken inhoud als de regthoek uit de som [GC + KC] en het verschil [GC — KC] van de beide lijnen.

L. G. III. 10.

BEREIDING. Stel het kleinste vierkant KIBC in den hoek van het grootste. Verleng HG, AC zoo, dat GF = CD = KC. Trek FD en verleng IK tot L en E.

BEWIJS. Uit Voorstel III, I, en uit Bep. V, Gev. I.

I. AANMERKING. Dit voorstel is de *Geometrische uitdrukking* van deze *Algebraische Formule:* $a^2 - b^2 = [a + b] \times [a - b]$.

I. GEVOLG. Fig. 58.

Het vierkant [AFHC] op de helft [AC] van eene lijn

lijn [AB], is grooter dan de regthoek [LB] van de twee ongelijke deelen [AD, DB] die te samen de zelfde lijn [AB] uitmaken: en is derhalve de grootste der regthoeken die uit de deelen van eene regte lijn gemaakt kunnen worden.

BEWIJS. Immers ▭ LIBD ∞ ▭ LKCD + ▭ KIBC ∞ ▭ LKCD + ▭ FGDA en dus < □ FHCA.

II. GEVOLG. Fig. 58.

De som der vierkanten op twee ongelijke deelen [AD, DB] van eene lijn, is kleiner dan de som der vierkanten op de beide gelijke deelen [AC, CB].

BEWIJS. Uit III. is, □ op DB + □ op AD + 2 Rh uit AD.DB ∞ □ op AB = 4 □ op AC.
maar Gev. 1. 2 Rh uit AD.DB < 2 □ op AC.
derhalve □ op DB + □ op AD > 2 □ op AC of □ op AC + □ op CB.

AANMERKING. Het blijkt uit die twee gevolgen, dat het vierkant van de helft eener lijn het *maximum* is der regthoeken welke uit twee deelen van die lijn gemaakt kunnen worden: en dat het dubbelde vierkant op de helft, of de som der vierkanten op de twee helften van eene lijn, het *minimum* is van de som der vierkanten op de deelen.

D. G. §. 442.

II. AFDEELING.

OVER DEN INHOUD VAN DRIEHOEKEN EN PARALLELOGRAMMEN.

XI. VOORSTEL. Fig. 50.

Parallelogrammen [MBCL en MDEL[die op de zelfde grondlijn [ML] en tusschen de zelfde evenwijdige lijnen [AF, GN] staan, en *derhalve* even hoog zijn, hebben gelijke inhouden, of zijn gelijkhaltig.

EUCL. I. 35. — St. I. 24. — L. G. III. 1.

BEWIJS. Om dat uit Bep. II. en I, 21. Gevolg 1. Δ MBD = Δ LCE: waaruit door aftrekking van Δ CDK en bijvoeging van Δ MKL het voorſtel volgt.

I. AANMERKING. De reden van de gevolgtrekking *en derhalve* enz. in het voorſtel voorkomende, blijkt uit het 1. Gevolg van de IV. Bepaling.

I. GEVOLG.

Een parallelogram MC is gelijkhaltig met den regthoek OPLM, die op de zelfde grondlijn [ML] ſtaat, en wiens tweede zijde [MO] om den regten hoek gelijk is aan de hoogte [MO of PL] van het parallelogram. Zoo dat *de regthoeken de eigenaartige maat zijn van de parallelogrammen.*

L. G. III. 1. Cor.

II. AANMERKING. Door dit voorſtel wordt opgelost het eerſte gedeelte van het XII. Werkſtuk des tweeden Boeks der Werkſtukken.

II. GEVOLG. Fig. 50.

Een parallelogram of regthoek [MOPL, MBCL, MDEL] is het dubbel van een' driehoek [MRL], die op de zelfde grondlijn [ML] ſtaat, en de zelfde hoogte heeft, of tusſchen de zelfde evenwijdige lijnen begrepen is.

EUCL. I. 41. — St. I. 28. — L. G. III. 2 Gev. 1.

BEWIJS. Uit I. 31. Gev. 1. en dit voorſtel: na dat MA // RL getrokken, en dus ▱ MARL voltooid zal zijn.

III. AANMERKING. Indien men dit Gevolg met het 1. Gevolg van het XXXI. Voorſtel in het I. Boek vergelijkt, zal men zien, dat het geen toen bewezen werd plaats te hebben, wanneer de driehoek en het parallelogram éénen hoek gemeen hebben, nu op alle driehoeken, hoe verſchillende ook hunne hoeken van die der parallelogrammen zijn mogen, wordt toegepast.

XII. VOORSTEL. Fig. 50.

Parallelogrammen [MBCL en IDEH] die op gelijke grondlijnen [ML, IH] en tusſchen de zelfde evenwijdige lij-

lijnen [GN en AF] ſtaan, en *gevolglijk*, even hoog zijn, zijn gelijkhaltig.

EUCL. I. 36. — St. I. 25.

BEREIDING. Men trekke MD, LE.

BEWIJS. Uit I. 30. en uit het voorgaande voorſtel, DE als grondlijn beſchouwende waarop ▱ ▱ MDEL en DEHI ſtaan.

I. AANMERKING. De reden van de gevolgtrekking; en *gevolgelijk* enz. blijkt uit Bepaling IV. Gev.

I. GEVOLG.

Van twee parallelogrammen die op de zelfde grondlijn, of op gelijke grondlijnen, ſtaan, heeft dat den grootſten inhoud, waarvan de hoogte de grootſte is: en insgelijks indien de hoogte de zelfde is, doch de grondlijnen verſchillen, is dat parallelogram het grootſte dat op de grootſte grondlijn ſtaat.

II. GEVOLG.

Indien de hoogte van een parallelogram een bepaald gedeelte is van de hoogte van een ander, de grondlijnen gelijk zijnde; of indien de grondlijn een bepaald gedeelte is van de grondlijn, de hoogten gelijk zijnde; is het eerſte parallelogram het zelfde bepaald gedeelte van het tweede, als hoogte van hoogte, of grondlijn van grondlijn (XI. Voorſt. Gev. 1. en I. Gev. 3.).

XIII. VOORSTEL. Fig. 51.

De driehoeken [ADI, AEI, HKL] die op de zelfde grondlijn [AI], of op gelijke grondlijnen [AI, HL], en onder de zelfde evenwijdige lijnen BK en AL ſtaan, *en dus* even hoog zijn, hebben gelijken inhoud, of zijn gelijkhaltig.

EUCL. I. 37. — St. I. 26, 27. — L. G. III. 2. Cor.

BEREIDING. Men vult de ▱ ▱ BI, CI, GL, aan.

BEWIJS. Het wordt uit het XI. Voorſtel van dit Boek, en het 1. Gevolg van het XXXI. Voorſtel van het I. Boek ontleend.

I. AANMERKING. De reden van de gevolgtrekking *en dus* blijkt uit Bep. IV. Gev.

II.

II. AANMERKING. Fig. 51. Men bewijst gemakkelijk uit het ongerijmde, het *omgekeerde* van dit voorstel, te weten, dat „ driehoeken die op de zelfde grondlijn, of op gelijke „ grondlijnen aan den zelfden kant gesteld zijn, en gelijken „ inhoud hebben, tusschen de zelfde evenwijdige lijnen „ staan."

EUCL. I. 39, 40.

I. GEVOLG.

De inhoud van een driehoek is de helft van den inhoud van een regthoek die op de zelfde, of op gelijke, grondlijn staat, en de zelfde hoogte heeft (Voorst. XI. Gev. 1. en 2.). Zoo dat de *regthoeken ook de eigenaartige maat zijn van driehoeken, even als van parallelogrammen.*

St I. 28.

III. AANMERKING. Wij zullen breeder over die maat handelen in het IV. Boek, Voorstel IX. Gev. 1, 5, 6.

IV. AANMERKING. Men kan nu oplossen uit het II. Boek, Werkstuk XII. tweede gedeelte: Werkstuk XXI. en XXIX.

II. GEVOLG.

Van twee driehoeken, die de zelfde hoogte hebben, is die de grootste, welke op de grootste grondlijn staat: en insgelijks, indien de grondlijnen gelijk zijn, is die driehoek de grootste waarvan de hoogte de grootste is.

III. GEVOLG.

Indien de hoogte van een driehoek een bepaald deel is van de hoogte van een' anderen driehoek, de grondlijnen de zelfde zijnde: of de grondlijn van den eenen een bepaald gedeelte is van die des anderen, de hoogte de zelfde zijnde: zal de eerste driehoek het zelfde bepaald gedeelte zijn van den tweeden, als de hoogte van de hoogte, of de grondlijn van de grondlijn (1. Gev. en I. Voorst. Gev. 3.).

V. AANMERKING. Men kan nu oplossen het XIII. Werkstuk van het II. Boek.

XIV.

XIV. VOORSTEL. Fig. 52.

In alle parallelogrammen [A B D C] hebben de aanvulsels [A F G H, G E D I] om de diagonaal gelijken inhoud.

EUCL. I. 43. — St. I. 30.

BEWIJS. Uit I. 21. Gev. toegepast eerst op de ΔΔ C A B, B C D, dan op de ΔΔ G F B en B G E, H G C en C G I.

AANMERKING. Op dit voorstel steunt de oplossing van alle de Werkstukken waarin *op eene gegeven lijn* een parallelogram, regthoek, of driehoek gesteld moet worden, die gelijk zij aan eenige andere regtlijnige figuur. En reeds nu kan men uit het II. Boek, het XIV, XV, XVI, XXIII en XXIV. Werkstuk oplossen.

XV. VOORSTEL. Fig. 55*a*.

De inhoud van een *trapezium*, of ongeschikten vierhoek [E C A B], waarvan twee zijden [A C, E B] onderling evenwijdig zijn, is gelijk aan den halven regthoek uit de som der evenwijdige zijden [C A, E B] en de loodlijn [C D] tusschen dezelve nedergelaten.

BEREIDING. Men trekt de ⊥⊥ C D, A F, die gelijk zijn.

BEWIJS. Uit de beschouwing dat het *Trapezium* E C A B ∞ Δ E C D + ▭ C A F D + Δ F A B: en derhalve [Voorst. XI. en Gev. 2.] ∞ = ½ Rh uit E D, D C + Rh uit D F, C D + ½ Rh uit F B, D C: d. i. Voorst. I. *Trapezium* E C A B ∞ ½ Rh uit C D en [C A + E B] ∞ Rh uit C D en ½ [C A + E B].

I. AANMERKING. Dit voorstel wordt bij PAPPUS vooronderstelt in zijne *Lemmata* over APOLLONIUS I. B. *Lem.* 8.

II. AANMERKING. Indien het *trapezium* regthoekig ware zoude A F bijv. met A B overeenkomen, en C D = A F zijn; waaruit voortvloeit dit

GEVOLG. Fig. 55*b*.

De inhoud van een *regthoekig trapezium* [C E F A], is gelijk aan dien van een regthoek, waarvan de grondlijn die van het *trapezium* is, en de andere zijde de halve som der regthoeks-zijden in het *trapezium*.

St. I. 37. — L. G. III. 7.

AAN-

AANMERKING. In IV. 9. Gevolg 8. zal dit gevolg op eene andere wijze uitgedrukt worden.

XVI. VOORSTEL. Fig. 63.

In alle regthoekige driehoeken is het vierkant [DB] van de schuinsche zijde, of *hypotenusa* [AB], gelijk aan de som der vierkanten [BG en CI] van de beide overige zijden [BC en AC].

EUCL. I. 47. — St. I. 32. — L. G. III. 11.

BEREIDING. Men stelt dat de lijn CLK, uit den regten hoek C, evenwijdig aan AD of BE, en dus ⊥ op AB, getogen is: en men trekt de lijnen CD, CE, AF, BI.

BEWIJS. Men bewijst uit I. 21. dat de driehoeken BAI en DAC gelijk zijn, zoo als ook de driehoeken ABF en EBC: en vervolgens uit het 1. Gevolg van het III. Voorstel van dit Boek, dat ▭ AK ∞ □ IC en ▭ KB ∞ □ BG. Waar uit door het 1. Gevolg van het I. Voorstel het besluit volgt.

I. AANMERKING. Dit Voorstel wordt het Voorstel of het *Theorema* van PYTHAGORAS genoemd, en het is algemeen onder dien naam bekend. Men kan het zelve zeer gemakkelijk uit de leer der gelijkvormige driehoeken bewijzen, zoo als wij in het IV. B., Voorstel XV., § Aanm. doen zullen.

II. AANMERKING. Dit Voorstel is slechts een bijzonder geval van een algemeener Voorstel, alle driehoeken, hoe ook genaamd, betreffende: het welk door PAPPUS in zijne *Collectiones mathematicae* (Lib. IV. pr. 1) opgegeven, en door den beroemden CASTILLON merkelijk vermeerderd is: zie de schoone verhandeling van den laatstgemelden in *Mem. de l'Acad. de Berlin* Ao. 1766. p. 351. Wij zullen dit Voorstel in ons XX Voorstel opgeven

III. AANMERKING. Dit Voorstel geeft het middel op door PYTHAGORAS gevonden, en door VITRUVIUS voorgedragen (*Archit.* IX. Cap. 2.), om de juistheid eens *winkelhaaks* te beproeven. Men neme, van den top des regten hoeks af te beginnen, op het eene been eenen afstand van vier, en op het ander eenen afstand van drie deelen, beide op eene goede plein schaal gemeten. Men stelle den passer op de uiteinden dier twee afstanden of lijnen; de passer moet, zoo de *winkelhaak* juist is, eene lengte van vijf deelen bespannen. Wij zullen in de IV. Aanmerking op het VII.

Voor-

Voorstel van het V. Boek nog een ander middel daartoe opgeven.

IV. AANMERKING. Men kan nu uit het II. Boek der Werkstukken oplossen het XXV, XXVII en XXVIII. Werkstuk.

I. GEVOLG.

Het vierkant van eene der zijden [AC] van een regthoekigen driehoek, is gelijk aan den regthoek begrepen onder de schuinsche zijde AB, en dat stuk [AL] van de schuinsche zijde dat door de loodlijn [CK] uit den regten hoek nedergelaten, afgesneden wordt, en aan de gemelde zijde [AC] grenst.

EUCL. X. *Lemma* I. van de 34. propositie.

V. AANMERKING. Dit ligt reeds in het bewijs zelf van dit Voorstel opgesloten, en wordt hier nu maar in woorden uitgedrukt. Het zelfde kan uit de leer der gelijkvormige driehoeken, en ook uit het voorstel van PTOLEMAEUS afgeleid worden: zie IV. 15. Gev. 2 en VI. 7. Aanm. 4.

II. GEVOLG.

In alle regthoekige driehoeken is het vierkant van eene der regthoeks-zijden gelijk aan het verschil der vierkanten op de schuinsche en op de andere regthoeks-zijde: *en dus* gelijk aan den regthoek begrepen onder de som en het verschil van de schuinsche en die regthoeks-zijde.

L. G. III. 11. Gev. 1.

AANMERKING De reden van de gevolgtrekking, *en dus*, blijkt uit het X Voorstel.

III. GEVOLG.

De regthoek uit de schuinsche zijde [AB], en een van hare stukken [AL], is gelijk aan den regthoek uit de som en het verschil dier zelfde schuinsche zijde [AB], en dier regthoeks-zijde [CB] welke aan het ander stuk [LB] grenst. (uit Gev. II. en I.).

IV. GEVOLG. Fig. 22 en 23.

Indien twee regthoekige driehoeken [ABC, ABD] dezelfde hoogte hebben, zijn 1°. de sommen van de vierkanten der schuinsche zijde in den eenen en der grondlijn in

in den anderen gelijk (□ op AD + □ op BC ∞ □ op AC + □ op DB) en 2°. De verschillen der vierkanten van de schuinsche zijden, en der vierkanten van de grondlijnen zijn ook gelijk: (d. i. □ op AD — □ op AC ∞ □ op BD — □ op BC).

VI. AANMERKING. Het tweede gedeelte van dit Gevolg kan ook uitgedrukt worden, gelijk in dit

V. GEVOLG. Fig. 22, 23.

In alle driehoeken [ACD] is het verschil der vierkanten op twee zijden [DA, CA] gelijk aan het verschil der vierkanten van die beide stukken [DB, BC] die op de grondlijn [DC] (zoo noodig verlengd) gemaakt worden door de loodregte lijn [AB] uit den top [A] op die derde zijde, of grondlijn, getogen: en *dus ook* aan den regthoek onder de som en het verschil van gemelde stukken begrepen.

VII. AANMERKING. De reden van de gevolgtrekking, *en dus*, blijkt uit het X. Voorstel.

IX. AANMERKING. Dit vijfde gevolg is reeds door PAPPUS (*Coll. Mathem.* VII. 120.) opgegeven: en daar hij alleen spreekt van het geval [fig. 23.] waarin de loodlijn AB binnen den △ CAD valt, voegt hij er bij: na CD in twee gelijke deelen in F gesneden te hebben, dat „ het verschil der beide vierkanten twee malen den regt„ hoek uit CD en BF (verschil tusschen BD en de „ helft van CD) bedraagt:" en in de daad regthoek uit [BD + BC], of CD en [BD — BC] is ∞ Rh. uit CD en [DF + BF — CF + BF]: of, om dat DF = CF, Rh uit CD en [BD — BC] ∞ 2 Rh uit CD en BF.

VI. GEVOLG.

In eenen regthoekigen gelijkbeenigen driehoek is het vierkant op de schuinsche zijde het dubbeld van het vierkant op de regthoekzijde.

L. G. III. 11. Gev. 2.

X. AANMERKING. Dit is het geval voor de diagonaal eens vierkants ten opzigte der zijde.

XVII. VOORSTEL. Fig. 64.

Indien in eenigen driehoek [DEH], de vierkanten van twee zijden [DH, HE] te samen genomen gelijkhaltig zijn aan het vierkant op de derde, is die driehoek regthoekig: en de regte hoek wordt door beide de zijden, wier vierkanten men samentelt, begrepen.

EUCL. I, 48.

BEREIDING. Men vooronderstelt HI = aan DH en ⊥ op EH, en men trekt EI.

BEWIJS. Door dit Voorstel, en I. 26.

AANMERKING. Dit kan ook uit het ongerijmde bewezen worden.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 65.

Indien men uit den regten hoek [C] van eenen regthoekigen driehoek [ACB] eene loodregte lijn [CL] laat vallen op de schuinsche zijde [AB]; zal het vierkant van die loodlijn [CL] gelijkhaltig zijn aan den regthoek onder de stukken [BL, AL] van de schuinsche zijde begrepen: en *omgekeerd*,

Indien in eenen driehoek, het vierkant van de loodlijn, [CL] uit eenen der hoeken [ACB] op de tegenovergestelde zijde [AB] nedergelaten, gelijkhaltig is aan den regthoek van de stukken [AL, LB] die daardoor op die zijde gemaakt worden, is de gemelde hoek altijd een regte hoek.

EUCL. X. *Lemma* van de 34 propositie.

BEWIJS. Uit het 2 Gevolg van het XVI. Voorstel, uit dat voorstel zelve, en dan uit het II. alle van dit Boek.

BEWIJS. Voor het omgekeerde, of uit het ongerijmde door dit Voorstel: of ook regtstreeks door Voorstel XVI. op beide de ΔΔ BCL en CLA toegepast, door de onderstelling, Voorstel III. en IV. alle uit dit Boek.

I. AANMERKING. Dit voorstel kan ook uit de eigenschappen van den cirkel, of uit die van de gelijkvormige driehoeken bewezen worden, zoo als wij in het V. Boek, VII. Voorstel, 1. Gevolg, en in het IV. Boek, XV. Voorstel, 1. Gevolg, doen zullen.

II. AANMERKING. Dit voorstel is het I. *Lemma* van PAPPUS op het vijfde Boek van APOLLONIUS: die Schrijver voegt er bij, „ dat zoo het gemelde vierkant der lood- „ lijn kleiner is dan de regthoek der deelen welke zij „ van de tegenovergestelde zijde afsnijdt, de hoek stomp „ zal zijn; maar scherp zoo dat vierkant grooter is;" het geen gemakkelijk bewezen wordt: want indien □ op *c*L < ▭ uit BL, LA, zal het vierkant op eene grootere lijn CL daaraan gelijk zijn, en derhalve eenen regten hoek maken: nu is ∠ B*c*A > BCA [I. 20.] en derhalve stomp. Indien □ op *c'*L > ▭ uit BL, LA, zal het vierkant op eene kleinere lijn CL daaraan voldoen, en derhalven eenen regten hoek BCA maken: nu is [I. 20.] ∠ B*c'*A < ∠ BCA, en dus scherp.

GEVOLG.

De lijn [CH], die uit den regten hoek eens driehoeks [BCA] op de schuinsche zijde getrokken, deze in twee gelijke deelen [BH = HA] deelt, is gelijk aan de halve schuinsche zijde: en *omgekeerd*: indien de lijn [HC] uit het midden eener zijde [BA] van eenen driehoek naar den overstaanden hoek [BCA] getrokken, aan de helft dier zijde gelijk is, is die hoek [BCA] regt.

BEWIJS. □ op CL ∞ □ op CH — □ op LH [XVI. Gev. 2.] maar (door dit Voorstel) □ op CL ∞ Rh. uit BL, LA: derhalve □ op CH — □ op LH ∞ Rh. uit BL, LA = Rh. uit [BH — HL] en [BH + HL] ∞ [X] □ op BH — □ op LH; derhalve □ op CH = □ op BH: en CH = BH = HA.

BEWIJS voor het omgekeerde. Trek uit C, CL ⊥ AB; Dan is [XVI. Gev. 2.] □ op CL ∞ □ CH — □ op LH ∞ □ op AH — □ op LH ∞ Rh. uit [AH + LH] en [AH — HL] ∞ Rh. uit AL en LB: derhalve uit het omgekeerde van dit voorstel ∠ ACB regt.

III. AANMERKING. Men kan thans het XVI. en XX. Werkstuk van het II. Boek oplossen.

XIX. VOORSTEL. Fig. 66.

In alle driehoeken, is het vierkant van eene zijde [AB] grooter of kleiner dan de som der vierkanten op de grond-

lijn

lijn [AC] en de derde zijde [BC], naar mate de hoek [ACB] over de eerstgemelde zijde [AB] ftomp, of fcherp is: en het verfchil is de dubbele regthoek van de geheele grondlijn [AC] en het ftuk [DC] van dezelve, begrepen tusfchen den gemelden hoek en de loodlijn [BD] uit den tegenoverftaanden hoek [CBA] getogen.

EUCL. II. 12, 13. — St. II. 8, 9. — L. C. III. 12, 13.

BEWIJS. Uit het XVI. Voorftel neemt men in den driehoek DBA de waarde van het vierkant op AB: vervolgens uit het 2. Gevolg van dat Voorftel, in den driehoek DCA die van het vierkant op BD: en dan uit het 2 Gev. van het X. Voorftel de waarde van het verfchil der vierkanten op AD en DC.

I. AANMERKING. Indien de ∠ BCA regt was, viel de loodlijn BD op BC: en men kreeg wederom het XVI. Voorftel: het ftuk DC als dan *nul* wordende, is de overmaat, of het te kort fchietende van het □ op AB bij de fom der vierkanten op AC en CB, ook *nul*.

II. AANMERKING. Uit het XVI. Voorftel van het I. Boek volgt, dat in het eerfte geval de loodlijn BD buiten, in het tweede binnen den driehoek valt: en dus dat het tweede gedeelte van het Voorftel, ook voor regthoekige en ftomphoekige driehoeken plaats heeft, mits de *hypotenufa*, of fchuinfche zijde, als de grondlijn aangezien, en dus de loodlijn uit dien regten of ftompen hoek getogen worde.

III. AANMERKING. Het XVI. Voorftel, of het *Theorema Pythagoricum* is eigenlijk een bijzonder geval van dit XIX: en dit laatsgemelde kan echter uit de vorige voorftellen niet bewezen worden, zonder het eerstgemelde. Zoo dat men ook hier de waarheid bevestigd vind van het geen 's GRAVESANDE, te regt, in zijne *Logica* §. 1099, als eenen fteiregel heeft voorgedragen: te weten, „ dat men dikwerf een al„ gemeen voorftel niet bewijzen kan, zonder alvorens een „ bijzonder geval van het zelve bewezen te hebben." Wij zullen in het vervolg vele voorbeelden van die waarheid aantreffen, en doen opmerken.

Intusfchen is dit voorftel, even als dat van PYTHAGORAS, maar een bijzonder geval van zeker *Theorema* van PAPPUS dat wij achter dit voorftel in eene algemeene Aanmerking zullen opgeven.

IV. AANMERKING. Dit Voorftel, te weten, dat in alle driehoeken [fig. 66.] □ op AB ∞ □ op AC + □ op BC

 ±

± 2 Rh. uit AC, CD, is een der gewigtigste uit de geheele Meetkunde, gelijk in het vervolg blijken zal: en er kunnen verscheide besluiten uit afgeleid worden, naar mate de △ CAB gesteld is. Indien dezelve gelijkbeenig ware, en wel zoo, dat de beenen CB en BA gelijk waren, zoude de loodlijn BD op het midden van AC vallen, [I. 27. Gev. 4.] en het voorstel zoude geven, □ op AB ∞ □ op BC + □ op AC — 2 Rh. uit AC en ½ AC ∞ □ op BC + □ op AC — □ op AC ∞ □ op BC. Indien de driehoek ABC gelijkbeenig ware, doch zoo dat [fig 67.] AC = AB dan zoude men hebben □ op BC ∞ □ op AC + □ op AB — 2 Rh. uit AB, AD ∞ 2 □ op AB — 2 Rh. uit AB, AD ∞ 2 Rh. uit AB en [AB — AD] ∞ 2 Rh. uit AB, CD: dat is ½ □ op BC ≐ Rh. uit AC, CD, het geen dit gevolg oplevert, reeds door PAPPUS bewezen in zijne *Collec. Mathem.* V. 25. *Theor.* 1.

GEVOLG.

Indien men in eenen gelijkbeenigen driehoek uit het uiteinde van een der beenen [AB] eene loodlijn [BD] neerlaat op het ander been [AC]; is de helft van het vierkant op de derde zijde [BC] gelijkhaltig aan den regthoek uit het been [AC] waarop de loodlijn is neergelaten, en het stuk tusschen die loodlijn [BD] en de derde zijde [BC] begrepen.

ALGEMEENE AANMERKING *over het* XVI. *en het* XIX. *Voorstel.*

Wij hebben in de eerste aanmerking op beide de Voorstellen gezegd, dat zij een bijzonder geval zijn van een uitmuntend voorstel door PAPPUS voorgedragen, en door CASTILLON verder uitgebreid, welke daarenboven heeft aangetoond, het geen door PAPPUS niet gedaan was, hoe beide de gemelde voorstellen daaruit afgeleid kunnen worden. Het voorstel van PAPPUS, hoewel eenvoudig, en reeds door CLAVIUS op EUCLIDES I. 47. N°. 7. voorgedragen, is weinig bekend. Wij zullen het om die reden hier opgeven.

XX VOORSTEL. *Theorema van* PAPPUS. Fig. 69.

Indien men op twee zijden AB, BC, van eenigen driehoek parallelogrammen AEDB, FBCG, naar welgevallen, beschrijft; en uit het stip H waar de zijden ED, GF, dier parallelogrammen, verlengd zijnde zich vereénigen, door den top B van den driehoek eene lijn HBI tot op de grondlijn des driehoeks trekt, alwaar zij met dezelve eenen bepaalden hoek HIC maakt; zal, indien de gemelde lijn binnen den drie-

driehoek valt, het parallelogram AKLC, gemaakt uit de grondlijn AC en de lijn BH onder den gemelden hoek HIC, gelijken inhoud hebben als de som der parallelogrammen AEDB, CBFG, op de zijden des driehoeks beschreven.

BEREIDING. Men trekke de lijnen AK en CL evenwijdig aan IH: verder KL, welke HI in M snijdt.

BEWIJS. Uit I. 31. is EA = DB: ∠ E = ∠ HDB: en uit de bereiding ∠ EKA = ∠ DHB: derhalve is in de △△ DHB en EKA, KA = BH. Om de zelfde reden is LC = HB: derhalve KA = en // LC = en // MI en dus [I. 30.] is KLCA een parallelogram; en wel het parallelogram in het voorstel bedoeld.

Maar (uit Voorst. XI) is ▱ AEDB ∞ ▱ AKHB en ▱ AKHB ∞ ▱ AKMI: gevolgelijk ▱ AEDB ∞ ▱ KMIA. Insgelijks ▱ CGFB ∞ ▱ IMLC: en dus ▱ AEDB + ▱ CGFB ∞ ▱ KMIA + ▱ IMLC ∞ ▱ AKLC.

I. AANMERKING. Wanneer de lijn HI niet binnen, maar [fig. 70.] buiten den driehoek ABC valt, is ▱ AKLC ∞ ▱ CGFB − ▱ AEDB: een geval waar mede CASTILLON het voorstel van PAPPUS verrijkt heeft.

I. GEVOLG. Fig. 69.

∠ KAC = ∠ KAB + ∠ BAC = ∠ BAC + ∠ ABI.

II. AANMERKING. Als de lijn BI buiten den △ ABC valt [Fig. 70.]: is ∠ KAC = ∠ BAC − ∠ BAK = ∠ BAC − ∠ ABI.

II. GEVOLG. Fig. 71.

Toepassing op het Theorema van PYTHAGORAS.

Zij △ ABC regthoekig in B. Men beschrijve op AB en BC de □□ AEDB en CGFB: Men verlenge ED en GF, tot dat zij elkander in H ontmoeten: dan is ∠ DHF regt, en figuur DHFB is een regthoek, waar van HB de diagonaal.

Men verlenge HB tot in I en trekke AK en CL // HI vervolgens KL; dan is [I. 22.] in de △△ LCG en HBF, LG = HF en dus LG = DB = AB; verder is GC = BF = BC. Gevolgelijk is in de △△ LCG en ABC [I. 21.] LC = AC = AK = KL: en ∠ LCG = ∠ BCA: maar ∠ LCG + ∠ BCL = L: derhalve ∠ BCA + ∠ BCL dat is ∠ LCA = L: de figuur AKLC is derhalve een vierkant: men heeft dan door het voorstel van PAPPUS, dat is door dit ons XX Voorstel:

□ op AC ∞ □ op AB + □ op BC, het geen het *Theorema Pythagoricum*, of ons XVI. Voorstel, oplevert.

III. GEVOLG. Fig. 72, 73.

Toepassing op het XIX. *Voorstel.*

Indien de Δ ABC stomphoekig, of scherphoekig, is in B. Men beschrijve op AC het vierkant AKLC: men trekke door B de loodlijn IBH: men neme BH = KA = AC = LC, en trekke uit H door K en L de lijnen HKE, HLG, die evenwijdig zullen zijn, de eerste aan AB, de tweede aan BC. Men rigte uit A, B, C de loodlijnen AE en BD op AB; BF en CG op BC, om aldus de regthoeken AEDB, CBFG te maken.

Dan is uit het Voorstel van PAPPUS:

I. □ op AC, of □ AKLC ∞ ▭ AEDB + ▭ BFGC.

Men trekke verder uit C op AB, zoo noodig verlengd, de loodlijn CSU, en uit A op BC, zoo noodig verlengd, de loodlijn ATX. Dan is in de ΔΔ EAK en ASC; 1°. AK = AC, 2°. ∠ E = L = ∠ ASC: 3°. ∠ EAK + ∠ KAS = ∠ EAS = L = ∠ KAS + ∠ SAC: en derhalve 4°. ∠ EAK = ∠ SAC: en dus [I. 22.] 5°. EA = AS: en derhalve 6°. is figuur EASU een □. Insgelijks 7°. is fig. CTXG een □. Men neme verder AO = AB: CR = CB: en trekke ON // AB en RP // CB: dan zijn 8°. figuur AONB en BCRP de □□ op AB en BC: en 9°. ▭ EOND = ▭ NVSB: en ▭ PFGR = ▭ TZPB [XIV]. Maar 10°. de ▭▭ EOND en PFGR zijn, respectivelijk, de verschillen tusschen den ▭ AEDB en het □ AONB en den ▭ BFGC en het □ BPRC: welke vierkanten op de zijden AB en BC staan.

Zoodra ∠ ABC stomp [fig. 72.], zijn die vierkanten ieder kleiner dan de regthoeken op de zelfde zijden, en het verschil voor beide te samen is ▭ EOND + □ PFGR ∞ ▭ NVSB + ▭ TZPB.

Zoo de ∠ ABC scherp [fig. 73.]; zijn de zelfde vierkanten grooter dan de regthoeken: en het verschil is insgelijks, ▭ EOND + ▭ PFGR of ▭ NVSB + ▭ TZPB.

De eerste dier regthoeken is de regthoek uit NB, of AB, en BS afstand tusschen den stompen hoek B en de

lood-

loodlijn uit C op A B nedergelaten: de tweede is de regthoek uit B P, of B C, en den afftand B T tusfchen ∠ B en de loodlijn A T, op B C nedergelaten: waar door dan uit I. volgt.

II. □ op A C ∞ □ op A B + □ op B C ± [Rh. uit A B en B S ± Rh. uit B C en B T].

Tot zoo ver kan men komen door de kundigheden tot nu toe opgedaan. Maar om te bewijzen dat die twee regthoeken in het bovenftaande vermeld onderling gelijk zijn, moet men zijne toevlugt nemen tot de drie volgende ftukken: 1°. dat de △△ A B T en B S C onderling gelijkhoekig zijn; dat gefchied gemakkelijk: want in de △△ A T C en A S C is ∠ T A C + ∠ T C A = L = ∠ S A C + ∠ A C S: d. is. ∠ S A C ± ∠ T A B + ∠ T C A = ∠ S A C + ∠ T C A ± ∠ B C S: en derhalve ∠ T A B = ∠ B C S: maar ∠ A T B = L = ∠ B S C: derhalve de derde hoek T B A = ∠ S B C: d. i. de twee driehoeken A T B en B S C zijn gelijkhoekig: 2°. tot het geen daaruit volgt, doch eerst in IV. 2. zal bewezen worden, uit gronden echter die met dit Voorftel en alle de voorgaande niets gemeen hebben: t. w. dat als dan de lijnen A B, B T, B C, B S, onderling evenredig zijn: en dan 3°. tot het geen wederom uit die evenredigheid volgt, naar IV. 9. Gev. 3: dat de regthoek uit A B en B S den zelfden inhoud heeft als de regthoek uit B C en B T. Dit dan aangenomen zijnde, volgt uit II. dat

III. □ op A C ∞ □ op A B + □ op B C ± 2 Rh. uit A B en B S. het geen ons XIX. Voorftel uitmaakt.

III. AANMERKING. Men ziet hieruit, 1°. hoe ons XIX. Voorftel zonder behulp van het XVI. d. i. van het *Theorema Pythagoricum* bewezen kan worden: 2°. dat het XIX. en het XVI. Voorftel, beiden, befchouwd kunnen worden als bijzondere gevallen van het XX. d. i. van het Voorftel van PAPPUS. 3°. Dat het *Euclideaansch* bewijs van het voorftel van PYTHAGORAS vrij wat eenvoudiger is dan de wijze waarop hetzelve uit het voorftel van PAPPUS wordt afgeleid. 4°. Dat men het XIX. Voorftel uit dat van PAPPUS niet kan afleiden zonder de leer der gelijkvormige driehoeken en der evenredige lijnen interoepen, d. i. zonder eene leer van eenen anderen aard noodig te hebben: het geen in den *Euclideaanfchen* bewijstrant geen plaats heeft; waaruit dan eindelijk 5°. volgt dat, hoewel het zeer nuttig zij, als zulks gefchieden kan, bijzondere voorftellen tot meer algemeene te brengen, dezelve daaruit afteleiden, en zoo doende het verband van alle de ftukken onderling te doen kennen: die herleiding echter fomtijds moeijelijker bewijzen vereischt, en daarom in het onderwijs niet altijd te verkiezen is.

XXI. VOORSTEL. Fig. 67.

Indien men uit de twee hoeken A en C, die aan de uiteinden van de zelfde zijde [AC] eens driehoeks ABC grenzen, loodlijnen [AE, CD] op de tegenovergestelde zijden trekt, zijn de regthoeken, begrepen onder die zijden [AB, CB] en derzelver stukken [BD, BE] welke aan den zelfden hoek [B] grenzen, gelijkhaltig.

BEWIJS. Uit Voorst. XIX. met het vierkant op AC te nemen in △ ACB als AD, en dan nog eens als AE de loodlijn is.

I. AANMERKING. Indien de ∠ ACB regt is, is regthoek uit AB, BD ∞ □ CB, zoo als wij zulks reeds in het XVIII. Voorstel bewezen hebben, en in het IV. Boek XV. Voorstel, 2 Gevolg, uit de leer der gelijkvormige driehoeken nog bevestigen zullen.

II. AANMERKING. Over die lijnen zal nader gehandeld worden in IV. 14.

XXII. VOORSTEL. Fig. 67.

Indien men uit den top C eens driehoeks [ACB] op de tegenovergestelde zijde [AB] eene lijn [CH] trekt, welke die zijde in twee gelijke deelen [AH = HB] snijdt; is het vierkant van die lijn [CH] te samen met het vierkant van de halve grondlijn [AH] gelijkhaltig met de halve som der vierkanten van de twee overige zijden [CA en CB].

L. G. III. 14.

BEWIJS. Door het XIX. Voorstel, nemende eerst in △ ACH het □ op CA; en dan in △ BCH het □ op CD: waaruit volgt

$$\square \text{ op } CH + \square \text{ op } AH \infty \frac{\square \text{ op } AC + \square \text{ op } CB}{2}$$

AANMERKING. Dit voorstel is reeds opgegeven door SERENUS *de Sectione Coni*, Voorst. XVI. en door PAPPUS *Coll. Mathem.* VII. 122. BEAUFORT heeft het op nieuw voorgedragen in de *Mem. de l'Acad. des Sciences*, 1723. bl. 79. alwaar hij het zelve uit eene eigenschap des cirkels (zie V. 15.) zonder het *Theorema Pythagoricum* te gebruiken, bewijst: het welk hij in tegendeel daaruit, op eene vernuftige wijze, afleidt: gelijk mede ons XXIII Voorstel. Men zie verder over die lijnen, IV. 13.

GEVOLG.

$$\frac{\square \text{ op } AC + \square \text{ op } CB}{2} - \square \text{ op } CH \infty \square \text{ op } AH =$$

$$\tfrac{1}{4} \square \text{ op } AB.$$

d. i.

Indien uit den top eens driehoeks op de overstaande zij-

zijde eene lijn wordt nedergelaten, welke die zijde in twee gelijke deelen deelt, is het vierde gedeelte van het vierkant dier zijde gelijkhaltig aan het verſchil van de helft der ſom van de vierkanten op de twee overige zijden, en het vierkant der nedergelaten lijn.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 40.

In alle parallelogrammen [ABCD] is de ſom der vierkanten van beide de diagonalen [BC, AD] gelijk aan de ſom der vierkanten van de vier zijden [AB, BD, DC, AC].

St. II. 10. — L. G. III. 14. Gev.

BEWIJS. Uit I. 26. en uit Voorſtel XIX.

I. AANMERKING. Indien het parallelogram eene ruit, of een vierkant is, is de ſom der vierkanten van beide de diagonalen het viervouwd van het vierkant op eene der zijden.

II. AANMERKING Dit Voorſtel is ook opgegeven door LAGNY, *Mem. de l'Acad. des Sciences*, 1706 bl. 319: en er volgt uit. dat indien men in eene ruit eene der diagonalen en eene zijde kent, men de andere diagonaal vinden kan.

XXIV. VOORSTEL. Fig. 54.

Indien men in eenen regthoek [ACEG], of in een vierkant, een ſtip I naar welgevallen neemt, van het welk men regte lijnen [IA, IC, IE, IG] naar de hoeken trekt: zullen de ſommen der vierkanten op de lijnen, die naar de tegenovergeſtelde hoeken getrokken worden, gelijk zijn: dat is, □ op AI + □ op IE ∞ □ op IC + □ op IG.

BEWIJS. □ op GI — □ op IE ∞ □ op HI — □ op ID ∞ □ op AI — □ op IC: waar uit volgt □ op GI + □ op IC = □ op IE + □ op AI.

XXV. VOORSTEL. Fig. 68*a*.

Indien men op eene lijn [AB] in twee gelijke deelen gedeeld (in L) eenen regthoekigen driehoek [AGB] ſtelt, waar van de andere regthoekszijde [BG] gelijk is aan de helft van de gegeven lijn: verder van de ſchuinſche zijde [AG] des driehoeks een ſtuk [GH] afſnijdt gelijk aan de helft van de gegeven lijn, of aan de tweede regthoekszijde [HG = BG]; en eindelijk op de gegeven lijn een ſtuk [AC] neemt gelijk aan het overſchot [AH] der ſchuinſche zijde: zal die lijn [AB] zoodanig [in C] geſneden zijn: dat het vierkant van het grootſte ſtuk [AC] gelijkhaltig zal zijn aan den regthoek gemaakt

maakt uit de geheele lijn [AB] en het andere, of kleinste, stuk [BC].

D. G. §. 378.

BEWIJS. Uit XVI. is □ op AG ∞ □ op AB + □ op BG ∞ □ op AB + ¼ □ op AB: en door III. is □ op AG ∞ □ op AH + □ op HG + 2 Rh. uit HG, AH ∞ □ op AH + ¼ □ op AB + Rh. uit AH, AB: derhalve, □ op AB + ¼ □ op AB ∞ □ op HA + ¼ □ op AB + Rh. uit AH, AB: gevolgelijk □ op AB ∞ □ op HA + Rh. uit AH, AB ∞ □ op AC + Rh. uit AB, AC: en □ op AB − Rh. uit AB, AC ∞ □ op AC: en (door II. en Bep. 5. Gev. 2) Rh. uit AB en [AB − AC] ∞ □ op AC: d. i. □ op AC ∞ Rh. uit AB en BC.

AANMERKING. Het blijkt hieruit, hoe men te handelen hebbe om eene lijn zoodanig te snijden dat het vierkant van het grootste stuk gelijkhaltig zij aan den regthoek uit de geheele lijn en het kleinste stuk: of, zoo als wij ons in de 4 Bepaling van het IV. Boek zullen uitdrukken, *in uiterste en middelste rede:* het geen het onderwerp is des X. Werkstuks in het I. Boek.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 68.

Indien eene lijn [AB] in twee deelen zoodanig gedeeld is, dat het vierkant van het grootste stuk [AC] gelijkhaltig is aan den regthoek van het kleinste stuk [BC] en de geheele lijn [AB]; en men uit het stip van snijding C eenen Cirkel trekt waar van het grootste stuk de *radius* is, en uit het ander eind [A] van het grootste stuk [AC] met eenen straal [AD] gelijk aan de geheele lijn [AB] eenen anderen cirkelboog trekt die den eerstgemelden snijdt [in D]; en verder uit dat stip van snijding lijnen [DA, DB, DC] naar de uiteinden [A, B] en het snijpunt [C] van de gegeven lijn; zal men twee gelijkbeenige driehoeken verkrijgen: in welke beiden de hoeken op de grondlijn het dubbeld zullen zijn van dien in den top; de beenen van den grooten driehoek [BAD] zullen gelijk zijn aan de gegeven lijn; en die van den kleinen gelijk aan derzelver grootste stuk [AC].

St. II. 12.

BEREIDING. Zij DE ⊥ op BC.

BEWIJS. Uit XIX. toegepast op AD, (en dus op AB) in Δ ACD; vervolgens uit III. toepast op AB gedeeld in C: men leidt er uit af dat BE = EC en dus [I. 27. Gev. 4.] BD = CD = AC. Vervolgens uit I. 15. dat ∠ BCD = 2 ∠ A: en ∠ B = 2 ∠ BDC.

I.

I. GEVOLG.

Hier uit volgt dat ∠ BDC = ∠ CDA, of dat ∠ BDA, door de lijn DC, in twee gelijke deelen gedeeld worden.

II. GEVOLG.

Hier uit volgt ook dat, zoo in een' gelijkbeenigen driehoek de hoek op de grondlijn dubbeld is van dien in den top, de lijn [CD], welken de eerstgemelden hoek in twee gelijke deelen snijdt, de overstaande zijde [AB] zoodanig snijden zal, 1. dat het vierkant van het grootste stuk gelijk zal zijn aan den regthoek van de geheele lijn, en het kleinste stuk, 2. dat het grootste stuk gelijk zal zijn aan de grondlijn.

III. GEVOLG.

De hoeken op de grondlijn zullen in zoodanigen driehoek gelijk zijn aan $\frac{4}{5}$ L, en de hoek in den top aan $\frac{2}{5}$ L.

IV. GEVOLG.

Het blijkt uit dit Voorstel, dat het beschrijven van eenen gelijkbeenigen driehoek, waarin de hoeken op de grondlijn het dubbeld zijn van den tophoek, afhangt van het snijden van eene lijn zoodanig dat het vierkant van het eene stuk gelijk is aan den regthoek uit de geheele lijn en het ander stuk.

AANMERKING. Men kan nu het XI. Werkstuk uit het II. Boek oplossen, nam. de 2. oplossing.

XXVII. VOORSTEL. Fig. 68.

Indien een gelijkbeenige driehoek [BAD] zoodanig gesteld is, dat de hoeken [B en ADB] op de grondlijn het dubbeld zijn van den tophoek [A]; en indien men uit eenen der hoeken [D] op de grondlijn, op het tegenoverstaand been eene lijn [CD] trekt die gelijk is aan de grondlijn; zal zij een zoodanig stuk [BC] van het been afsnijden, dat 1. het overige gedeelte [AC] gelijk zal zijn aan de grondlijn; 2. dat het vierkant van dat deel gelijkhaltig zal zijn aan den regthoek onder het geheel been AB, en het eerste stuk [BC] begrepen; 3. dat in den gelijkbeenigen driehoek [BCD] door de grondlijn [BD] van dien gegeven driehoek, en de getrokken lijn [DC] gemaakt, de hoeken [B en BCD] op de grondlijn ook het dubbeld zullen zijn van den hoek [BDC] in den top; en 4. dat die hoek [BDC] het derde gedeelte is van den uitwendigen hoek [ACD] gevormd door de getrokken lijn [DC], met het been [BA] waarop zij getrokken is.

BEREIDING. Zij DE loodregt op BC: en dus (uit I. 27. Gev. 4.) BE = EC en BC = 2 BE.

BE-

BEWIJS. Van het I. uit het I. 27. en I. 28.

Van het II. uit het XIX. Voorftel van dit Boek: de bereiding: het III. en het I. Voorftel, beiden uit dit Boek.

Van het III. uit het XIX. Voorftel: en uit het 2. Gevolg van het XV. Voorftel van het I. Boek.

Van het IV. uit I. 29. of uit I. 27. en 15.

AANMERKING. Het blijkt dat dit Voorftel het omgekeerde is van het voorgaande.

III. AFDEELING.

OVER DE VEELHOEKEN.

VIII. BEPALING. Fig. 76.

In alle veelhoeken noemt men *uitfpringende* hoeken die [∠∠ G H F, F D A, B C A enz.] welke met hunnen top [H, D, C, K] naar buiten ftaan: en *infpringende* die [∠∠ H F D, C A D, C B K, K M Q] wier top [F, A, B] naar binnen gekeerd is.

AANMERKING. Wij zullen geen andere veelhoeken befchouwen dan die wier hoeken alle uitfpringende zijn.

IX. BEPALING.

Men noemt *inwendige* hoeken van den veelhoek, de hoeken welke deszelfs zijden naar den binnenkant met elkander maken; en *uitwendigen hoek* den hoek dien eene zijde met de verlengde naastgelegene zijde naar buiten maakt.

UITLEGGING. Fig. 75. ∠ E A C, ∠ D C A, ∠ C D F, ∠ D F E, ∠ F E A zijn de *inwendige* hoeken des veelhoeks D C A E F: Maar ∠ A C K, ∠ C D I, ∠ D F G, ∠ F E K, ∠ L A E zijn de *uitwendige.*

AANMERKING. Het is om het even of men voor den uitwendigen hoek, welke de zijden C D en F D onderling maken, neemt den ∠ C D I, van C D met de verlenging van F D, of den ∠ H D F, van F D met de verlenging van C D: want [I 5.] ∠ C D I = H D F.

X.

X. BEPALING.

Men noemt *omtrek* van den veelhoek de ſom van alle zijne zijden.

XI. BEPALING.

Een *geſchikte*, of *reguliere*, of *regelmatige*, veelhoek is die, wiens zijden alle gelijk zijn, en gelijke hoeken met elkander maken.

L. G. IV. Bep. 1.

AANMERKING. Fig. 74. Men moet wel op de dubbele voorwaarde in de bepaling begrepen letten: want in eenen veelhoek kunnen alle de hoeken gelijk zijn zonder dat de zijden het zijn, zoo als in den veelhoek AGHDEFA; of alle de zijden kunnen gelijk zijn, zoo als in den veelhoek CDIMNKC, zonder dat de hoeken het zijn: in geen van beide de gevallen is de veelhoek geſchikt of regelmatig, zoo als de veelhoek ABCDEF is, waarin de zijden gelijk zijn, en de hoeken het ook zijn.

Zie CLAVIUS op het IV. Boek van EUCLIDES.

I. GEVOLG.

De gelijkzijdige driehoek en het vierkant kunnen ook tot de geſchikte veelhoeken gebragt worden.

II. GEVOLG.

In eenen regelmatigen veelhoek is de omtrek gelijk aan eene der zijden zoo dikwerf genomen als er eenheden zijn in het getal dat aanduidt uit hoe vele zijden de veelhoek beſtaat [Bep. X.].

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 75.

Men kan iederen veelhoek, regelmatig of onregelmatig, waarvan alle de hoeken uitſpringende zijn, met uit eenen der hoeken [C] lijnen [EC, CF] naar de overige hoeken te trekken, in zoo vele driehoeken verdeelen als er zijden zijn min twee.

BEWIJS. Immers: tot het vormen van de eerſten en laatſten driehoek, worden vier zijden der veelhoeken geſchikt, voor alle de overige ééne; waaruit het beſluit volgt.

XXIX.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 75.

In alle veelhoeken, regelmatig of onregelmatig [ACDFE], bedraagt de som van alle de inwendige hoeken tweemaal zoo vele regte hoeken als er zijden zijn, min vier regte hoeken.

TACQUET. Op 32 pr. van het I. Boek van EUCLIDES.

BEREIDING. Men verdeelt den veelhoek [ACDFE] met lijnen uit een der hoeken [C] te trekken, in driehoeken.

BEWIJS. Uit Voorstel XXV. en I. 15.

AANMERKING. Het zelfde heeft dus ook plaats voor den driehoek: doch men heeft dit algemeener Voorstel niet kunnen bewijzen, zonder eerst, uit andere gronden, de zaak voor een bijzonder geval, voor den driehoek namelijk, bewezen te hebben. Dus ziet men hier wederom een voorbeeld van het geen wij reeds in de I. Aanmerking op Voorstel XIX. gezegd hebben.

I. GEVOLG.

Indien de veelhoek regelmatig is, en de letter g het getal der zijden aanduidt: zal iedere hoek, daar zij allen gelijk zijn, zoo vele regte hoeken bevatten, als er door het getal $\frac{2.g-4}{g.}$ uitgedrukt worden.

II. GEVOLG.

Er zijn maar drie soorten van figuren, de gelijkzijdige driehoek, het vierkant, en de geschikte zeshoek, die, om één en het zelfde stip geplaatst, eene ruimte volstrekt, en zonder iets over te laten, kunnen vullen: dit geschiedt namelijk met zes gelijkzijdige driehoeken, vier vierkanten, en drie zeshoeken.

TACQUET op de laatste propositie van het IV. Boek van EUCLIDES.

AANMERKING. Over deze drie figuren zal ten dezen opzigte in IV. 31. Gev. nader gehandeld worden.

XXX. VOORSTEL. Fig. 75.

De uitwendige hoeken van eenen veelhoek, wiens hoeken alle uitspringende zijn, zijn, te samen genomen, gelijk aan vier regte hoeken.

TACQUET. Op de 32 prop. van het I. B. van EUCL.

BEWIJS. Uit I. 3. en het voorgaand Voorstel.

AANMERKING. Fig. 76. Wij handelen in dit Voorstel van veelhoeken, in welke alle de hoeken *uitspringende* zijn: ware het anders, waren er eenige *inspringende* hoeken, zoo als HFD; zoude voor iederen *uitspringenden* hoek het getal met twee regte hoeken vermeerderd worden; want dan zijn de uitwendige hoeken niet IHD en HDL, gelijk plaats zoude hebben zoo men de uitspringende hoeken GHD, HDA hadt; maar zij zijn IHD, DHF, HFD, FDH, HDL, d. i. ∠ IHD + ∠ HDL + de drie hoeken van den △ HFD: het voorstel wordt dan algemeen dit: „ Alle de uitwendige hoeken van een veelhoek zijn ge„ lijk aan de som van vier regte hoeken, en van twee„ maal zoo vele regte als er uitspringende hoeken zijn."

L. C. §. 520.

XXXI. VOORSTEL. Fig 77.

Indien men binnen eenen veelhoek, welke hij ook zij, een stip [P] neemt: en uit het zelve lijnen [PB, PA, PD enz.] naar alle de hoeken [B, A, D enz.] trekt, en vervolgens uit het zelve op iedere der zijden lijnen [PT, PX enz.] nederlaat, die de zijden in twee gelijke deelen snijden; zal het verschil tusschen de som der vierkanten van alle de lijnen die naar de hoeken gaan, en de som der vierkanten van alle de lijnen die de zijden snijden, gelijk zijn aan het vierde gedeelte van de som der vierkanten van alle de zijden des veelhoeks.

FAGNANO, *Opera Mathem.* T. II. p. 206.

BEWIJS. Men past het Gevolg van het XXII. Voorstel op elk der driehoeken BPA enz. men neemt de som; en verkrijgt de som die in het Voorstel gemeld wordt.

XXXII. VOORSTEL. Fig. 78.

Indien men alle de hoeken eens regelmatigen veelhoeks in twee gelijke deelen deelt, zullen 1°. alle de lijnen die de hoeken aldus deelen [AC, EC, FC, enz.] in een stip C te samen komen: 2°. Zij zullen alle gelijk zijn, en dus den veelhoek in zoo vele volkomen gelijke gelijkbeenige driehoeken verdeelen als er zijden zijn: 3. Zij zullen om het stip C gelijke hoeken [ACE, ECF enz.] maken: en 4. Zal dat stip C even ver van alle de zijden af

af zijn: *dat is*, de loodlijnen [CB, CH, CI enz.] uit dat ſtip op de zijden getogen zullen alle gelijk zijn.

BEWIJS. Het eerſte gedeelte volgt uit I. 22.
Het tweede en derde volgt uit het geen in het bewijs van het eerſte reeds bewezen is.
Het vierde, uit de gelijkheid der driehoeken BCE, ECH, ICF enz. door I. 22.

I. AANMERKING. De reden van de uitlegging, *dat is*, enz. in het 4 gedeelte van het Voorſtel, volgt uit I. 11. Gev. 1.

II. AANMERKING. Uit het bewezene in N°. 2., in N°. 4. en in N°. 3. van dit Voorſtel, volgen deze drie bepalingen, waarvan de eerſte ontleend is uit het geen in den cirkel plaats heeft.

XII. BEPALING.

Centrum, of *Middelpunt*, eens *regelmatigen veelhoeks* is een ſtip [C] zoodanig geſteld dat de lijnen [CA, CE, CF, enz.] naar de hoeken van den veelhoek getrokken, gelijk zijn, en deze in twee gelijke deelen ſnijden. Die lijnen zelve dragen den naam van *ſtralen*, of *radii*.

AANMERKING. Indien men dan, uit dat middelpunt met zoodanigen ſtraal eenen cirkel trekt, zal deszelfs omtrek de toppen van alle de hoeken des veelhoeks raken.

XIII. BEPALING.

De loodlijn [CB of CH, CI] die uit het middelpunt van een regelmatigen veelhoek op eene der zijden valt, wordt de *loodlijn* van dien veelhoek genoemd.

AANMERKING. Bij de Ouden draagt die lijn den naam van *Apotheme*, d. i. *nedergelaten Lijn*.

XIV. BEPALING.

De gelijkbeenige driehoeken [ACE, ECF, FCG] waarin een veelhoek door de ſtralen [CA, CE, CF, CG enz.] gedeeld wordt, dragen den naam van *middelpunts-driehoeken*, en de tophoeken derzelve [ACE, ECF enz.] worden *middelpuntshoeken* genoemd.

AANMERKING. De loodlijn verdeelt iederen middelpuntshoek in twee gelijke deelen [I. 27. Gev. 4.], waarom de hoeken

in

in het middelpunt, door den straal en de loodlijn gemaakt, den naam van *halve-middelpunts-hoeken* dragen.

I. GEVOLG.

Ieder *middelpuntshoek* eens regelmatigen veelhoeks is gelijk aan $\frac{4R}{g}$, zoo men den regten hoek door R, en het getal zijden door g uitdrukt. En de hoek, welken twee zijden eens regelmatigen veelhoeks uitmaken, is gelijk aan $(g-2)$ *halve middelpunts-hoeken.*

I. AANMERKING. Het eerste volgt uit het XXXII. Voorstel en I Gev. 5.: het tweede uit het eerste en I. 15.

II. GEVOLG.

In den regelmatigen zeshoek, is de driehoek door eene zijde en twee *stralen* in het middelpunt gevormd, dat is de middelpunts-driehoek, gelijkzijdig.

II. AANMERKING. Dit blijkt uit het I. Gevolg en I. 27. Gev. 3. waaruit het zeer gemakkelijk valt eenen regelmatigen zeshoek op eene regte lijn te beschrijven.

XXXIII. VOORSTEL. Fig. 79.

Indien men uit de uiteinden [K en H] van de grondlijn [KH] eens regelmatigen vijfhoeks [KCBEH] lijnen trekt [KB, HB] naar den top [B], zullen deze eenen gelijkbeenigen driehoek [KBH] uitmaken, waarin de hoeken op de grondlijn [BKH en BHK] het dubbeld zullen zijn van dien in den top.

BEREIDING. Men trekke de stralen GK, GB, GH en verlenge BG tot in I, welke derhalve [I. 27. Gev. 5.] loodregt valt op KH.

BEWIJS. Voor het I. Uit I. 21. op de ΔΔ BCK en BEH toegepast.

Voor het II. Uit I. 27. Gev. 1. en I. 15.

AANMERKING. Om eenen vijfhoek te beschrijven, of den zelven op eene gegeven lijn te stellen, wordt dus eerst het vervaardigen van een' gelijkbeenigen driehoek, waarvan de hoeken op de grondlijn het dubbeld zijn van dien in den top, vereischt. Het geen naar aanleiding van het XXVI. Voorstel, Gevolg 2. door het X. Werkstuk van het II. Boek geschiedt. Zoodanigen Δ KBK dan beschreven zijn-

de, ftelt men op ieder van deszelfs beenen KB, IB, eenen gelijkbeenigen Δ KCB, HEB; waarvan de beenen KC, CB, BE, EH gelijk zijn aan de grondlijn KH.

XXXIV. VOORSTEL. Fig. 80.

Indien het getal der zijden van eenen regelmatigen veelhoek *even* is: zullen de beide lijnen, die uit het middelpunt naar de tegenovergeftelde hoeken getrokken worden, ééne regte lijn uitmaken: die lijnen zullen den veelhoek in twee gelijke deelen verdeelen, en kunnen dus *diagonalen* genoemd worden: de beide lijnen die uit het middelpunt, loodregt op de tegenovergeftelde zijden getrokken worden, zullen ook ééne lijn uitmaken, en den veelhoek in twee gelijke deelen deelen: dit zelfde heeft ook plaats voor iedere lijn, die door het middelpunt getrokken wordt: en eindelijk zullen de tegenovergeftelde zijden evenwijdig aan elkander zijn.

L. C. §. 512, 513.

BEWIJS. Het eerfte en tweede volgt uit I. 4. en het laatfte uit het XXXII. Voorftel en I. 8.

AANMERKING. Het is dus met reden, dat men de regelmatige veelhoeken, wier zijden *even* in getal zijn, ook *fymmetrifche*, of *gelijkmatige*, veelhoeken noemt.

GEVOLG. Fig. 80.

Hieruit volgt, dat, in die gelijkmatige veelhoeken, de lijnen [AD, GE] die naar de uiteinden der elkander tegenovergeftelde, en dus evenwijdige, zijden getrokken worden, met die zijden regte hoeken uitmaken.

XXXV. VOORSTEL. Fig. 80.

Indien men in eenen regelmatigen veelhoek, waarvan de zijden *even* in getal zijn, en dus in eenen *gelijkmatigen veelhoek*, de uiteinden der aan elkander evenwijdige zijden door regte lijnen veréénigt, zullen deze door hare onderlinge ontmoetingen, om het middelpunt van den veelhoek, eenen nieuwen regelmatigen veelhoek maken, van even veel zijden als de gegeven veelhoek, en waarvan de loodlijn de helft is van de zijde van den gegeven.

DU FAY, *Mem. de l'Acad.* 1727. p. 299.

BEWIJS. Dat die veelhoek regelmatig is blijkt uit Voorftel XXXIV. Gev. 1. en I. 5, 28, 22, 15

Dat hij om het zelfde middelpunt ftaat, uit I. 27. Gev. 5. I 21.

Voor de grootte der loodlijn uit I. 22. Voorftel XXXIV. en I. 30.

AANMERKING. Wij zullen in het VI. Boek Voorftel XXXI. en volgende, die inwendige veelhoeken nader befchouwen.

XXXVI. VOORSTEL, Fig. 79.

Indien men in eenen regelmatigen veelhoek uit een *oneven* getal zijden bestaande, uit iederen hoek [C, B, E, H, K] lijnen [C E, C H, B H, B K, E K] naar de overige hoeken trekt, zullen die lijnen, door hare ontmoeting, om het zelfde middelpunt eenen nieuwen regelmatigen veelhoek [O N V xy] vormen, van even veel zijden als de gegevene, en, ten zijnen opzigte, omgekeerd geplaatst.

BEWIJS. Uit I. 22. 15. 22, 30. en Voorst. XXXIV. Gev.

XXXVII. VOORSTEL. Fig. 81.

Indien men uit de beide uiteinden van iedere zijde eens regelmatigen veelhoeks, wiens zijden *oneven* in getal zijn, loodlijnen op die zijden oprigt, zullen deze door hare onderlinge ontmoeting twee regelmatige veelhoeken vormen, onderling gelijk, en ieder van even veel zijden als de gegeven veelhoek: hunne loodlijn zal de helft zijn van de zijde des gegeven veelhoeks: zij zullen het middelpunt des eersten veelhoeks tot middelpunt hebben, en altijd binnen den veelhoek vallen, ten zij deze een gelijkzijdige driehoek zij. Verder indien men ieder punt van den gegeven veelhoek aanmerkt als het begin van eene zijde en het uiteinde van de naastvoorgaande, zullen de loodlijnen uit het begin van iedere zijde op dezelve getrokken den eenen veelhoek, en de loodlijnen uit het einde van iedere zijde op dezelve getrokken den anderen veelhoek vormen.

DU FAY, *Mem. de l'Acad.* 1727. p. 299. doch niet zoo algemeen. Hij spreekt slechts van éénen veelhoek.

BEWIJS. Uit I. 22. 15. 22, 30. en Voorst. XXXIV. Gev.

AANMERKING. Het XXXI. Voorstel en de volgende Voorstellen van het VI. Boek zullen den aard dier inwendige veelhoeken nog nader leeren kennen.

XXXVIII. VOORSTEL. Fig. 82.

Wanneer men op alle de zijden eens regelmatigen veelhoeks, stippen [E, F, G, I, L] neemt even ver van de naaste hoeken [A, D, C, B, Q], zullen de lijnen, die deze stippen vereenigen, eenen regelmatigen veelhoek van even veel zijden uitmaken als de gegeven veelhoek zelve: en wiens middelpunt het middelpunt des eersten veelhoeks is.

BEWIJS. Voor het I. Uit de gelijkheid der driehoeken A E L, E D F enz. door (I. 21) — Voor het II. Uit de gelijkheid der driehoeken A O L, E O D, enz. en dus der lijnen L O, E O, F O, enz. waaruit volgt dat O het middelpunt is.

AANMERKING. SIMPSON heeft dit alléén voor het vierkant bewezen, in zijn I. Boek, pr. 28.

Zie hier boven I. 36. Gev. 2.

XXXIX. VOORSTEL.

De inhoud eens regelmatigen veelhoeks is gelijkhaltig aan dien van eenen driehoek, waarvan de grondlijn de omtrek van den veelhoek is, en de hoogte de loodlijn uit het middelpunt op eene der zijden van den veelhoek nedergelaten.

St. IV. pr. 13. — L. G. IV. 7.

BEWIJS. Uit Voorstel XXXII, en Bep. XI.

GEVOLG.

De inhoud eens regelmatigen veelhoeks is gelijkhaltig aan dien van eenen regthoek, waarvan de hoogte de loodlijn is uit het middelpunt op eene der zijden getrokken, en de grondlijn, de helft van den omtrek des veelhoeks. [XIII. Gev. 1].

AANMERKING. De inhoud der veelhoeken wordt dus ook tot die der regthoeken gebragt.

XL. VOORSTEL.

De inhoud van alle regtlijnige figuren wordt tot die van de regthoeken gebragt: en men kan altijd eenen regthoek maken, die gelijkhaltig is aan den inhoud van eene gegeven figuur.

BEWIJS. De Figuur wordt door lijnen in driehoeken verdeeld; ieder driehoek is gelijkhaltig aan eenen bepaalden regthoek (XIII. Voorstel, 1. Gevolg). en men kan, door het geen reeds geleerd is, éénen regthoek maken, gelijkhaltig aan de som van verscheiden andere regthoeken, en dus aan den gegeven veelhoek: zie het 17, 18, 19, 20 Werkstuk van het II. Boek.

AANMERKING. Deze bewerkingen zijn lastig, om dat, na den eersten regthoek, welke aan den eersten driehoek gelijkhaltig is, gemaakt te hebben, de overige moeijelijker te vervaardigen zijn, vermits zij dan alle op de grondlijn van den eersten moeten gesteld worden, d. i. op eene gegeven lijn; dit nu is meer ingewikkeld (zie II. Werkstuk 14.) Men kan wel het werk eenigzins verkorten, met, zoo veel mogelijk, de loodlijnen op de zelfde grondlijn te laten val-

vallen; bijv. met [fig. 183.] altijd twee loodlijnen BF, DG, op eene en de zelfde diagonaal als grondlijn te trekken, en de driehoeken, zoo veel mogelijk, aan paren te nemen: maar het bedoelde in dit Voorstel valt veel gemakkelijker te verrigten door II. Werkstuk 29; en zoo doende de figuur tot éénen driehoek te brengen: en daarna eenen regthoek, of een vierkant, daar mede gelijkhaltig te vervaardigen.

DERDE BOEK.

OVER DE EVENREDIGHEID.

INLEIDING.

I. BEPALING.

Wanneer eene grootheid, verfcheide malen genomen, of herhaald; of, in andere woorden; wanneer eene grootheid, door eenig getal vermenigvuldigd zijnde, eene andere grootheid evenaart, is zij een *effen gedeelte*, een *opgaand deel*, (*pars aliquota*) van die tweede grootheid: doch indien zij, eens of meermalen genomen, dezelve niet evenaart, maar kleiner blijft, en nog eenemaal meerder genomen grooter wordt, is zij er een *oneffen* gedeelte van (*pars aliquanta*).

EUCL. V. Bep. 1. en zie daarop, zoo als beftendig voor dit geheele boek, de aanmerking van KOENIG.

AANMERKING. Ik zeg eene *grootheid*, en niet enkel een getal: want eene kleinere lijn kan zoo wel een effen gedeelte zijn van eene grootere lijn, of een kleine Cirkel van eenen grooteren Cirkel, of een kleiner vat van een grooter vat, als een kleiner getal van een grooter: 1, 2, 5. zijn *effen*, doch 3, 4, 7, 8, 9, *oneffen* gedeelten van 10.

II. BEPALING.

Eene grootheid wordt een *veelvoud* of *vermenigvuldigde* (*multiplum*) van eene andere genoemd, als deze de eerstgemelde *meet*, of een *effen* gedeelte daarvan is: en dat *effen* gedeelte wordt eene *ondervermenigvuldigde*, een *opgaand deel* (*fubmultiplum*) van de andere grootheid genoemd.

Bij v. 10 is eene *vermenigvuldigde* van 1, 2, 5: doch niet van 3, 6, 7, 8, 9: en 1, 2, 5 zijn *ondervermenigvuldigden* van 10.

EUCL. V. Bep. 2. en VII. Bep. 5.

I. AANMERKING. Ik zeg *grootheid*, en niet alleen *getal*, om de reeds aangehaalde reden: welke ook voor de volgende bepaling geldt.

II. AANMERKING. Hier van de benamingen *dubbeld*, *drievoud* enz. *onderdubbeld* of *helft*, *onderdrievoud* of *derde gedeelte*, enz.

III. BEPALING.

Twee (of meerdere) grootheden worden gezegd *gelijkvouden*, of *gelijkvermenigvuldigde* (*æquimultiplicia*), te zijn van twee (of meerdere) andere, wanneer zij deze grootheden even veel malen bevatten, iedere, namelijk, die grootheid, van welke zij de *vermenigvuldigde*, of het *veelvoud* is.

Bij v. 20, 40, 60 zijn *gelijkvermenigvuldigde* of *gelijkvouden* van 4, 8 en 12, of van 5, 10, 15, of van 10, 20 en 30; maar zij zijn het niet van 5, 8, 20: altijd die zelfde orde in acht nemende.

IV. BEPALING.

Men noemt *magten* van een *getal*, de getallen die men verkrijgt wanneer dat getal, door zich zelf *eens*, *twee*, *drie*, *vier* malen, en zoo voorts, vermenigvuldigd wordt. Men verkrijgt, namelijk, de *tweede magt*, ook wel *quadraat*, of *vierkant*, of *quadraat getal* genoemd, wanneer een getal *één*s door zich zelf vermenigvuldigd wordt: de *derde magt*, ook *Cubus*, of *Taarling*, of *cubiek-getal* genoemd, wanneer een getal *twee* malen: de *vierde magt* wanneer het *drie* malen; de *vijfde magt* wanneer het *vier* malen en zoo voorts door zich zelf vermenigvuldigd wordt.

Bij v. 4, 8, 16, 32, zijn, in die orde, de tweede, de derde, de vierde, de vijfde magt van het getal 2: 36 is de tweede en 216 de derde magt van 6.

I. AANMERKING. Wij zullen in het IV. Boek, IX Voorstel, Gevolg 5 en in het XI. B. XI. Voorstel, 2 en 4. Gevolg zien, waarom de tweede en derde magten, ook *quadraten* of *vierkanten*, en *Cubussen* of *Taarlingen*, genoemd worden.

EUCLIDES zegt te regt in de 17 en 18 Bepaling van zijn zevende Boek, „ een *quadraat getal* is een getal door de „ multiplicatie van twee gelijke getallen, en een *cubiek-ge-* „ *tal* is een getal dat door de multiplicatie van drie gelijke „ getallen gevormd wordt "

Alle de getallen, gelijk 10 bij v. of 12, die zoodanige niet zijn, zijn geen *quadraat*, of geen *cubiek-getallen*.

II. AANMERKING. Men kan *eerste* magt van een getal noemen,

dat getal zelf, dat is, dat getal door *één* vermenigvuldigd: en dit gesteld zijnde zal men, in plaats van de magten uitdrukken door de vermenigvuldiging zelve, bij v. door $a \times 1$, $a \times a$, $a \times a \times a$, $a \times a \times a \times a$, dat lastig is, ze door eenen *exponent* of *aanwijzer* (*) kunnen aanduiden, welke te kennen geeft, hoe dikwerf dat getal gesteld wordt, en dus welke *magt* het is, namelijk:

a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, enz. beduiden de eerste, tweede, derde, vierde, vijfde magt van a.

III. AANMERKING. Hier uit volgt 1°. dat wanneer men magten van een getal door magten van het zelfde getal multipliceert, of divideert, de *exponent* van het *product*, of van het *quotient*, de *som* of het *verschil* der *exponenten* zijn zal: zoo dat $a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$: $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$.

2°. Dat men de divisie door een *exponent*, met het teeken (—) *minus*, ter aanduiding van de aftrekking zal kunnen aanwijzen; zoo als $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ enz. door a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, enz. 3°. dat de magt *nul* van een getal altijd de *eenheid* is: want $1 = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$. Zoo dat men altijd in plaats van 1 de magt 0 van welke grootheid men wil stellen kan.

IV. AANMERKING. Ik gebruik hier het woord *getal* en niet *grootheid*; om dat de magten in eene wezenlijke vermenigvuldiging bestaan, en dus, in den eigenlijken zin, niet dan op getallen toegepast kunnen worden: men kan wel zeggen 4 gemultipliceerd door 4, en dat getal opgeven; maar men kan geen lijn door eene lijn, geen cirkel door eenen cirkel *multipliceren*: en indien men wel eens van de *multiplicatie* van twee lijnen, en zoo voorts, spreekt, of dezelve door het teeken × aanduidt, geschiedt zulks maar kortheidshalve: en het beteekent altijd, stilzwijgend, het getal dat de grootheid van eene lijn of van eenen cirkel, bij v. uitdrukt, vermenigvuldigd door het getal dat de grootheid van eene andere lijn of van een' anderen cirkel aanduidt.

V. BEPALING.

Men noemt *wortels* van een *getal* die getallen, welke, door zich zelven vermenigvuldigd, het eerstgemelde uitma-

(*) Ik zal altijd het woord *exponent* en nimmer dat van *aanwijzer* gebruiken: de reden zal blijken uit de XI Bepaling.

maken: en dat wel *tweede*, ook *quadraat* of *vierkante* wortel; *derde*, ook *cubieke* of *taarling-wortel*; *vierde*, *vijfde* enz. wortel, die getallen, welke *eens*, *twee*, *drie*, *vier* malen door zich zelven vermenigvuldigd, het gegeven getal uitmaken.

Bij voorbeeld: 5 is de tweede of *quadraat*-wortel van 25: de *derde* of *cubieke* wortel van 125: de *vierde* van 625: de *vijfde* van 3125 en zoo voorts.

I. AANMERKING. Men kan de wortels door een teeken ($\sqrt{}$) aanduiden, en, met er een cijfferletter in te plaatsen, te kennen geven, de hoeveelste wortel het is: dus zijn $\sqrt[2]{a}$, of, gelijk men het ook schrijft, enkel $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, enz. de tweede, derde, vierde enz. wortel van a; dus is $4 = \sqrt[3]{64}$: om dat 4, tweemalen door zich zelven vermenigvuldigd, of de derde magt van 4, juist 64 oplevert.

II. AANMERKING. Gelijk men de *magten* door *exponenten* uitdrukt, kan zulks ook voor de *wortels* geschieden; maar dan zullen die *exponenten* breuken zijn: bij voorbeeld in plaats van het teeken $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$; zal men kunnen stellen $a^{\frac{1}{3}}$, of $a^{\frac{1}{4}}$: want a of $a^{1} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^{1}$.

VI. BEPALING.

Men noemt *gelijksoortige* grootheden die, welke zoodanig gesteld zijn, dat eene vermenigvuldigde van de kleinste de grootste kan evenaren, of overtreffen: of wel, grootheden die uit de zelfde soort van eenheden bestaan.

St. V. Bep. I.

VOORBEELD. Lijnen zijn onderling gelijksoortig: parallelogrammen zijn het ook onderling: een oxhoofd is gelijksoortig met een emmer of pint: om dat eene menigte van emmers of pinten een oxhoofd kan uitmaken.

Maar eene lijn, een parallelogram, een oxhoofd, zijn onderling ongelijksoortig.

VII. BEPALING.

Men noemt *meetbare*, of ook *rationeele* grootheden, of ge-

getallen, die, welke eene *gemeene maat* hebben: het zij de kleinste de maat zij van de grootste, dat is, juist eenige malen in de zelve begrepen worde of opga, het zij eene derde grootheid de maat, of een gedeelte, van beiden zij.

EUCL. X. Bep. 1.

AANMERKING. Ik zeg hier *grootheden* en niet enkel *getallen*, om dat dit op alle grootheden toepasselijk is: een once, een pond, een schip-pond zijn onderling meetbare grootheden: even als een anker, een oxhoofd, een pijp, en zoo voorts, insgelijks onderling.

I. GEVOLG.

Alle Breuken, of gebrokens, zijn onderling meetbaar: want men behoeft ze slechts tot den zelfden noemer te brengen.

II. GEVOLG.

In alle getallen hoe genaamd is de *eenheid*, het zij eene *ware*, het zij eene *betrekkelijke* eenheid, de gemeene maat.

AANMERKING. De ware eenheid heeft dan alleen plaats wanneer men de getallen in het afgetrokken beschouwt, zonder ze op iets toe te passen; zoo als wanneer ik zeg 100, 1000, en zoo voorts: maar wanneer ik zeg, 100 oxhoofden, 20 roeden, 20 voeten, 20 vierkante roeden, doel ik op eene *betrekkelijke* eenheid; namelijk op één oxhoofd, ééne roede, één voet, en één vierkant waarvan de zijde eene roede is: en de getallen 20 roeden, 20 voeten, zijn ongelijk groot, hoe wel beide 20, dat is, hoe wel beide even veel eenheden bevattende: om dat de eenheid van eene roede grooter, en wel 12 malen grooter is dan die van een voet.

IV. AANMERKING. De beschouwing der getallen die eene *gemeene maat* hebben, heeft in de rekenkunde aanleiding gegeven tot den regel, om de *grootste gemeene maat*, of den *grootsten deeler* van twee (of meerdere) gegeven getallen te vinden. Die zelfde regel is op alle grootheden even toepasselijk, als bestaande in *divisie*: de *divisie* nu is slechts eene herhaalde aftrekking; en men kan even gemakkelijk nagaan hoe vele malen eene lijn bij v van eene andere afgetrokken kan worden, dat is, in dezelve opgaat, als men zulks doet voor getallen. Wij zullen dan hier dien regel, tot voorbeeld, op lijnen toepassen en den zelven bewijzen.

Men vraagt *de gemeene maat der grootheden DG en AB te vinden?* Fig. 83.

Men trekke AB zoo dikwerf mogelijk van DG af: d. i. men

men *dividere* DG door AB. Zoo dan AB volkomen in DG opgaat, is BA zelve de grootste gemeene maat: maar zoo zij er niet in opgaat, blijve EG over.

Men trekke EG zoo dikwerf mogelijk van AB af, d. i. men *dividere* AB door EG: er blijve AZ over.

Men trekke AZ zoo dikwerf mogelijk van EG af, en er blijve niets over: ik zeg 1°. dat AZ eene gemeene maat is van DG en AB: en 2°. dat AZ de grootste gemeene maat derzelve is.

1°. AZ gaat in EG op: des ook in BZ, waarin EG opgaat: dus ook in BZ + ZA, dat is in AB. Maar AB gaat op in DE: dus gaat EG op in DE: dus ook in DE + EG, dat is in DG: maar AZ gaat op in EG: dus ook in DG: en AZ is eene gemeene maat van AB en DG.

2°. Maar zij is ook de *grootste gemeene maat:* immers zoo neen, zij eene andere H grooter dan AZ, eene gemeene maat van AB en DG. Daar door die *assumtie* H opgaat in AB, en AB in DE, gaat ook H op in DE: maar door de *assumtie* gaat zij ook op in DG: derhalve ook in DG — DE, dat is in EG: maar EG gaat op in BZ: dus gaat H ook op in BZ: maar H gaat, door de *assumtie*, op in AB: dus ook in AB — BZ, of in AZ: dat is H, die, door de *assumtie*, grooter is dan AZ, zoude in AZ opgaan, dat ongerijmd is. Het is dan ongerijmd dat er eene grootere gemeene maat van DG en AB zij, dan AZ: dus is AZ de grootste gemeene maat.

Dit Voorstel is het 3. in het X. Boek van EUCLIDES en uit dezen is dit Bewijs ontleend.

VIII. BEPALING.

Grootheden die geen gemeene maat hebben; dat is waarvan de eene, noch door eene vermenigvuldiging van de andere, noch door die van eenig opgaand deel derzelve, kan gevormd worden; worden gezegd onderling *onmeetbaar* te zijn. Men noemt ze ook *surden* en *irrationeele.*

EUCL. X. def. 2.

I. AANMERKING. Het denkbeeld van gelijksoortige grootheden, die geen gemeene maat hebben, valt, in den eersten opslag, vreemd: wij moeten derhalven het zelve nader ontwikkelen, en door voorbeelden aantoonen dat er in de daad zulke grootheden zijn Ten dien einde is het noodig deze beschouwing, uit het II. Voorstel van EUCLIDES X. Boek ontleend, te laten voorafgaan.

„ *Indien men, twee ongelijke grootheden gegeven zijnde, de* „ *kleinste van de grootste, zoo dikwerf mogelijk, aftrekt: het* „ *overschot op de zelfde wijze van de kleinste: het tweede* „ *overschot van het eerste, het derde van het tweede, en*

„ zoo

„ *zoo voorts*, zoo dat er altijd een overschot blijve: *zullen* „ *de twee gegeven grootheden onderling* onmeetbaar *zijn*."

Dat men, gelijk in de IV. Aanmerking op de VII. Bepaling, nagaa hoe vele malen [Fig. 84.] BA in DG opgaat; er blijve een overschot EG: dat men nagaa hoe vele malen EG in AB opgaat, en er blijve een overschot AZ: dat men nagaa hoe vele malen AZ in EG opgaat, en er blijve een overschot IG, en altijd zoo voort, zoo dat er altijd een overschot blijve: Dan zullen DG en AB onderling *onmeetbaar* zijn: dat is zij zullen geen gemeene maat hebben. Zoo neen: zij L derzelver gemeene maat. BA eenige malen in DG opgaande laat een overschot EG kleiner dan zich zelve. EG eenige malen in AB opgaande laat insgelijks een overschot AZ kleiner dan zich zelven; en AZ eenige malen in EG opgaande laat een overschot IG kleiner dan zij zelve is: dat men zoo voortgaa tot dat men kome aan een overschot IG kleiner dan L.

Om dat, volgens de *assumtie*; L in AB opgaat en AB in DE, zal ook L in DE opgaan: maar L gaat ook, volgens de *assumtie*, op in DG: dus gaat L ook op in DG — DE, dat is in EG: EG nu gaat op in BZ; dus gaat L ook op in BZ: maar, volgens de *assumtie*, gaat L op in AB; dus ook in AB — BZ, dat is in AZ: maar AZ gaat op in EI; dus gaat L ook op in EI: maar, door de *assumtie*, gaat L op in EG; dus ook in EG — EI, d. i. in IG; het geen ongerijmd is, daar L, bij onderstelling grooter is dan IG. Het is dus onwaar dat L de gemeene maat zoude zijn van DG en AB: die grootheden hebben derhalve geen gemeene maat, dat is, zij zijn *onmeetbaar*.

II. AANMERKING. Dit gesteld zijnde, zal het niet moeijelijk vallen te bewijzen, „ dat *de diagonaal en de zijde* „ *van een vierkant onderling onmeetbaar zijn*." Wij zullen zulks geometrisch doen, en uit de eerste grondbeginsels afleiden.

1°. Zij ABLC [fig. 85.] het vierkant op AC Maar door II. 16. is □ op BC ∞ □ op AC + □ op AB ∞ 2 □ op AC: het vierkant op de diagonaal en het vierkant op de zijde zijn dus twee vierkanten die onderling meetbaar zijn.

2°. Door I. 19. is BC < AB + AC of < 2 AC: indien men dan van BC aftrekt BD = BA = AC, blijft er een overschot DC < AC. Wij zullen dit overschot het *eerste overschot* noemen,

3°. Uit I. 34. blijkt dat, zoo DE ⊥ op BC, DE =

AE

AE = DC. Maar in $\triangle$ EDC is EC $<$ ED $+$ DC of $<$ 2 ED of 2 AE: en dus, makende EF = AE, zal AE, of het *eerste overschot*, twee malen in AC opgaan, en er blijft een *tweede overschot* FC.

4°. Trekkende FI $\perp$ FC en verder DF; is [I. 34.] DI = FI = FC. Er zal dan, met IG = FG te maken, weder een overschot GC zijn: en FC zal twee malen in DI $+$ IG of in DG gaan, latende het *derde overschot* GC: en trekkende uit G, GH $\perp$ GC, is GC, *derde overschot*, wederom de zijde van een vierkant waarvan HC de diagonaal is.

5°. Men heeft dan door die gedurige aftrekking altijd tot overschot de zijde van een vierkant. BC diagonaal, AC zijde: DC, *eerste overschot*, zijde, EC diagonaal: FC, *tweede overschot*, zijde, IC diagonaal: GC, *derde overschot*, zijde, HC diagonaal: waaruit blijkt dat men, altijd zoo voortgaande, ook altijd een overschot zal houden: en gevolgelijk dat, AC en BC, zijde en diagonaal van een vierkant, geen gemeene maat hebben: dat is zij zijn, onderling, *onmeetbaar*.

III. AANMERKING. De stelling dat de diagonaal eens vierkants tot deszelfs zijde onmeetbaar is, is reeds op eene andere, doch ook geheel geometrische wijze door EUCLIDES [X. 117.] bewezen. Wij zullen in het IV, V, VI, VIII. Boek meer andere voorbeelden van onmeetbare grootheden aantreffen. Wanneer men dan eene derzelve door een getal uitdrukt, kan de andere door geen getal uitgedrukt worden; want dan ware er tusschen die twee getallen eene gemeene maat, te weten de eenheid. Men kan enkel getallen daar stellen die de tweede onmeetbare grootheid ten naasten bij zullen uitdrukken, en men kan die nadering zoo ver men wil uitstrekken.

De handelwijze in de voorgaande aanmerking gebruikt kan hier ten voorbeeld strekken. Want om nategaan hoe vele malen AC in BC opgaat heeft men gevonden 1 met het overschot CD: dat is, om het uittedrukken gelijk men in de rekenkunde doet, $1 + \frac{CD}{AC}$ of $1 + \frac{1}{\frac{AC}{CD}}$.

Voor $\frac{AC}{CD}$ heeft men gevonden $2 + \frac{FC}{CD}$: derhalve is

BC

$BC = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{FC}{CD}}$: men heeft gevonden $\frac{FC}{CD} = 2 + \frac{GC}{CD}$: en dus $BC = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{GC}{CD}}}$.

Men vindt voor $\frac{GC}{DD}$, en voor alle de volgende leden, ftellende e voor de *rest* of het *overfchot*, en D voor den *divifor*, altijd $\cfrac{1}{2 + \cfrac{e}{D}}$: BC, of de diagonaal, zal derhalve de fom zijn van deze, gelijk men het noemt, *gedurige breuk*, zoo ver men wil uitgeftrekt; te weten, ftellende 1 voor de zijde, is

$$BC, \text{diagonaal}, = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{enz.}}}}}}}$$

Hoe meer leden, of *termen* van die breuk men neemt, hoe nader men aan de waarheid komt.

De diagonaal van een vierkant, wiens zijde de éénheid gefteld wordt, zoude zijn, met te nemen

ééne breuk,	$1\frac{1}{2}$	= 1.5 te groot.
twee	$1\frac{2}{5}$	= 1.4 te klein.
drie	$1\frac{5}{12}$	= 1.41667 te groot.
vier	$1\frac{12}{29}$	= 1.41379 te klein.
vijf	$1\frac{29}{70}$	= 1.414285 te groot.
zes	$1\frac{70}{169}$	= 1.414201 te klein.
zeven	$1\frac{169}{408}$	= 1.414216 te groot.
acht	$1\frac{408}{985}$	= 1.4142131 te klein.
negen	$1\frac{985}{4080}$	= 1.4142136 te groot.

Men ziet dat, na de zevende breuk, de onzekerheid maar zit in de millioenfte, en met de negende, maar in de tien-millioenfte gedeelten.

IV. AANMERKING. Ik heb in de bepaling zelve gezegd *onmeetbare grootheden*, en niet *getallen:* want eigenlijk gefproken zijn het alleen grootheden die onmeetbaar zijn: zoo als

als bij voorbeeld de diagonaal van een vierkant en zijne zijde; de diameter van een' cirkel en deszelfs omtrek, verscheide regthoeken enz. zoo als in het IV, VI, VII en VIII. Boek blijken zal: welke grootheden, hoe wel onderling onmeetbaar, bestaan, en aangewezen kunnen worden. *Onmeetbare getallen* zijn er *in den eigenlijken zin* niet; want wie een getal zegt, zegt een aantal eenheden, en dus iets dat met die eenheid meetbaar is. Men gebruikt, wel is waar, ook die uitdrukking *onmeetbaar* van getallen sprekende: doch het is in eenen oneigenlijken zin, en kortheidshalve. Bij voorbeeld; een wortel van een geheel getal, dat zelf geen *quadraat-getal* is, kan even min door een gebroken als door een geheel getal, dat is, kan door geen getal, hoe ook genaamd, worden uitgedrukt. Er is bij v. geen geheel getal, en ook geen breuk, die door zich zelf vermenigvuldigd 13, of door zich zelf twee maal vermenigvuldigd 36 kan voortbrengen: en dus kan de vierkante wortel van 13, of de cubiekwortel van 36, door geen getal, hoe genaamd, uitgedrukt worden; en daarom noemt men die wortels *onmeetbaar*: dezelve nogthans door een teeken ($\sqrt{13}$, $\sqrt{36}$) aanwijzende, handelt men daarmede als of het getallen waren, en men noemt ze daarom *onmeetbare getallen*, doch zeer oneigenlijk: men kan die wortels wel aanwijzen; men kan den eerstgemelden wel door eene lijn uitdrukken (namelijk door de diagonaal eens regthoeks, waar van de eene zijde 3 de anderen 2 is:) maar niet door eenig getal: men kan wel een getal vinden dat er hoe langer hoe nader bijkomt, dat daarvan zoo weinig verschilt als men wil, doch nimmer een, dat dien wortel evenaart.

Wanneer men dan van *onmeetbare getallen* spreekt, duidt men dezelve door een teeken aan, en spreekt niet van het geen zij zijn, want zij zijn er niet; maar van het geen zij zouden zijn, indien men ze door getallen uitdrukken kon, het geen onmogelijk is.

V. AANMERKING. Wij hebben in de voorgaande aanmerking gezegd, dat men de wortels van getallen, wanneer zij geen geheele getallen zijn, door geen getal hoegenaamd kan uitdrukken, en dat dus die wortels, ten opzigte dier gemelde getallen, volstrekt *onmeetbaar* zijn: men kan derhalven die wortels noch door een geheel getal, noch door eene breuk uitdrukken: en dus door geen getal hoegenaamd.

Immers zij a een getal, wiens vierkant a^2 juist kleiner is dan een ander getal dat geen *quadraat-getal* is, maar hier door A^2 verbeeld wordt: maar zij, het vierkant van $a + 1$ juist grooter dan A^2: dan is de wortel van A^2 grooter dan

dan a, maar kleiner dan $\overline{a+1}$: dus a met eene breuk: ſtel $a+\frac{1}{n}$: dit getal door zich zelf multipliceerende, krijgt men deszelfs vierkant of $a^2+\frac{2a}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2=A^2$: en daar A^2 een geheel getal is, moet $a^2+\frac{2a}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2$ het ook zijn: het deel a^2 is het: het deel $\frac{2a}{n}$ kan het zijn: men ſtelle zulks: maar $\frac{1}{n^2}$ blijft altijd eene breuk, en dus de geheele ſom eene breuk. Stel dat $\frac{2a}{n}$ eene breuk is; dan zal $\frac{2a}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2$ of $\frac{1}{n}\times\left(2a+\frac{1}{n}\right)$ echter eene breuk blijven: dus is het vierkant $a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}$ eene breuk, daar het, indien $a+\frac{1}{n}$ de wortel van A^2 was, een geheel getal moest zijn: dus is het de ware wortel van A^2 niet. In andere woorden; eene ware breuk, of eene oneigenlijke breuk die niet opgaat, eens of meermalen met zich zelf vermenigvuldigd zijnde, zullen de uitkomſten altijd breuken zijn, die niet opgaan, en die dus niet tot geheele getallen kunnen gebragt worden. Dus $\frac{7}{5}$ met $\frac{7}{5}$ multiplicerende komt er $\frac{49}{25}$: insgelijks eene breuk die niet opgaat. Het zelfde heeft plaats voor $\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}=\frac{343}{125}$; voor $\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}$ enz. Daar dan de magten van breuken, ook breuken zijn, zal omgekeerd een geheel getal geen breuk tot wortel kunnen hebben.

VI. AANMERKING. Er zijn dan getallen, waarvan men den quadraatwortel, er zijn insgelijks getallen, waarvan men den cubiekwortel in getallen kan uitdrukken: er zijn anderen, waarvan zulks niet mogelijk is: de eerstgemelde worden *quadraat-getallen*, en *cubiek-getallen* genoemd: de andere kunnen dien naam niet dragen; men kan er den wortel ſlechts bij nadering uit trekken: zoo is de wortel van 2, of $\sqrt{2}$, ten naastenbij 1.414213: dat wat te klein, daar 1.414214 wat te groot is. Het is het zelfde getal dat wij te voren

(Aanm.

(Aanm. III.) voor de diagonaal van een vierkant gevonden hebben: en in de daad die diagonaal wordt door $\sqrt{2}$ uitgedrukt, om dat, (gelijk in het IV. Boek, Voorstel IX. Gev. 5.) bewezen zal worden, het vierkant op eene lijn overeenkomt met de tweede magt van het getal dat de lengte van die lijn uitdrukt.

VII. AANMERKING. Indien dan A en B, onderling *onmeetbaar* zijn, en C een effen deel van B is dat er *m* malen ingaat, zal het zelfde deel C, een zeker getal malen, *n* bij voorbeeld, genomen, kleiner zijn dan A, doch eene maal meer, namelijk $\overline{n+1}$ malen, genomen, grooter: zoo dat, daar $m\,C = B$ is, men hebben zal $n\,C < A$ en $\overline{n+1}\,.\,C > A$; zonder dat er eenig getal, bij v. $n + \frac{1}{p}$, is dat, door zijne vermenigvuldiging met C, gelijk aan A worden kan.

IX. BEPALING.

Wanneer men twee gelijksoortige grootheden vergelijkt, ten einde de grootte van de eene uit die van de andere *onmiddelijk* te bepalen, noemt men dit derzelver *rede* nategaan: en die bepaling zelve is de *rede* welke die grootheden onderling tot elkander hebben.

St. V. Bep. 2. Zie vooral KOENIG op de 3. Bepaling van het V. Boek van EUCLIDES.

AANMERKING. Men kan de grootheden onderling op verschillende wijzen vergelijken: voornamelijk op twee wijzen. De eerste als men nagaat, A en B gegeven zijnde, *hoe vele malen* B in A bevat is; de tweede als men nagaat welk het verschil is tusschen A en B: d. i. *hoe veel* (niet hoe vele malen) A grooter is dan B, of B grooter dan A. De eerste wijze wordt *Geometrische*, de andere *Arithmetische* rede genoemd; waaruit de *geometrische* en *arithmetische* proportien, of *evenredigheden* ontstaan: en uit deze, onderling, doch op twee verschillende wijzen, vereenigd, worden de *harmonische evenredigheid* en de *Logarithmen* geboren. Wij zullen dit alles verklaren.

I. AFDEELING.

OVER DE GEOMETRISCHE EVENREDIGHEID.

BEPALINGEN.

X. BEPALING.

Wanneer men twee gelijkſoortige grootheden met elkander vergelijkt, ten einde te weten welke *vermenigvuldigde* of *hoeveelvoud* de eene van de andere zij; of, het geen op het zelfde uitkomt, hoe vele malen de laastgemelde in de eerſte begrepen is, of een hoeveelſte deel zij er van is, wordt men gezegd de *geometriſche rede*, of ook enkel bij uitſtek de *rede*, die er tusſchen die grootheden plaats heeft, nategaan: zoo dat de *geometriſche rede*, of enkel de *rede*, tusſchen twee grootheden, aantoont *hoe vele malen* de eene de andere bevat.

De grootheden welke die *rede* uitmaken worden derzelver *leden* genoemd: de grootheid die men het eerst noemt, draagt den naam van *voorgaande*, de andere dien van *volgende*: er is dus in iedere *rede* een *voorgaand* en een *volgend lid*.

Zie TACQUET op de definitien van EUCLIDES V. — St. V. Bep. 3, 4.

GEVOLG.

Er zijn geen grootheden, mits zij gelijkſoortig zijn, die niet eene bepaalde geometriſche rede tot elkander hebben.

I. AANMERKING. Ik zeg *grootheden* en niet enkel *getallen*, want dit alles is op alle ſoorten van grootheden toepasſelijk.

II. AANMERKING. Men verdeelt de geometriſche *rede* in *meetbare* en *onmeetbare*. Eene rede is meetbaar wanneer zij door getallen uitgedrukt wordt, of kan worden: doch *onmeetbaar*, of *irrationeel*, wanneer de grootheden die men vergelijkt zoodanig zijn, dat hare rede door geen getal uitgedrukt kan worden: in dat geval kan men de rede ſlechts aanduiden door een teeken, bij v. zoo als de rede van $\sqrt{2}$ tot 1; of door lijnen: men weet dan wel niet hoe vele malen de eene grootheid in de andere begrepen is, doch men weet de uiterſten tusſchen welken dat getal invalt: zoo als bij v. de rede van $\sqrt{2}$ tot 1 is grooter dan $1.\frac{414213}{1,000,000}$ doch kleiner dan $1.\frac{414214}{1,000,000}$

L. C. § 288.

III. AANMERKING. Men moet echter niet denken dat wanneer men twee onmeetbare grootheden vergelijkt, derzelver *rede* tot elkander altijd *onmeetbaar* is: zij kunnen eene meetbare rede tot elkander hebben, hoe wel ieder dezer grootheden met opzigt tot eene andere, stel de eenheid, onmeetbaar zij: bij voorbeeld de rede van $\sqrt{2}$ tot $\sqrt{8}$ is die van 1 tot 2, dus *meetbaar*, hoe wel die grootheden elk in zich zelve met betrekking tot de eenheid onmeetbaar zijn.

IV. AANMERKING. EUCLIDES geeft deze bepaling van het woord rede: „ Rede, zegt hij (3. bepaling) is de onderlinge betrekking van „ *veelvoudigheid*, die twee grootheden tot elkander hebben:" en hij voegt er in de 4 bepaling bij. „ Grootheden worden gezegd eeni„ ge rede tot elkander te hebben, als de eene door vermenigvul„ diging de andere *overtreffen* kan." Men lette wel: hij zegt niet *evenaren*: want dan zou de bepaling slechts betrekkelijk zijn tot *meetbare* grootheden: maar *overtreffen*, het geen de *onmeetbare* ook bevat. Bij vele vertalers leest men in de derde bepaling *betrekking van grootheid* (in het latijn *secundum quantitatem*) in plaats van *veelvoudigheid* (*secundum quantuplicitatem*); doch dit zoude even eens op arithmetische als op geometrische reden toepasselijk zijn, het geen EUCLIDES niet bedoelde, zoo als overvloedig uit zijn VII. Boek blijkt. Dat men hier de grieksche woorden *κατὰ πηλικότητα* door *volgens de veelvoudigheid* vertalen moet, is door WALLIS (*Opera Mathematica* T. II. p. 666) en anderen aangewezen: ook heeft GREGORIJ het aldus vertaald. Zie KOENIG over deze plaats. Men is het algemeen onder de geleerden eens, dat die bepaling van EUCLIDES duister is; en R. SIMSON gist dat zij niet van dien uitmuntenden wiskunstenaar is, maar door eene latere onkundige hand in den tekst ingelascht is geworden.

XI. BEPALING.

Men noemt *Aanwijzer* (*) van eene rede het *quotient* dat uit de divisie van de *voorgaande* door de *volgende* voortkomt, of begrepen wordt voort te komen.

St. V. Bep 6.

I. AANMERKING. In de daad, daar de *rede* van twee grootheden aanduidt hoe veel malen de eene in de andere begrepen is, en daar het *quotient* van eene divisie dit ook doet; is dat *quotient* de ware aanwijzer van die rede: en dit wel, altijd stilzwijgend, met betrekking tot die eenheid, welke men tot grondslag legt.

II.

(*) Men zoude dien *aanwijzer* ook *exponent* der rede kunnen noemen, en het geschied door sommigen: doch ik zal, om alle dubbelzinnigheid te voorkomen, altijd, en bij uitsluiting, het woord *aanwijzer* gebruiken om eene geometrische rede uittedrukken: en *exponent* (Zie Bep. IV. Aanm. 2. 3. en Bep. V. Aanm. 2.) om de *magten* van getallen aantewijzen.

II. AANMERKING. Andere Schrijvers noemen *aanwijzer*, of *quotient*, het quotient dat uit de divisie, niet van de *voorgaande* door de *volgende*, maar van de *volgende* door de *voorgaande* voortkomt: doch dit komt op het zelfde uit, mits men in de bewijzen en stellingen het woord *aanwijzer*, of *quotient*, altijd in den zelfden zin neme.

III. AANMERKING. TACQUET geeft den naam van *noemer* aan het geen wij *aanwijzer* heten. Zie zijn V. Boek, III. gedeelte §. 2, 3.

GEVOLG.

Wanneer de *voorgaande* grooter is dan de *volgende*, is de *aanwijzer* een *geheel getal*, of een *geheel getal met eene breuk*: zoo de *voorgaande* kleiner is, is de *aanwijzer* eene *zuivere breuk*: zoo de aanwijzer *meetbaar* is, is de rede *meetbaar*, doch zoo hij *onmeetbaar* is, is de rede *onmeetbaar*, en omgekeerd.

IV. AANMERKING. Wanneer de aanwijzer onmeetbaar is, kan hij door geen getal uitgedrukt, doch slechts door een teeken aangeduid, of door lijnen opgegeven worden, zoo als $\sqrt{5} : \sqrt{7}$. En dit is de reden waarom wij in de bepaling gezegd hebben *voortkomt*, of *begrepen wordt voortekomen*.

V. AANMERKING. De rede wordt in woorden dus uitgedrukt, A *tot* B: en in plaats van het woord *tot* gebruikt men het teeken (:) of (,) dus A:B of A, B: ook wel, in navolging van LEIBNITS, het teeken van *divisie*, eene streep namelijk, $\frac{A}{B}$: en in de daad, daar de rede aanduidt hoe veel malen de eene grootheid de andere bevat, bestaat zij in eene divisie, en wordt door het in het werk stellen van die divisie bekend.

XII. BEPALING.

Twee *reden* worden *gelijk*, of *de zelfde* genoemd, wanneer hare *aanwijzers* even groot zijn: doch van twee *reden* is die de grootste waarvan de aanwijzer de grootste is: of, het geen op het zelfde uitkomt; eene rede is even groot, grooter, of kleiner dan eene andere, naar mate haar aanwijzer even groot, grooter of kleiner is dan die van de tweede rede. Wanneer nu verscheiden grootheden onderling *de zelfde* rede hebben, zegt men dat zij *evenredig*, of

of *proportioneel* zijn: en de *evenredigheid*, of *proportie*, heeft plaats als er eene gelijkheid van reden plaats heeft.

St. V. Bep 8, 9, 20.

I. AANMERKING. De evenredigheid werdt voorheen meest aldus uitgedrukt door vier ſtippen (: :), namelijk

A : B : : C : D of

A , B : : C , D;

doch daar de evenredigheid in de daad eene gelijkheid is van twee *reden*, en dus van de *quotienten* uit twee *diviſiën* geſproten, wordt dezelve, in navolging van LEIBNITS, veel beter en eigenaartiger uitgedrukt op deze wijze:

A : B = C : D : of, wat nog beter zoude zijn

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

II. AANMERKING. Wanneer de beide reden meetbaar zijn, valt het gemakkelijk over derzelver gelijkheid of ongelijkheid te oordeelen, en zulks alleen uit den aanwijzer Maar hoe oordeelt men, zal men zeggen, over de gelijkheid of ongelijkheid van twee *onmeetbare reden?* daar geen van beiden door getallen uitgedrukt kan worden, en dus geen van beiden naauwkeurig en in de daad bekend is.

Men oordeelt er van op tweederlei wijze: voor eerst, daar de onmeetbare reden door een teeken, of door lijnen, kunnen worden uitgedrukt (8. Bep. Aanm. 1, 2, 4), oordeelt men dat zij gelijk zijn, als zij het zelfde teeken tot aanwijzer hebben, of door gelijke lijnen uitgedrukt worden; dus is de rede $\sqrt{3} : \sqrt{6}$ gelijk aan de rede van $1 : \sqrt{2}$: of die van $\sqrt{6} : \sqrt{8}$ gelijk aan die $\sqrt{3} : \sqrt{4}$; en derhalve zijn $\sqrt{3}, \sqrt{6}$, en $1, \sqrt{2}$: of $\sqrt{6}, \sqrt{8}$, en $\sqrt{3}, \sqrt{4}$ evenredig.

Maar is er een tweede middel dat algemeener is, en zoo wel op de meetbare als op de onmeetbare grootheden toegepast kan worden. Indien men twee reden, bij v. A:B, en C:D heeft, zal men mogen vastſtellen, dat de rede van A tot B gelijk is aan die van C:D, als men bewijzen kan dat zij noch kleiner, noch grooter zijn kan: of, wat op het zelfde uitkomt, wanneer men bewijzen kan, dat men in ongerijmdheden vervalt, indien men onderſtelt dat die reden ongelijk zijn, of dat de eene grooter of kleiner is dan de andere: eene, naar ons oordeel, uitmuntende trant van bewijzen.

I. GEVOLG.

Wanneer vier grootheden evenredig zijn, en de eerſte en

 twee-

tweede zijn *onderling meetbaar*; zijn de derde en vierde insgelijks onderling meetbaar: doch zoo de eerste en tweede *onderling onmeetbaar* zijn; zijn de derde en vierde ook onderling onmeetbaar.

BEWIJS. Zoo A:B = C:D, is $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$: en dus zoo $\frac{A}{B}$ een getal is, moet $\frac{C}{D}$ er ook een zijn: en zoo $\frac{A}{B}$ geen getal, en dus onmeetbaar is, moet $\frac{C}{D}$ het ook zijn.

III. AANMERKING. Dit gevolg is de 10 propositie van het X. Boek van EUCLIDES: men lette wel dat wij zeggen de eerste en tweede, de derde en vierde *onmeetbaar onderling*, dat is, hare rede onmeetbaar Want wij hebben reeds gezegd (X. Bep. Aanm. 3.) dat de onmeetbare grootheden eene meetbare rede hebben kunnen: dus $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1:2$. Wij beschouwen dan hier de *onmeetbare* grootheden, niet op zich zelve, (dat is met betrekking tot de eenheid) maar met betrekking tot elkander, *onderling*, dat is, wij beschouwen derzelver rede.

IV AANMERKING EUCLIDES heeft twee bepalingen van *gelijkheid* van reden gegeven; de eene is de 20 Bepaling van het VII. Boek, alwaar hij zegt: „ Getallen zijn evenredig, als de eerste een ge„ lijkvoud, of een gelijk deel, van de tweede is, als de derde „ van de vierde:" onze bepaling nu van evenredigheid is volkomen de zelfde. De andere, die niet alleen op getallen, maar op alle grootheden, ook op de onmeetbare, toepaslijk is, is de 5 van het V. Boek, en komt hier op uit. „ Indien er vier grootheden ge„ geven zijn, en men neemt evenvermenigvuldigden, of gelijkvou„ den, van de eerste en van de derde, en andere gelijkvouden „ van de tweede en van de vierde: zullen die grootheden in de „ zelfde rede staan; namelijk de eerste tot de tweede, de derde „ tot de vierde; indien, wanneer het gelijkvoud van de eerste „ even groot, of grooter, of kleiner is, dan dat van de tweede; „ tevens ook het gelijkvoud van de derde even groot, of grooter, „ of kleiner is, dan dat van de vierde; en zulks altijd, en vol„ gens welke vermenigvuldiging men ook wille," waar bij EUCLIDES in de 6 Bepaling voegt: „ grootheden die in de zelfde rede „ staan, worden evenredig genoemd."

Bij voorbeeld: indien A, B, C, D, gegeven zijn: en men neemt gelijkvouden mA en mC, insgelijks nB en nD; dan zal $A:B = C:D$ zijn. indien wanneer $mA > nB$ ook $mC > nD$: en wanneer $mA < nB$ ook $mC < nD$: en wanneer $mA = nB$ ook $mC = nD$, welke getallen men ook voor m en n neme.

Deze bepaling van EUCLIDES is algemeen, en bevat zoo wel de *meetbare* als de *onmeetbare* grootheden: doch zij is niet geheel duidelijk; en veelligt niet uit de ware en eenvoudige natuur van het geen men oorspronglijk door *rede* verstaat, ontleend: zie KOENIG

ter dezer plaatse. De leer der *aanwijzers*, die of *meetbaar* of *onmeetbaar* zijn, is gemakkelijker, en even algemeen als die van EUCLIDES: wij zullen echter in het I, II, en III Voorstel toonen, dat de bepaling van EUCLIDES uit de onze, en de onze uit die van EUCLIDES volgt.

V. AANMERKING. Om de zelfde reden geeft EUCLIDES deze bepaling van ongelijke reden: „ Wanneer men gelijkvouden van de eerste „ en derde grootheid, en andere gelijkvouden van de tweede en „ vierde genomen heeft, en wanneer dan het gelijkvoud van de „ eerste, dat van de tweede overtreft, zonder dat het gelijkvoud „ van de derde dat van de vierde overtreffe, zal de eerste groot„ heid grootere rede hebben tot de tweede dan de derde tot de „ vierde." V. Bep. 7.

VI. AANMERKING. EUCLIDES voegt er deze VIII. Bepaling bij: „ Even„ redigheid is gelijkheid van reden." Dit zoude volkomen met de XX. Bepaling van zijn VII. Boek en met onze Bepaling overeenkomen. Maar R. SIMSON gist dat die Bepaling niet van EUCLIDES is, en door eene latere hand in den text is ingevoegd.

II. GEVOLG.

Alle breuken, en alle producten, of getallen door vermenigvuldiging of *multiplicatie* ontstaan, zijn *reden:* want stel $\frac{A}{B} = q$ en $D \times E = C$, dan is er de zelfde rede tusschen A en B, als tusschen q en de eenheid: en tusschen E en de eenheid als tusschen C en D.

VII. AANMERKING. De bepalingen, die men in de meeste cijfferboeken van *multipliceeren* en *divideeren* geeft, zijn zeer gebrekkig. Naauwkeurig gesproken bestaat de *multiplicatie* in het vinden van een getal, dat tot een der gegevene staat, als het ander tot de eenheid; en de *divisie*, (hoewel oorspronkelijk eene aftrekking des *divisors* van het *dividendum*, zoo dikwerf geschieden kan,) bestaat echter ook in het vinden van een getal dat tot de eenheid staat, als het getal dat *gedivideerd* moet worden, tot den *divisor*, of deeler.

Zie hier over KOENIG op EUCL. V. def. 1, 2. — L. C. §. 287. — doch vooral D'ALEMBERT *Melanges:* V. p. 217.

III. GEVOLG.

De evenredigheid vereischt ten minsten drie grootheden.

EUCL. V. Bep. 9.

VIII. AANMERKING. Men maakt in de gewoone wijze van spreken een bestendig misbruik van het woord *proportie*, dat men met het woord *rede* bijna altijd verwisselt, zeggende, de *proportie* van A tot B: dit is een misslag; er is

is geen *proportie* of evenredigheid tusschen twee grootheden; maar twee grootheden hebben eene bepaalde *rede* tot elkander: en dan eerst wordt eene *proportie*, of *evenredigheid*, geboren, wanneer men twee *reden*, die gelijk zijn, met elkander vergelijkt: het zij deze te samen uit drie grootheden, het zij uit vier grootheden bestaan; in het eerste geval is $A : B = B : C$ of $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$: in het tweede

$A : B = C : D$ of $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

XIII. BEPALING.

Wanneer de grootheden, die gelijke rede tot elkander hebben, alle verschillende zijn, zegt men dat die grootheden *onderscheidenlijk* (*discrete*) evenredig zijn: doch wanneer die grootheden zoodanig gesteld zijn, dat er altijd eene van de vorige rede in de volgende herhaald wordt; dat is, dat de volgende grootheid in de eerste rede de voorgaande is in de tweede, de volgende in de tweede, de voorgaande in de derde, en zoo bestendig voort: dan zegt men dat die grootheden *gedurig* (*continue*) evenredig zijn: en die gedurige evenredigheid wordt eene geometrische *reeks* of *progressie* genoemd, in welke men *evenverafstaande leden* noemt, die leden, welke door een even groot getal leden van eenig bepaald lid gescheiden worden.

A, B, C, D, E. F, G, H zijn gedurig evenredig, of maken eene geometrische reeks uit, indien,

$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{E}{F} = \frac{F}{G}$ enz. of $A : B = B : C = C :$ $D = D : E = E : F = F : G$ enz.

St. V. Bep. 12, 21, 24.

GEVOLG.

Hier van is het dat men zegt, dat getallen of grootheden, die gedurig evenredig zijn, eene geometrische *reeks* uitmaken: die reeks wordt *aanwassende*, ook *opgaande*, of *verminderende*, ook *samenlopende*, of *neergaande* genoemd, naar mate de leden bestendig aangroeijen, of verminderen.

AANMERKING. Eene geometrische reeks, of gedurige evenre-

redigheid wordt aldus (∺) door vier stippen aangeduid, ∺ A, B, C, D, E, enz.

XIV. BEPALING.

Wanneer drie grootheden *gedurig evenredig* zijn noemt men de tweede, of middelste, *middel evenredige*, en de laatste, *derde evenredige:* en wanneer vier grootheden *onderscheidenlijk evenredig* zijn, noemt men de vierde of laatste *vierde evenredige.* Als dan worden ook de eerste voorgaande en de laatste volgende grootheid de *uitersten*, of *uiterste leden*, genoemd: de eerste volgende en de tweede voorgaande, de *middelsten*, of *middelste leden.*

St. V. Bep. 13, 14.

XV. BEPALING.

De *voorgaande* worden met betrekking tot de *voorgaande* en de *volgende* met betrekking tot de *volgende gelijkgeplaatste* (*homologi*) leden genoemd.

EUCL. V. Bep. 12.

XVI. BEPALING.

Wanneer men vier grootheden heeft, en men derzelver rede beschouwt met betrekking tot de orde in welke men ze opnoemt; zegt men dat zij *regtstreeks* tot elkander, of in *regte rede* staan, als de eerste staat tot de tweede als de derde tot de vierde: of in andere woorden; zoo de rede van de eerste tot de tweede gelijk is aan de rede van de derde tot de vierde: maar men zegt dat zij *omgekeerd* tot elkander staan, of in *omgekeerde rede* zijn, als de leden welke onderling gelijke rede hebben, den rang, waarin men ze heeft opgenoemd niet volgen: dat is, als de eerste staat tot de tweede als de vierde tot de derde; of de tweede tot de eerste als de derde tot de vierde; of de eerste tot de derde als de vierde tot de tweede.

L. C. §. 263. — St. V. Bep. 23.

GEVOLG.

Hier uit volgt dat de omgekeerde rede van twee grootheden gevonden wordt met de *volgende* grootheid door de

voorgaande, in plaats van de *voorgaande* door de *volgende*, te divideren: $\frac{A}{B}$ is de omgekeerde rede van $\frac{B}{A}$: en $\frac{1}{B}$ is de omgekeerde rede van B : 1.

L. C. §. 299.

XVII. BEPALING.

Men noemt *samengestelde rede* die welke uit verscheide andere reden wordt opgemaakt; en dat wel door vermenigvuldiging der enkele reden, (in dat geval ook wel *wortels* en *factoren* genoemd) uit welke de samengestelde gevormd wordt. Wanneer alle de wortels *regtstreeks* genomen worden, is de samengestelde rede *regtstreeksche rede* uit allen: zoo zij alle *omgekeerd* genomen worden, is de samengestelde rede *omgekeerde samengestelde rede* der wortels: en zoo sommige wortels regtstreeks, andere omgekeerd genomen worden, is de samengestelde rede uit regtstreeksche en uit omgekeerde reden gevormd.

VOORBEELD. Men hebbe de reden $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{I}$: dan is de rede van P : Q samengesteld uit die van $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$ enz. indien $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{E}{F}$: enz. dus is die van $\frac{10}{27}$ samengesteld uit $\frac{2}{3}$ en $\frac{5}{9}$: de rede van R : S is de omgekeerde samengestelde uit $\frac{A}{B}$ en $\frac{C}{D}$, indien $\frac{R}{S} = \frac{B}{A} \times \frac{D}{C} = \frac{1}{\frac{AC}{BD}}$: dus is $\frac{10}{27}$ omgekeerd samengesteld uit $\frac{3}{2}$ en $\frac{9}{5}$. De rede van T : U is samengesteld uit de regtstreeksche van $\frac{A}{B}$ en de omgekeerde van $\frac{C}{D}$ indien $\frac{T}{U} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$. Dus is $\frac{8}{27}$ de samengestelde regtstreeks uit $\frac{4}{9}$ en omgekeerd uit $\frac{3}{2}$.

L. C. §. 290. — St. VI. def. 5.

AANMERKING. EUCLIDES geeft in zijn V. Boek geen bepaling van *famengestelde* rede; maar men vindt er eene in het VI Boek, de vijfde namentlijk welke dus luidt. „ Eene rede wordt gezegd uit „ *reden te zijn famengesteld*, als de *hoeveelheden* der reden, on„ derling gemultipliceerd, de *hoeveelheid* van die rede uitmaken:" R. SIMSON fchrijft die bepaling, welke hij voor *ongerijmd* en *onbruikbaar* houdt, aan THEON toe, en verwerpt ze geheel. WALLIS echter oordeelt, en dit draagt de goedkeuring van GREGORIJ weg, dat men de woorden door *hoeveelheden hoeveelheid*, vermeld, door *aanwijzers*, *aanwijzer*, vertalen moet: en dan is de bepaling goed. Het valt nu niet te ontkennen dat EUCLIDES in het XXIII. Voorstel van zijn VI. Boek, de *famengestelde rede* in dien zin gebruikt. Zie WALLIS *de compositione rationum* in *Oper Mathem.* II. p. 663.

XVIII. BEPALING.

Wanneer eene rede uit gelijke reden wordt famengesteld, wordt zij *verdubbelde*, *driedubbelde*, *vierdubbelde* enz. genoemd, naar mate zij uit twee, uit drie, uit vier, gelijke reden famengesteld is, en dus [Bep. 4.] de tweede, derde, of vierde magt van die rede is $\frac{A \times A}{B \times B}$ of $\frac{A^2}{B^2}$; $\frac{A \times A \times A}{B \times B \times B}$ of $\frac{A^3}{B^3}$; $\frac{A \times A \times A \times A}{B \times B \times B \times B}$ of $\frac{A^4}{B^4}$ zijn de verdubbelde, driedubbelde, vierdubbelde rede van $\frac{A}{B}$.

St. V. Bep. 26. — L. C. §. 291.

AANMERKING. Daar de bepalingen door EUCLIDES van *verdubbelde*, *driedubbelde* rede enz. gegeven, uit andere grondbeginsels afgeleid zijn, behoren wij dezelve nategaan, vooral daar die bepalingen eenigen invloed in het vervolg kunnen hebben.

Zij zijn de 10 en 11 Bepaling van het vijfde Boek:

„ Zoo drie grootheden evenredig (d. i. gedurig evenredig) zijn, „ wordt de eerste gezegd tot de derde eene dubbelde rede te „ hebben van die welke zij heeft tot de tweede."

„ Zoo vier grootheden evenredig (d. i. gedurig evenredig) zijn, „ wordt de eerste gezegd tot de vierde eene driedubbelde rede te „ hebben van die, welke zij heeft tot de tweede: en zoo voorts, „ zoo lang de evenredigheid duurt."

Wanneer ik dus zeg, de rede $\frac{P}{Q}$ is de verdubbelde van $\frac{A}{B}$, duidt dit aan, volgens ons, dat die rede uit de vermenigvuldiging van de rede $\frac{A}{B}$ door zich zelve gevormd wordt: volgens EUCLIDES, dat de rede $\frac{P}{Q}$ die is van de eerste A tot de derde C van drie gedurige evenredigheden, waarvan A en B de twee eerste zijn. Wan-

neer wij zeggen, dat de rede van P tot Q de driedubbelde is van de rede van A tot B, geeft het volgens ons te kennen, dat die rede uit de vermenigvuldiging van de rede $\frac{A}{B}$, twee malen door zich zelve gemultipliceerd, ontstaat, of, dat zij de rede is van A^3 tot B^3: volgens EUCLIDES, dat de rede van P tot Q de rede is van de eerste tot de vierde van vier gedurig evenredige grootheden, waarvan A en B de twee eerste zijn Hoe veel nu die uitdrukkingen in den eersten schijn van elkander verschillen mogen, komen zij op het zelfde uit, zoo als wij zulks in de Aanmerking op het XV. Voorstel zullen bewijzen.

EUCLIDES heeft zekerlijk zijne bepaling boven de andere, die natuurlijker is, en hem niet onbekend was, als regtstreeks uit de 5. Bep. van het VI. Boek volgende, verkoren, om dat hij de verdubbelde rede van twee lijnen in het VI. Boek wilde gebruiken: terwijl hij wel begreep, dat de multiplicatie in eenen strikten zin alleen op getallen, en niet op lijnen of andere grootheden kan geschieden; waarom hij dan ook, bij het denkbeeld van de verdubbelde rede van lijnen, het denkbeeld van multiplicatie wilde vermijden.

XIX. BEPALING.

Men noemt *onderverdubbelde* rede, *onderdriedubbelde* rede, en zoo voorts, eene rede, die de tweede, of de derde wortel, en zoo voorts, is van eene gegeven rede.

Bijv. $\sqrt{\frac{A}{B}}$ of $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ of $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ zijn onderverdubbelde, en onderdriedubbele rede van $\frac{A}{B}$.

St VI. Bep. 6.

AANMERKING. Men maakt nog meerdere onderscheidingen van reden, welke men alle bij CLAVIUS over de bepalingen van het V. Boek van EUCLIDES zien kan. Zoo als bij voorb. *anderhalve* rede: dat is, de rede der vierkante wortels van de derde magten, of $\frac{\sqrt[2]{A^3}}{\sqrt[2]{B^3}}$ of $\sqrt[2]{\frac{A^3.}{B^3.}}$

VOOR-

VOORONDERSTELLINGEN.

I.

Men vooronderstelt, dat, wanneer drie grootheden gegeven zijn, er eene vierde evenredige tot dezelven gevonden kan worden.

II.

Dat, zoo twee grootheden gegeven zijn, er eene derde evenredige gevonden kan worden.

AXIOMATA,

OF

ALGEMEENE KUNDIGHEDEN (*).

I.

Gelijke grootheden hebben de zelfde rede tot elkander, gelijk ook iedere derzelve tot eene derde grootheid.

Zoo $A = B$, $C = D$; is
$A : B = C : D$
en
$A : E = B : E$.

EUCL. V. 7.

II.

Eene grootere grootheid heeft tot eene andere eene grootere rede dan eene kleinere tot de zelfde: doch die derde heeft eene kleinere rede tot de groote dan tot de kleine: en eene grootere rede tot de kleine dan tot de groote: en omgekeerd.

Zoo $A > B$: is $A : C > B : C$
$C : A < C : B$
$C : B > C : A$.

EUCL. V. 8, 10.

III.

(*) Het verschil der wijzen waarop de evenredigheden door EUCLIDES of door ons behandeld worden, brengt te weeg, dat sommige stellingen, die, naar de bepalingen door ons gegeven, *Axiomata* zijn, het niet zijn naar de bepalingen van EUCLIDES, doch bewezen moeten worden: gelijk dan ook die Schrijver gedaan heeft.

III.

Grootheden die tot de zelfde grootheid eene gelijke rede hebben, zijn gelijk; en omgekeerd:

zoo A: B = C: B, is A = C

zoo A = C is A: B = C: B.

EUCL. V. 9.

IV.

De *even-vermenigvuldigde* en *even-ondervermenigvuldigde*, of *gelijkvoudige* en *gelijkdeelige* van twee gelijke grootheden zijn gelijk, en die van twee ongelijke grootheden zijn in de zelfde rede als de grootheden zelve.

zoo $A = B$, is $m \times A = m \times B$ en $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$.

zoo $\frac{A}{B} = q$ is $\frac{mA}{mB} = q$

zoo A: B = C: D is mA: mB = C: D en mA: mB = mC: mD en mA: mB = nC: nD.

EUCL. V. 15. en VII. 17, 18.

GEVOLG.

Men kan dit ook aldus uitdrukken: zoo twee grootheden gelijk aan elkander zijn, wordt de gelijkheid niet gestoord, indien zij door het zelfde getal gemultipliceerd of gedivideerd worden: en eene grootheid blijft de zelfde, indien zij door de zelfde grootheden gemultipliceerd en gegedivideerd wordt.

L. C. §. 296, 297. — St. V. 10, 12.

V.

Indien twee reden gelijk aan eene derde zijn, zijn zij onderling gelijk.

EUCL. V. 11. — St. V. 11.

VI.

Indien twee reden gelijk aan elkander zijn, en eene derzelve grooter of kleiner is dan eene derde, is de tweede het ook.

EUCL. V. 13.

EI-

EIGENSCHAPPEN
DER
GEOMETRISCHE EVENREDIGHEDEN.

I. VOORSTEL.

Indien vier grootheden A, B, C, D evenredig zijn: en men neemt gelijkvouden [m] van de eerste en derde [mA, mC] en andere gelijkvouden [n] van de tweede en vierde [nB, nC]: zal het gelijkvoud van de derde altijd even groot, grooter of kleiner zijn dan dat van de vierde; naar mate het gelijkvoud van de eerste even groot, grooter of kleiner is, dan dat van de tweede, welke vermenigvuldiging men ook neme.

BEWIJS Uit de onderstelling is

$A:B = C:D$ of $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

dus (*Axioma* 4.) $\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD}$: derhalve

zoo mA of $>$ of $=$ of $<$ nB is ook
mC of $>$ of $=$ of $<$ nD
D. T. B. W.

AANMERKING. Men ziet dat de bepaling der evenredigheid, door EUCLIDES gegeven, uit de onze volgt. Zie onze XII. Bep. Aanm. 4.

II. VOORSTEL.

Zoo de rede van A tot B grooter is dan die van C tot D; kan men zoodanige gelijkvouden [m] van de eerste en derde [mA, mC] en zoodanige andere gelijkvouden [n] van de tweede en vierde nemen [nB, nD]; dat, zoo het gelijkvoud van de eerste [mA] dat van de tweede [nB] overtreft, nochtans dat van de derde [mC] dat van vierde [nD] niet overtreffe, maar of gelijk, of kleiner zij.

TACQUET op het V. Boek van EUCLIDES Part. II. Th. 1.

BEWIJS: Zij $A:B > C:D$ of $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$: derhalve

$\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$: nu kan, indien $mA > nB$ is, $\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$ zijn,

zijn, al is $mC > nD$, en het heeft zeker plaats als $mC = nD$, of $mC < nD$ is.

III. VOORSTEL.

Indien men twee reden heeft $A:B$ en $C:D$; en men neemt gelijkvouden [nA, mC] van de voorgaande, [A, C] en andere gelijkvouden [nB, nD] van de volgende [B, D]: indien verder wanneer het gelijkvoud [mA] van de eerste voorgaande [A] grooter, of gelijk, of kleiner is dan dat [nB] van de eerste volgende [B], ook het gelijkvoud [mC] van de tweede voorgaande [C] altijd ook of grooter, of, gelijk kleiner is dan dat [nD] van de tweede volgende, volgens welke vermenigvuldiging men wille: zijn die twee reden gelijk.

TACQUET V. B. Part. II. Th. 2.

UITLEGGING. Het voorstel is; zoo mA of $>$ of $=$ of $<$ nB; en tevens $mC >$ of $=$ of $< nD$; is ook

$$A:B = C:D.$$

BEWIJS. Zoo dit geen plaats heeft, is of $A:B > C:D$ of $C:D > A:B$. Zoo het eerste; zal men (II. Voorstel) wanneer mA of $>$ of $=$ of $< nB$, kunnen hebben in elk dier drie gevallen of $mC > nD$, of $mC = nD$, of $mC < nD$, dat tegen de aangenomen onderstelling aanloopt. Zoo $C:D > A:B$; zal men, wanneer mC of $>$ of $=$ of $< nD$, kunnen hebben in elk van die drie gevallen, of $mA > nB$, of $mA = nB$, of $mA < nB$; dat insgelijks tegen de aangenomen onderstelling aanloopt. Derhalve is noch $A:B > C:D$; noch $A:B < C:D$: dus is $A:B = C:D$.

GEVOLG.

Indien men zoodanige gelijkvouden [mA, mC] van de voorgaande nemen kan, en zoodanige gelijkvouden [nB, nD] van de volgende, dat, terwijl het gelijkvoud van de eerste voorgaande grooter is dan dat van hare volgende [$mA > nB$], nochtans het gelijkvoud van de tweede voorgaande niet grooter, maar gelijk zij aan of kleiner zij dan dat van hare volgende [mC niet $> nD$], zal de reden van de eerste voorgaande tot de volgende grooter zijn, dan

dan die van de tweede voorgaande tot hare volgende [A : B > C : D.]

TACQUET V. B. Part. II. Th. 3.

BEWIJS. Zoo dit niet is; zij A : B = C : D, en dus (III. Voorstel) zoo $mA > nB$, is $mC > nD$, dat tegen de onderstelling aanloopt.

zoo A : B < C : D, of C:D > A : B; zal $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$, dus $\frac{mC}{nD} > \frac{mA}{nB}$ zijn; gevolglijk, zoo $mA > nB$, zal ook $mC > nD$ zijn, dat tegen de onderstelling aanloopt; dus is noch A : B = C : D, noch A : B < C : D: gevolgelijk is A : B > C : D.

I. AANMERKING. Men ziet uit dit Voorstel en zijn Gevolg, hoe de gelijkheid van rede uit de leer der gelijkvouden, door EUCLIDES aangenomen (zie Aanmerking IV. op de XII. Bepaling) afgeleid wordt: en derhalve dat de eene leer hieromtrent volmaakt met de andere overeenkomt. Het blijkt verder, dat het om het even is of de grootheden onderling meetbaar, dan of zij onmeetbaar gesteld worden.

II. AANMERKING. Wij zullen ons dan nu in het vervolg niet meer met de meetbaarheid of onmeetbaarheid in de Voorstellen ophouden, en den leiddraad onzer XII. Bepaling volgen: alleenlijk zullen wij in de aanmerkingen hier en daar een woord tot opheldering bijvoegen.

IV. VOORSTEL.

In alle evenredigheden, naar mate de voorgaande van de eerste rede grooter, even groot, of kleiner is dan de volgende: zal ook de voorgaande van de tweede rede grooter, even groot, of kleiner zijn dan de volgende.

EUCL. V. 14. — L. C. §. 306.

BEWIJS. Uit de onderstelling zelve dat $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

V. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheden eene geometrische evenredigheid uitmaken: is het product van de beide uiterste gelijk aan dat der beide middelste: en omgekeerd; wanneer twee producten, ieder uit twee grootheden bestaande, gelijk zijn, zijn die grootheden in eene Geometrische evenredigheid: de eerste namelijk van het eerste product tot

H de

de eerste van het tweede product, zoo als de tweede van het tweede product tot de tweede van het eerste product."

EUCL. VII, 19. — St. V. 6.

BEWIJS. Uit de 11 en 12. Bep. en Gevolg van Axioma 4.

I. AANMERKING. Wij verstaan hier zoo wel de *producten* die in de daad door getallen uitgedrukt kunnen worden, als die, welke men slechts kan aanwijzen: en dus is dit Voorstel zoo wel op de *onmeetbare* als op de *meetbare* grootheden toepasselijk.

II. AANMERKING. Men vindt dit Voorstel niet in het algemeen bij EUCLIDES: maar alleen voor de getallen in het VII. Boek; doch wij zullen in het IV. Boek, 9. Voorstel, Gevolg 5 aantoonen, dat het XVI. Voorstel van het VI. Boek van EUCLIDES met dit Voorstel overeenkomt.

I. GEVOLG.

Indien drie grootheden gedurig evenredig zijn, is het product der uiterste gelijk aan de tweede magt der middelste.

EUCL. VII. 20. — St. V. 6. Gev. 1.

III. AANMERKING. Wij zullen in het IV. Boek, 9. Voorstel, 8. Gevolg aantoonen, dat het XVII. Voorstel van het VI. Boek van EUCLIDES met dit Voorstel overeenkomt.

IV. AANMERKING. De gelijkheid van producten levert in vele gevallen eene gemeenzame wijze op om de rede die er tusschen grootheden is uittedrukken: de vraag bijv. welke is de verhouding van maat of gewigt op de eene plaats, en van maat en gewigt op eene andere? wordt in de meeste boeken, of mondeling bij de meesten, niet door de rede zelve, maar door een *product* beantwoord: bij v. aldus: 100 Amsterdamsche ellen zijn gelijk aan 106, of maken 106 ellen te Stettin. Men heeft hier een product van 100 A = 106 S: en dus S (of de el te Stettin) tot A (of el te Amsterdam) = 100 : 106. Men ontwaart in dat antwoord het denkbeeld dat EUCLIDES van proportie gegeven heeft. Deze is eene der aanmerkingen door MONTUCLA (*Hist. des Math.* I. p. 210.) gemaakt om de 5. Bepaling van het V. Boek van EUCLIDES te verdedigen.

II. GEVOLG.

Hier uit volgen van zelf de regels om eene vierde, eene derde, of eene middel-evenredige te vinden.

St. V. 7.

V.

V. AANMERKING. Het spreekt van zelf 1°. dat zoo men eene middel-evenredige zoekt tusschen twee getallen, de zelve niet in juiste getallen gevonden, maar alleen aangewezen, of bij *nadering* daargesteld zal kunnen worden, indien het *product* der uiterste geen *quadraat-getal* oplevert: want de middel evenredige is de wortel uit dat product. Dat echter twee lijnen gegeven zijnde er altijd eene middel-evenredige gevonden kan worden, zal in het IX. Werkstuk van het III. Boek getoond worden.

2°. Dat zoo men eene derde evenredige aan twee gegeven getallen begeert, of eene vierde aan drie gegeven; dat derde of dat vierde getal een geheel getal of eene breuk zal kunnen zijn. Daar nu EUCLIDES in zijn VII, VIII en IX. Boek van getallen sprekende, alleen van geheele getallen handelt, heeft hij zijn XVIII. en XIX. Voorstel van het IX. Boek besteed om nategaan of, wanneer twee of drie getallen gegeven zijn, er een derde, of een vierde evenredige aan dezelve zal kunnen gevonden worden.

VI. AANMERKING. Op dit gevolg steunt ook de geheele regel van driën, gelijk nader in de 5. Aanmerking op het volgend Voorstel zal gezegd worden.

VII. AANMERKING. De gelijkheid der producten AD = BC volgt onmiddelijk uit de gelijkheid der reden A : B en C : D. Zoo nu dié reden niet gelijk waren, maar men hadt A : B > of < C : D: zoude op de zelfde wijze bewezen worden dat AD > of < BC is: en omgekeerd Een Voorstel waarvan het eerste gedeelte bij SERENUS de *Coni sectione* het eerste Voorstel is, doch op lijnen, en dus op regthoeken in plaats van op producten, toegepast; en het laatste door EUTOCIUS in zijn *Commentarius* op ARCHIMEDES werk de *Sphaera et Cylindro*, Boek II. Voorstel IX, gebruikt wordt.

VI. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheden [A, B, C, D] evenredig zijn, zullen zij het insgelijks zijn bij *verwisseling* (*alternando*) de *voorgaande* van de tweede rede, in plaats van de *volgende* in de eerste, en de *volgende* in plaats van gemelde *voorgaande* stellende [A : C = B : D]: en ook bij *omkeering* (*invertendo*), de *volgende* stellende in plaats der *voorgaande*.

* EUCL. V. 16. en V. 4. Corol. en VII. 13. — St. V. 8. Gev. 1. — L. C. §. 304.

BEWIJS. Uit het V. Voorstel.

I. AANMERKING. De verwisseling, (*alterna ratio*, ook bij sommigen *permutatio* genoemd,) wordt door EUCLIDES (V. B. Bep. 13.) aldus uitgelegd: „ het is te stellen, de *voorgaan-* „ *de* tot de *voorgaande*, als de *volgende* tot de *volgende*."

II. AANMERKING. Zoo lang men de grootheden in het afgetrokkene beschouwt, gaat de verwisseling door: doch wanneer men er bepaalde denkbeelden aan hecht van deze en gene grootheid in het bijzonder, gaat zij niet door of de vier grootheden moeten gelijksoortig zijn. Bij voorbeeld, een pond vlaams staat tot een gulden, als een oxhoofd tot een anker: wederzijds zijn de voorgaande het zesvoud van de volgende; maar indien men bij *verwisseling* zegt, een pond vlaams staat tot een oxhoofd, zoo als een gulden tot een anker, heeft dit geenen zin, om dat er geen rede hoegenaamd tusschen een pond vlaams en een oxhoofd zijn kan. Daarom voegen sommigen bij dit Voorstel de voorwaarde, dat alle leden der evenredigheid gelijksoortig zijn moeten; en dit geldt ook voor het VIII. Voorstel: doch wij beschouwen hier de grootheden in het afgetrokkene. EUCLIDES in het XIII. Voorstel van het VII. Boek, over de getallen handelende, spreekt, en met reden, van de verwisseling in het algemeen, en als altijd plaats hebbende.

III. AANMERKING. De Bepaling van de omkering door EUCLIDES gegeven, is deze: „ de omkering der rede is te stel- „ len, de *volgende* tot de *voorgaande*, zoo als de *volgende* „ tot de *voorgaande*." Indien men dit vergelijkt met onze XVI. Bep., blijkt het dat het op het zelfde uitkomt: want indien ik stel $A:B = C:D$: of $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, en daaruit opmaak $B:A = D:C$ of $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, blijkt het dat ik het omgekeerde neem. Zie Gevolg van die XVI. Bepaling.

IV. AANMERKING. De vier leden eener evenredigheid kunnen op verschillende wijzen veranderd worden, als men *verwisseling* en *omkeering* te samen voegt: aldus

$A:B = C:D$	$A:C = B:D$
$B:A = D:C$	$C:A = D:B$
$B:D = A:C$	$C:D = A:B$
$D:B = C:A$	$D:C = B:A.$

En men zoude insgelijks uit die zelfde vier evenredige groot-

grootheden A:B = C:D en dus uit A × D = B × C acht omgekeerde reden kunnen maken, aldus

$A:B = \frac{1}{D} : \frac{1}{C}$ $B:A = \frac{1}{C} : \frac{1}{D}$

$A:\frac{1}{D} = B : \frac{1}{C}$ $B:\frac{1}{C} = A : \frac{1}{D}$

$C:D = \frac{1}{B} : \frac{1}{A}$ $C:\frac{1}{B} = D : \frac{1}{A}$

$D:C = \frac{1}{A} : \frac{1}{B}$ $D:\frac{1}{A} = C : \frac{1}{B}$.

het geen men altijd naar welgevallen doen kan: en de evenredigheid zal altijd tusschen die grootheden, hoe men die ook schikken moge, plaats hebben, indien de *producten* der uiterste en der middelste AD = BC geven, of tot die gelijkheid gebragt kunnen worden.

GEVOLG.

De getallen, die twee gelijke *producten* uitmaken, kunnen altijd zoo gesteld worden, dat er eene Geometrische evenredigheid uit volge.

L. C. §. 802.

V. AANMERKING. Op dit Voorstel en op het voorgaande steunt de geheele *regel van drieën*, de *regel van drieën in het gebroken*, de *praktijk* of *korte rekening*, gelijk wij dit in onze lessen door voorbeelden, welke den waren aard dier regels zullen doen kennen, gewoon zijn te bewijzen. Ik stel deze aanmerking hier, en niet achter het voorgaande Voorstel, uit hoofde dat men in de wijze waarop men doorgaands den regel van drieën stelt eene *alternatie* gebruikt: als men vraagt, 6 el kosten 13 gulden, hoe veel 17 el? is de natuurlijke wijze van handelen deze:

6 El: 17 el = 13 gl.: *x* gulden; waar tot waar, als geld tot geld: maar in de rekenboeken stelt men 6 — 13 — 17 — *x*: men stelt de getallen in de zelfde orde als men ze uitspreekt; eene klaarblijkelijke *alternatie*, of *verwisseling*, in de reden die de evenredigheid uitmaken.

VII. VOORSTEL.

Indien de producten van vier grootheden, genomen in die orde als zij opgegeven worden, namelijk van de eerste en tweede en van de derde en vierde, aan elkander gelijk zijn: dan staan die grootheden in omgekeerde rede

tot

tot elkander, de eerſte tot de derde zoo als de vierde tot de tweede: of de eerſte tot de vierde, zoo als de derde tot de tweede.

St. V. 8 en 21.

BEWIJS. Uit het Gevolg van het VI. Voorſtel.

GEVOLG.

Hierop ſteunt de manier om eene vierde *omgekeerde* evenredige te vinden; dat is, eene grootheid die zoodanig geſteld is, dat de eerſte en tweede in omgekeerde rede ſtaan van de derde en vierde.

AANMERKING. Hierop ſteunt de *omgekeerde regel van drieën*, zoo als wij door vele voorbeelden zullen opehelderen.

De omgekeerde regel van drieën, verſchilt niet in aard, of in de bewerking, van den gewonen regel van drieën, maar alleen in de wijze van opzetten. Men kan altijd onderkennen of men den regten dan of men den verkeerden regel van drieën moet gebruiken. Wanneer, in het gevraagde, het vierde lid, dat men zoekt, in de zelfde rede grooter of kleiner moet zijn dan het derde der gegevene, als het tweede grooter of kleiner is dan het eerſte, heeft men den regten regel van drieën: doch wanneer het vierde lid in de zelfde rede grooter of kleiner zijn moet dan het derde, als het tweede (niet grooter of kleiner) maar *kleiner* of *grooter* is dan het eerſte; heeft men het geval van den verkeerden regel van drieën: bij voorbeeld: Indien een Voerman voor zekere ſomme gelds 400 ℔ 80 mijlen ver brengen moet: hoe ver zal hij 950 ℔ voor het zelfde geld brengen? Het is klaarblijkelijk dat men niet moet opzetten 400 ℔: 950 ℔ = 80 mijlen: x mijlen: want voor het zelfde geld moeten 950 ℔ minder ver gebragt worden dan 400 ℔: de afſtand wordt dus kleiner naar mate de last grooter wordt: en de regel van drieën is omgekeerd: 950 : 400 = 80 : x. Men zal zich nimmer verzinnen als men de *gewrochten* nagaat: het eene is 400 ℔ 80 mijlen ver, of 400 × 80, het ander 950 ℔ x mijlen ver: derhalven, om dat de betaling de zelfde blijft, moet men hebben 480 × 80 = 950 × x: of 950 : 400 = 80 : x.

VIII. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheden evenredig zijn, heeft men door *ſamentelling* de ſom van de eerſte en de tweede [A + B] tot de eerſte [A] of tot de tweede, [B] als de ſom van

van de derde en vierde [C + D] tot de derde [C] of tot de vierde [D]: en door *aftrekking*: het verschil der twee eersten [A — B] tot de eerste [A] of tweede [B], als het verschil der twee laatsten [C — D] tot de derde [C] of tot de vierde [D]: en *gemengd*: de som der twee eersten, tot derzelver verschil, als de som der twee laatsten, tot derzelver verschil: en omgekeerd voor alle die gevallen.

EUCL. V. 17, 18, en VII. 11. — L. C. §. 304, 305. — St. V. 13, 14, 15.

BEWIJS. Uit het V. Voorstel, 2. Gevolg, en Axioma 5.

I. AANMERKING. EUCLIDES geeft deze bepaling van de samentelling: (*Compositio*). „ De samentelling van eene rede is het nemen van „ de rede der voorgaande en volgende, als éëne grootheid, tot „ de volgende." V. B. Bep. 15. De bepaling van de aftrekking (*Scheiding*) is bij hem deze: „ De aftrekking eener rede, is het „ nemen der rede van de overmaat van de voorgaande boven de „ volgende, tot de volgende." Het geen men in dat geval noemt *divisio*, of *dividendo*, noem ik hier *aftrekking*, of, zoo men wil, *scheiding*, (dat in dit geval de ware beteekenis is, ook van het Grieksch woord Διαίρεσις, door EUCLIDES gebruikt) en niet *deeling* of *divisie*, dat thans bij ons geheel andere denkbeelden dan die van eene enkele *scheiding*, of *aftrekking*, of *substractie* verwekt.

GEVOLG.

Uit dit Voorstel kan men, bij verwisseling en omkeering, vele andere evenredigheden afleiden, die het noodeloos zoude zijn, alle in woorden uittedrukken. Zie hier de voornaamste.

De gegevene zijn:

I. $A+B : A = C+D : C$.
II. $A+B : B = C+D : D$.
III. $A-B : A = C-D : C$.
IV. $A-B : B = C-D : D$.
V. $A+B : A-B = C+D : C-D$.

hier uit volgen

VI. $A : A+B = C : C+D$
VII. $B : A+B = D : C+D$
VIII. $A+B : C+D = A : C$
IX. $B : D = A+B : C+D$
X. $A+B : C+D = A-B : C-D$.

en zoo voorts.

II AANMERKING. De I. evenredigheid *verwisseld*, namelijk $A + B : C + D = A : C$ vergeleken, als onderstelling, met de IX. namelijk $B : D = A + B : C + D$ als besluit, levert de stoffe der 19 Propositie van EUCLIDES op: en de I. vergeleken als onderstelling, met

met de II. als besluit, levert het Gevolg van die Propositie op: namelijk: zoo samengestelde grootheden evenredig zijn, zijn zij het ook bij *omwending* (*conversio*). Hij noemt namelijk *omwending* in de 17 Bepaling, „ het nemen van de rede van de voorgaande, tot „ de overmaat van de voorgaande boven de volgende."

IX. VOORSTEL.

Indien in eene evenredigheid de eerste grootheid de grootste van alle is, is de laatste de kleinste: en de som der grootste en der kleinste is grooter dan de som van de beide overige.

BEWIJS. Voor het eerste uit het IV. Voorstel; voor het tweede

daar $A : B = C : D$ is (Voorst. VIII.)
$A - B : B = C - D : D$
of $A - B : C - D = B : D$.
Maar $B > D$
Dus $A - B > C - D$: of $A + D > B + C$.

AANMERKING. Dit Voorstel is de 25 Prop. van het V. B. van EUCLIDES, waarin die schrijver stilzwijgend vooronderstelt, dat, zoo de eerste grootheid de grootste is, de vierde de kleinste is.

X. VOORSTEL.

Indien men twee evenredigheden heeft [$A : B = C : D$ en $E : F = G : H$] ieder uit vier leden bestaande: zullen de leden van de eene, ieder in zijn' rang, door de leden van de andere *gemultipliceerd* of *gedivideerd*, nog evenredig zijn: [d. i.]

zoo $A : B = C : D$
en $E : F = G : H$,

zal $A.E : B.F = C.G : D.H$; en $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$ zijn.

L. C. § 307. — St. V. 17.

BEWIJS. Uit het V. Voorstel en zijn tweede Gevolg.

I. GEVOLG.

Indien vier getallen evenredig zijn, zullen ook hunne magten en hunne wortels, van de zelfde orde, evenredig zijn.

L. C. §. 308. — St. V. 18.

II.

II. GEVOLG.

Indien vier grootheden evenredig zijn, staat de helft van de eerste tot de tweede, als de derde tot het dubbeld van de vierde: of meer algemeen: De evenredigheid blijft ongestoord, al wordt eene der twee uiterste grootheden door eenig getal gedivideerd, en de andere tevens door het zelve gemultipliceerd. Het zelfde heeft plaats omtrent de beide middelsten.

TACQUET *Lemma* ad pr. 11. ex *Archimede.* — St. V. 20.

XI. VOORSTEL.

Indien men twee, of meerdere, evenredigheden heeft, [A : B = D : E en B : C = E : F], waarin de voorgaande of volgende van de eerste, ook, het zij voorgaande, het zij volgende, is van de laatste: zullen de overige leden van de eerste, ieder in zijn' rang, evenredig zijn aan de overige leden van de laatste, [A : C = D : F].

S. V. 19.

BEWIJS. Uit het X. Voorstel.

I. AANMERKING. Dit Voorstel behelst de 22 en 23. Propositien van EUCLIDES en ook de 22. van zijn VII. Boek: hij noemt het besluit (*ex aequo*) uit *gelijkheid*: doch het besluit, zoo A : B = D : E: en B : C = E : F: is A : C = D : F, wordt *uit gelijkheid met orde* genoemd: en het besluit, zoo A : B = E : F: en B : C = D : E; is A : C = D : F, *uit gelijkheid, zonder orde*. Beide de besluiten worden *uit gelijkheid* genoemd, om dat het besluit in eene gelijkheid van reden bestaat: de gegeven gelijke reden zijn in het eerste geval $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ en $\frac{D}{E}$, $\frac{E}{F}$ en in het tweede $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ en $\frac{E}{F}$, $\frac{D}{E}$, in beiden nu, besluit men de gelijkheid tusschen $\frac{A}{C}$ en $\frac{D}{F}$: doch in het eerste geval gaat de gelijkheid van reden voort in de zelfde orde wederzijds: namelijk aan den eenen kant zijn gegeven A, B, C aan den anderen D, E, F: de gelijke reden zijn in de zelfde orde wederzijds van de eerste en de tweede grootheid, $\left(\frac{A}{B} \text{ en } \frac{D}{E}\right)$ van de tweede en de derde $\left(\frac{B}{C} \text{ en } \frac{E}{F}\right)$; dus is het besluit met *orde*: in het tweede geval zijn de gelijke reden niet wederzijds in de zelfde orde: zij zijn van de eerste en de tweede grootheid $\left(\frac{A}{B},\right)$ aan den eenen kant, doch van de tweede en de derde $\left(\frac{E}{F}\right)$ aan den anderen: en van de tweede en de derde $\left(\frac{B}{C}\right)$

aan den eenen, doch van de eerste en de tweede $\left(\frac{D}{E}\right)$ aan den anderen; dus besluit men wel uit gelijkheid, doch zonder orde. En hieruit zullen de drie volgende bepalingen van EUCLIDES genoegsaam opgehelderd worden.

De 18. „ Men besluit uit gelijkheid, wanneer er verscheide „ grootheden gegeven zijn, wederzijds gelijk in getal, en de eerste „ van den eenen kant tot de laatste is, als de eerste van den ande„ren, tot de laatste: of anders: Het nemen der uiterste, met „ achterlating van de middelste." En indedaad in het besluit wordt niets van de middelste gewaagd.

De 19, „ De evenredigheid is *met orde*, als de voorgaande is „ tot de volgende, zoo als de voorgaande tot de volgende: of als „ de volgende tot eene andere is, zoo als de volgende tot eene „ andere."

De 20. „ De evenredigheid is *zonder orde*, wanneer er weder„ zijds eene reeks van drie grootheden gegeven zijnde, de voor„ gaande tot de volgende van de eerste reeks staat als de voor„ gaande tot de volgende van de tweede: en zoo als in de eerste „ de volgende tot een ander, aldus in de tweede eene andere tot „ de voorgaande." Bij voorbeeld: gegeven zijnde A, B, C en D, E, F: de voorgaande A tot de volgende B, zoo als de voorgaande E tot de volgende F; en de volgende B, tot eene andere C, zoo als eene andere D tot de voorgaande E.

II. AANMERKING. Ons Voorstel is algemeener, behelst alle mogelijke gevallen, en men behoeft nu niet op eenig onderscheid van *met orde*, of *zonder orde*, te letten.

III. AANMERKING. Dit Voorstel is de grond, waarop alle bewerkingen gevestigd zijn, die men verrigt in den regel van *Vijven*, den *Ketting regel*, *Gezelschaps regel*, en zoo voorts: waarin men het gevraagde vindt door eene aaneenschakeling van enkele evenredigheden, in welke altijd eenige leden dezelfde zijn, en dus door *besluit uit gelijkheid* verdwijnen; zoo als wij zulks door een aantal voorbeelden zullen ophelderen.

Zie L. C. §. 324.

I. GEVOLG.

Zoo A : B = D : E
en B : C = E : F
of zoo A : B = E : F
en B : C = D : E

in beide de gevallen
is D of > of = of < F naar mate
A of > of = of < C.

Dit blijkt uit dit en het IV. Voorstel: en het maakt het 20 en 21 van EUCLIDES uit, waarin hij ook deze besluiten *uit ongelijkheid*, *met* of *zonder orde*, noemt.

II.

II. GEVOLG.

Men kan, in eene evenredigheid, altijd voor twee leden andere, die met dezen evenredig zijn, stellen; bij voorbeeld,

$$\begin{array}{l} \text{zoo } A : B = CD : EF \text{ en} \\ \quad C : E = I : K \\ \hline \text{is } A : B = ID : KF. \end{array}$$

IV. AANMERKING. Deze is de grond waarop de regel *van valsche positie* steunt; zoo als wij door voorbeelden zullen uitleggen.

L. C. §. 325.

XII. VOORSTEL.

Zoo vier grootheden evenredig zijn: staat de tweede magt van de som der twee eerste, tot de tweede magt van de som der twee laatste, als het product der twee eerste, tot het product der twee laatste.

BEWIJS. Om dat $A : B = C : D$: is (Voorst. VIII.) $A + B : A = B + C : B$: en dus (Voorst. VI.) $A + B : B + C = A : B$, waaruit (Voorst. X. Gev. 1.) $(A + B)^2 : (B + C)^2 = A^2 : B^2 = A \times A : B \times B$: (door Voorst. XI. Gev. 2) $(A + B)^2 : (B + C)^2 = A \times B : C \times D$.

AANMERKING. Dit Voorstel is het 12 bij SERENUS *de Sectione cylindri:* doch op lijnen, en dus ook op vierkanten en regthoeken toegepast. ARCHIMEDES heeft van dit Voorstel gebruik gemaakt in zijn II. Boek de *Sphaera et Cylindro*, Voorstel III: waarom ook PEYRARD in zijne Fransche vertaling van dat werk er in eene aanmerking een bewijs van gegeven heeft.

XIII. VOORSTEL.

Zoo men twee evenredigheden heeft, $[A : B = C : D,]$ $E : F = G : H$, en de reden uit welke zij bestaan gelijk zijn, $\left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H}\right)$; zullen de sommen, of verschillen, der grootheden, in die beide evenredigheden, ieder in haar' rang genomen, ook evenredig zijn.

BEWIJS. Uit het V. Voorstel, en zijn 2. Gevolg.

L. C. §. 309.

AANMERKING. Van dit Voorstel is de 24 Prop. van het V. Boek van EUCLIDES een bijzonder geval: namelijk, zoo $A : B = C : D$ en $E : B = F : D$, is $A + E : B = C + F : D$; in

in woorden dus: „ Zoo vier grootheden [A, B, C, D]
„ evenredig zijn, en eene vijfde tot de tweede ſtaat, als de
„ zesde tot de vierde; is de ſamentelling van de eerſte en
„ de vijfde tot de tweede, als de ſamentelling van de derde
„ en de zesde tot de vierde."

GEVOLG.

Indien men bij de volgende van vier evenredige grootheden, andere grootheden voegt, of ze er van aftrekt, die in de zelfde rede ſtaan als de voorgaande, zullen die ſommen of verſchillen in gelijke rede met de voorgaande blijven.

XIV. VOORSTEL.

Indien men twee evenredigheden heeft [A:B = C:D: en E:F = G:H] en de voorgaande in beiden ook evenredig zijn [A:C = E:G] zullen de ſommen of verſchillen der grootheden in de beide evenredigheden, iedere in haren rang genomen, ook evenredig zijn.

L. C. §. 309.

BEWIJS. Uit het V. Voorſtel, en het Gevolg van het VI.

AANMERKING. Dit en het voorgaand Voorſtel leveren de twee eenigſte gevallen op, waarin men tot de evenredigheid van de ſommen, of verſchillen, der leden van twee evenredigheden beſluiten kan.

EIGENSCHAPPEN

VAN DE

GEOMETRISCHE REEKSEN,

OF PROGRESSIEN.

XV. VOORSTEL.

Indien verſcheiden grootheden [A, B, C, D, E, enz.] gedurig evenredig zijn, of eene geometriſche reeks uitmaken; ſtaat de eerſte tot de derde in verdubbelde rede van de eerſte tot de tweede; tot de vierde in driedubbelde rede en zoo voorts: in een woord; de eerſte ſtaat tot de

de grootheid die n in rang is, zoo als de magt $\overline{n-1}$ van de eerste tot de magt $\overline{n-1}$ van de tweede.

L. C. §. 298, 318. — St. V. 28.

BEWIJS. Uit de XIII. Bep. en het X. Voorstel.

I. GEVOLG.

Dus is de rede van het eerste lid tot eenig ander lid samengesteld uit de reden van alle de tusschenin geplaatste leden tot elkander; dat is, daar alle die reden gelijk zijn, uit de rede van het eerste lid tot het tweede, zoo dikwerf door zich zelf vermenigvuldigd, als er leden zijn tot aan het gegeven lid.

AANMERKING. De bepaling door EUCLIDES gegeven van verdubbelde, of driedubbelde rede, van twee grootheden [A : B]; dat zij namelijk de rede is van het eerste lid eener gedurige evenredigheid, waarvan de gegeven grootheden de twee eerste leden zijn, tot het derde, of tot het vierde, komt dan met onze bepaling zeer wel overeen. Zie hier boven XVIII. Bepaling en Aanmerking op dezelve.

II. GEVOLG.

De middelevenredige tusschen twee grootheden is kleiner dan de grootste, doch grooter dan de kleinste.

Want zij A : B = B : C:

Dus $A^2 : B^2 = B^2 : C^2 = A : C$ (X. Voorstel, 1 Gev. en dit Voorstel.)

Maar. $A > C$: dus $A > B$ en $B > C$. (IX. Voorstel.)

AANMERKING. Dit Gevolg is het I. *Lemma* na de 4 Propositie in het Boek van ARCHIMEDES *de Sphaera et Cylindro*.

III. GEVOLG.

Ieder lid van eene geometrische reeks is gelijk aan het voorgaande, door (Bep. XI. Aanm. 2.) den *Aanwijzer* vermenigvuldigd.

IV. GEVOLG.

Alle geometrische reeksen kunnen aldus worden uitgedrukt, indien A het eerste, B het tweede lid, en q de *aanwijzer*, of $q = \frac{B}{A}$, is; A, Aq, Aq^2, Aq^3, Aq^4, Aq^5, ------ Aq^{n-1}.

L. C. §. 311. — St. V. Bep. 25.

V. GEVOLG.

Eenig lid (het n) van eene geometrische reeks is gelijk aan het eerste door de magt $n-1$ van den aanwijzer gemultipliceerd.

VI. GEVOLG.

Indien het eerste lid grooter is dan het tweede, en dus de *aanwijzer* eene breuk is; is ieder lid kleiner dan het voorgaande, en de reeks is eene *afnemende reeks*, waarvan alle de leden volgens eene bestendige rede hoe langer hoe kleiner worden, zonder echter immer *nul* te kunnen zijn: en indien het tweede lid grooter is dan het eerste, is de *reeks wasſende*, alle leden worden hoe langer hoe grooter volgens eene bestendige rede: het eerste lid is het kleinste van allen, doch het kan nimmer *nul* zijn.

VII. GEVOLG.

Niets belet, dat men deze reeks, die men gesteld heeft in A te beginnen, beschouwe als vóór A beginnende, namelijk:

$$\frac{A}{q^{n-1}}, \text{----} \frac{A}{q^4}, \frac{A}{q^3}, \frac{A}{q^2}; \frac{A}{q^1}, \frac{A}{q^0}; Aq, Aq^2, Aq^3, Aq^4, \text{--} Aq^{n-1}$$

of, (3. Aanm. op de IV. Bepaling.)

$$Aq^{-(n-1)} \text{-----} Aq^{-4}, Aq^{-3}, Aq^{-2}, Aq^{-1}, Aq^0, Aq^1, Aq^2, Aq^3, Aq^4 \text{-----} Aq^{n-1}$$

VIII. GEVOLG.

Men kan ook het getal leden van eene gegeven reeks vermeerderen, met tusschen twee naastvolgende leden een aantal middelevenredige te nemen, waar door de reeks altijd geometrisch blijft: bij voorbeeld in de voorgaande reeks, tusschen A en Aq: tusschen Aq en Aq^2 enz.

$$A, Aq^{\frac{1}{4}}, Aq^{\frac{1}{2}}, Aq^{\frac{3}{4}}, Aq, Aq^{1\frac{1}{4}}, Aq^{1\frac{1}{2}}, Aq^{1\frac{3}{4}}, Aq^{2}, \text{enz.}$$

of

$$A, Aq^{0,25}, Aq^{0,5}, Aq^{0,75}, Aq^{1}, Aq^{1,25}, Aq^{1,5}, Aq^{1,75}, Aq^{2},$$

en zoo voorts, zoo veel men wil.

Er is dus geen getal, of men kan het als een lid van zoodanige eene reeks beschouwen; want er is geen getal dat niet aan eenigen wortel van een gegeven getal gelijk is: dus bij voorbeeld,

$$\text{is } 5 = 10^{\frac{1}{1,43069}} = 10^{0,69897} = 10^{\frac{69897}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{69897}}.$$ En der-

derhalve kan 5 beschouwd worden als een lid van eene geometrische reeks, waarvan 1 het eerste en 10 het laatste lid is.

XVI. VOORSTEL.

In alle geometrische reeksen is het product van twee leden, welke zij zijn mogen, gelijk aan het product van twee andere, die even ver van de gemelden afstaan, het eene van het eerste, het ander van het laatste: en zulks, het zij men leden neemt, die vóór het eerste, en nà het laatste zijn: het zij men leden neemt die tusschen beiden invallen: en zoo, in dit geval, het getal der tusscheninvallende leden oneven is, is het gemelde *product* gelijk aan de tweede magt van het middelste lid.

St. V. 24. — L. C. §. 316.

BEWIJS. Uit het 4 en het 1 Gevolg van het XV. Voorstel.

XVII. VOORSTEL.

In alle geometrische reeksen, waarvan de eenheid het eerste lid is, (zoo als $1, q, q^2, q^3 \cdots\cdots q^n$) is het product van twee leden gelijk aan een ander lid in de zelfde reeks, dat even ver staat van een der gemelde leden, als het ander van het eerste lid der geheele reeks, of van de eenheid.

BEWIJS. Uit het XVI. Voorstel.

I. AANMERKING. Deze eigenschap is een der gronden waarop de aard der Logarithmen steunt.

II. AANMERKING. Men kan deze reeks $1, q, q^2, q^3, \cdots q^n$, ook dus schrijven: $q^0, q^1, q^2, q^3 \cdots\cdots q^n$; zie de 3. Aanmerking op de 4. Bepaling.

I. GEVOLG.

Hieruit blijkt de VIII Propositie van het IX. Boek van EUCLIDES, „ zoo eenige getallen, beginnende met de eenheid, gedurig evenredig zijn, is het derde een quadraat getal; „ zoo als ook de volgende om het ander getal: het vierde „ is een cubiek getal, en dus vervolgens allen om het der- „ de getal: het zevende is en een quadraat en een cubiek „ getal, en dus vervolgens om het zesde getal." en zoo ook het IX. Voorstel: „ zoo het eerste getal naast de eenheid „ een quadraat of een cubiek getal is, zijn alle de andere in „ de geheele reeks ook quadraat of cubiek getallen."

$1, q^2, q^4, q^6, q^8$, enz.: $1, q^3, q^6, q^9, q^{12}$, enz.

II.

II. GEVOLG.

Men kan deze reeks $1, q, q^2, q^3, q^4, \ldots q^n$ beschouwen als reeds voor de 1 begonnen te zijn: aldus $\frac{1}{q^n}, \ldots \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, q^4, \ldots q^n$: of, wat op het zelfde uitkomt, (IV. Bep. 2 en 3 Aanm.) $q^{-n}, \ldots q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, \ldots q^n$; zoo dat, indien q een geheel getal is, de leden tot q^0 of 1 breuken zijn, waarvan de noemers magten van q zijn; na de 1, zijn de leden zelf de magten van q.

XVIII. VOORSTEL.

In alle geometrische reeksen is de som van alle de *voorgaande* tot de som van alle de *volgende*, zoo als het eerste lid tot het tweede.

EUCL. V. 12. en VII. 12. — L. C. §. 310. — St. V. 16.

BEWIJS. Uit het XIII. Voorstel, en IV. *Axioma*.

I. GEVOLG.

Indien A het eerste lid is, B het tweede, Z het laatste, q de *aanwijzer*, of het quotient van B door A gedeeld, en S de som van de geheele reeks, is

$$S = \frac{A^2 - Z.B.}{A - B.}$$ of, noemende n het getal der leden

$$S = \frac{A^2 - A^2 q^n}{A - Aq} = \frac{A(q^n - 1)}{q - 1}.$$

L. C. §. 327. — St. V. 27.

I. AANMERKING. Voor het geen de som van eene afneemende reeks betreft, waarvan een *oneindig getal* leden genomen wordt, zie VII. Bep. 1. en 2. Aanmerking.

II. AANMERKING. Indien de leden der reeks in eene viervoudige rede afnemen, zoo dat ieder lid het vierde gedeelte zij van de voorgaande, en de geheele reeks is $A, \frac{A}{4}, \frac{A}{16}, \frac{A}{64}, \frac{A}{256}$, enz., zal men hebben $S = \frac{A^2 - \frac{AZ}{4}}{\frac{3}{4}A}$ $= \frac{4A - Z}{3}$: indien men het derde gedeelte van het laatste

lid

lid er bijvoegt, is $S + \frac{1}{3} Z = \frac{4A - Z + Z}{3} = \frac{4A}{3}$; het geen het 23. Voorstel oplevert van het Boek van ARCHIMEDES over de *Quadratuur van de Parabel*, en wel in de woorden welke uitmaken dit

II. GEVOLG.

Indien grootheden in eene gedurige viervoudige evenredigheid staan, zal de som van alle de leden, te samen met het derde gedeelte van het kleinste lid, gelijk zijn aan vier derde gedeelten van het grootste lid.

III. AANMERKING. Dat $\frac{4A}{3}$ de som is der geheele reeks, wanneer dezelve begrepen wordt in het oneindige uitgestrekt te zijn, zal in het VII. Boek, Bep. 1., Voorbeeld 5, Aanm. 4. aangetoond worden.

III. GEVOLG.

Zoo $\div\!\div$ A, B, C, D, ------ Y, Z, is
$B - A : A = Z - A : A + B + C + D \text{---------} Y$.
of in woorden, „ zoo eenige getallen gedurig evenredig „ zijn, en men trekt van het tweede en van het laatste een „ getal af gelijk aan het eerste, staat het overschot van het „ tweede tot het *eerste*, zoo als het overschot van het laat„ ste tot de som van alle de *voorgaande*.

EUCL. IX. 35.

BEWIJS. $A : B = B : C = C : D : \text{-----} Y : Z$:
dus Voorstel VIII. N°. 2.
$A : B - A = B : C - B = C : D - C \text{-----} Y : Z - Y$;
en dus, door dit Voorstel:
$A + B + C + \text{----} Y : \overline{B - A} + \overline{C - B} + \overline{D - C} \text{-----}$
$+ \overline{Z - Y} = A : B - A$.
of
$A + B + C \text{-----} Y : Z - A = A : B - A$: of
$B - A : A = Z - A : A + B + C \text{-----} Y$.

IV. GEVOLG.

Uit het Voorstel is bij verwisseling:
$A + B + C \text{-----} Y : A = B + C + D \text{-----} + Z : B$;

 Uit

Uit het 3 Gevolg, bij verwisseling:
A + B + C - - - Y : A = Z - A : B - A: en dus
B + C + D - - + Z : B = Z - A : B - A - of
B - A: B = Z - A: B + C + D - - - - - + Z:
dat is in woorden: „ zoo eenige getallen gedurig evenre„ dig zijn, en men trekt van het eerste en van het laatste „ een getal af, gelijk aan het eerste; staat het overschot „ van het tweede tot het *tweede*, zoo als het overschot „ van het laatste tot de som van alle de *volgende*."

XIX. VOORSTEL.

Zoo vier, of meerdere, grootheden [A, B, C, D, en E] zoodanig gesteld zijn, dat zij evenredig zijn aan hare verschillen [A : B = A - B : B = C enz.], zullen zij geometrisch evenredig zijn [∺ A, B, C, D, enz.]

BEWIJS. Uit het VI. en VIII. Voorstel.

AANMERKING. Dit Voorstel is van een groot nut in de Natuurkunde.

II. AFDEELING.

OVER DE ARITHMETISCHE EVENREDIGHEID.

TWEEDE BEPALINGEN.

XX. BEPALING.

Wanneer men twee gelijksoortige grootheden met elkander vergelijkt, ten einde te weten, hoe veel de eene de andere overtreft, dat is, hoe groot het verschil is dat tusschen beiden gevonden wordt, wordt men gezegd de *arithmetische rede*, die er tusschen die twee grootheden plaats heeft, nategaan: en dat verschil zelf maakt die *arithmetische rede* uit.

St. V. def 5.

AANMERKING. Alle de *algemeene* bepalingen, in het begin van dit Boek gegeven, hebben hier ook plaats: zoo als ook die van *voorgaand* en *volgend* lid, 10. Bep. bl. 98.

XXI. BEPALING.

Arithmetische reden worden *de zelfde* of *gelijke* reden genoemd, wanneer het verschil der grootheden, tusschen welke zij plaats hebben, het zelfde is; dat is, wanneer het voorgaande lid van de eene rede zijn volgend lid even veel overtreft, of even veel door hetzelve overtroffen wordt, als het voorgaande lid van iedere der andere reden zijn volgend overtreft, of door hetzelve overtroffen wordt.

En hier van worden grootheden gezegd in *arithmetische evenredigheid*, of *proportie*, te staan, of *arithmetisch evenredig*, of *proportionaal*, te zijn, als de zelfde *arithmetische* rede, dat is, het zelfde verschil, tusschen haar plaats heeft.

St. V. def. 9, 10.

VOORBEELD. 10 : 4 = 7 : 1 arithmetisch: om dat 10 — 4 = 6 en 7 — 1 = 6: en in het algemeen is A : B = C : D arithmetisch,

zoo A — B = C — D: of
B — A = D — C

Het spreekt van zelf, dat men in die beide reden het verschil der termen in de zelfde orde nemen moet; in beide het volgende lid van het voorgaande, of in beide het voorgaande van het volgende aftrekkende.

XXII. BEPALING.

De grootheden zijn *onderscheidenlijk* (*discrete*) evenredig, zoo de leden der beide gelijke reden verschillende zijn: doch *gedurig* (*continue*) evenredig, wanneer het volgende lid in de eerste rede, het voorgaande lid is in de tweede; het volgende lid van de tweede, het voorgaande lid van de derde, enz. De gedurige evenredigheid draagt den naam van *arithmetische reeks* of *progresfie*: en *even ver afstaande* leden zijn die, welke, met betrekking tot een ander, door een gelijk getal leden van het zelve gescheiden worden.

VOORBEELD. Indien A — B = B — C = C — D = E — F enz.: maken A, B, C, D, E, F, enz. eene arithmetische *progresfie*, of reeks, uit.

I. AANMERKING. Men ziet dat deze bepaling, op het woord *arithmetisch* na, de zelfde is als de XIII. Bepaling: en de namen *middelevenredige*, *derde evenredige*, *vierde evenredige*, uit-

uiterste, *middelste*, *eveneensgeplaatste* hebben hier de zelfde beteekenis als in de XIV. en XV. Bepalingen, die hier ook gelden.

II. AANMERKING. Eene arithmetische progressie wordt dus aangeduidt ÷; bij voorb. ÷ A, B, C, D, E, enz. beteekent dat A, B, C, D, E eene arithmetische reeks uitmaken.

GEVOLG.

De reeks welke door grootheden, die *gedurig* evenredig zijn, gemaakt wordt, is *wassende* of *opgaande*, indien de grootheden bestendig grooter en grooter worden: doch *afnemende* of *neêrgaande*, indien de grootheden bestendig kleiner en kleiner worden.

EIGENSCHAPPEN
DER
ARITHMETISCHE EVENREDIGHEDEN EN PROGRESSIEN.

XX. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheden eene arithmetische evenredigheid uitmaken, is de som der uiterste gelijk aan de som der middelste.

St. V. pr. 1.

BEWIJS. Uit de XXI. Bepaling.

GEVOLG.

Wanneer drie grootheden gedurig arithmetisch evenredig zijn, is de som der uiterste het dubbeld van de som der middelste; en dus is het middelste lid de halve som der beide uiterste.

St. V. 1. Gevolg.

AANMERKING. Hieruit blijkt hoe men gemakkelijk eene vierde, derde, of middelevenredige vinden kan.

XXI. VOORSTEL.

Hoe minder twee getallen van elkander verschillen, hoe min-

minder de middel-evenredige, arithmetisch genomen, verschilt van de middel-evenredige, geometrisch genomen

L. C, Aftron. §. 126.

BEWIJS. Uit het 1. Gevolg van het XX, en het 2 Gevolg van het V. Voorstel.

XXII. VOORSTEL.

Wanneer verscheiden grootheden eene arithmetische reeks uitmaken, groeijen zij aan, of nemen zij af, met een bestendig *verschil*; zoo dat eene arithmetische reeks altijd deze gedaante heeft

$$A, A \pm V, A \pm 2V, A \pm 3V \ldots A \pm (n-1) V.$$

St. V. 1 Gev. d. 16, 17, 18, 19.

BEWIJS. Uit de XXII. Bepaling.

I. AANMERKING. De XIV. en XV. Bepaling gelden hier even als voor de geometrische reeksen.

I. GEVOLG.

Ieder lid is gelijk aan de som, of aan het verschil, van het voorgaand lid en den *aanwijzer*, of bestendige rede, naar mate de reeks opgaande of nederdalende is.

II. GEVOLG.

Ieder lid is gelijk aan de som, of aan het verschil, van het eerste en van het *verschil* door het getal der voorgaande leden gemultipliceerd.

III. GEVOLG.

De rede van het eerste lid tot het derde, is dubbeld van die van het eerste lid tot het tweede: de rede van het eerste tot het vierde, is drievoud van de rede van het eerste tot het tweede en zoo voorts: zoo dat ook hier, doch in eenen *aritmetischen* zin, verdubbelde, driedubbelde enz. reden plaats hebben. Zie de XVIII. Bepaling en de Aanmerking op dezelve.

St. V. 5.

IV. GEVOLG.

Eene opgaande reeks kan met *nul* beginnen, en zoo ver men wil voortgaan: eene nederdalende reeks kan met *nul* eindigen, of nog beneden de *nul* voortgaan; wan-

neer de leden weder aangroeijen even als boven de nul, en door alle de zelfde trappen gelijkelijk gaan, doch als *negatief*, of *ontkennende*, beschouwd, en met het teeken (—) *minus* bestempeld worden.

4 V, 3 V, 2 V, V, o: — V, — 2 V, — 3 V — 4 V, enz.

II. AANMERKING. Men moet zich een juist denkbeeld van die *negatieve* of *ontkennende leden* vormen. Men zegt doorgaans dat de *negatieve* grootheden kleiner dan *nul* zijn: dit is geheel verkeerd. Het *negatieve* heeft slechts betrekking tot de plaatsing, of tot den zin waarin grootheden genomen worden. Hier ziet het alleen op de plaatsing: en het beteekent enkel of de grootheden aan den eenen dan wel aan den anderen kant van de plaats, van waar men afrekent, gesteld zijn. Dit zal door de volgende eenvoudige 86 figuur opgehelderd worden. Men stelle eene regte lijn B A *b*, op welke, op gelijke afstanden van A, loodregte lijnen getrokken worden, die eene arithmetische reeks uitmaken: dan zal de lijn C G A die de uiteinden dier lijnen verëénigt, eene regte lijn zijn, en door A gaan: dat is, zij zal de lijn B A *b* in A snijden, en dus eindige de reeks van arithmetische lijnen C B, M D, enz in A, en het laatste lid is *nul*: doch indien men de lijn C A verlengt, en op B A *b*, aan den anderen kant van A, gelijke stukken A *t*, *ts*, *sr*, *rq*, *qp* neemt, en de loodlijnen *tl*, *sk*, *ri*, aan den onderkant trekt; deze zullen aldaar eene reeks uitmaken, in alle opzigte aan de voorige gelijk, en met dezelve verbonden: doch die leden van de reeks worden, ten opzigte van de eerstgemelde, *negatief* genoemd. om dat zij aan den anderen kant, en dus in eene tegengestelde rigting, of plaatsing, genomen worden.

V. GEVOLG.

De natuurlijke getallen o, 1, 2, 3, enz. maken eene arithmetische reeks uit.

XXIII. VOORSTEL.

In eene arithmetische reeks is de som van twee leden gelijk aan de som van twee andere leden, doch die even ver van de eerstgemelde af zijn: zoo dat het eerste even veel *vóór* of *na* het eene staat, als het tweede *na* of *vóór* het andere der eerstgemelde.

St. V. 2.

BEWIJS. Uit het voorgaande Voorstel.

GEVOLG.

Indien het getal van leden oneven is, is de som van twee leden, die even ver van het middelste af staan, gelijk aan het dubbeld van het middelste: en dus is het middelste de helft van de som dier twee andere leden.

St. V. 3. Gevolg.

XXIV. VOORSTEL.

Wanneer *nul* het eerste, of het laatste, lid van eene arithmetische reeks is; is de som van twee leden gelijk aan een derde lid, dat even ver van een dier twee leden afstaat, als het ander van het begin of einde van de reeks, of van de *nul*.

BEWIJS. Uit het voorgaand Voorstel.

I. AANMERKING. Het zelfde geldt dus ook voor de reeksen die ter wederzijde van de nul vervolgd worden: want men kan dezelve beschouwen als uit twee reeksen bestaande.

II. AANMERKING. Dit Voorstel is het tweede grondbeginsel waarop de aart der Logarithmen steunt.

XXV. VOORSTEL.

De som van alle de leden eener arithmetische reeks is gelijk aan de som der beide uiterste, gemultipliceerd door de helft van het getal der leden.

St. V. 4.

GEVOLG.

Dus is de som ook gelijk aan de helft van het getal der leden, gemultipliceerd door de som, of het verschil, van het dubbeld van het eerste lid, en het *verschil* door het getal der leden min één gemultipliceerd.

$$S = \frac{(2\,A \pm \overline{n - 1.}\,V)\,n}{2}$$

III. AFDEELING.

OVER DE HARMONISCHE EVENREDIGHEID.

DERDE BEPALINGEN.

XXIII. BEPALING.

Drie grootheden [A, B, C] worden gezegd *harmonisch* evenredig te zijn, wanneer de *geometrische* rede van de eerste tot de derde [A : C] gelijk is aan de *geometrische* rede van het verschil tusschen de tweede en de eerste [B—A] tot het verschil tusschen de derde en de tweede [C—B].

Dat is: zoo A:C = B—A:C—B zijn A, B, C, *harmonisch* evenredig.

HORREBOW §. 15. — LAMI p. 461.

I. GEVOLG.

Het blijkt, dat indien het tweede lid grooter is dan het eerste, het derde ook grooter dan het tweede zijn zal: dus is een der twee uiterste leden het grootst en het ander het kleinst der drie leden. Waarom ook sommigen deze bepaling geven: „ Drie getallen staan in eene harmonische evenre- „ digheid indien het kleinste staat tot het grootste, als de over- „ maat van het middelste boven het kleinste, tot de overmaat „ van het grootste boven het middelste.

II. GEVOLG.

Drie getallen kunnen geen harmonische evenredigheid uitmaken, als het verschil van het middelste en het kleinste grooter is dan het kleinste zelf.

Uit de XXIII. Bepaling en het IV. Voorstel.

LAMI p. 463.

III. GEVOLG.

Dit II. Gevolg in acht genomen zijnde, blijkt het, dat men, twee getallen gegeven zijnde, een derde vinden kan, dat met de twee andere in eene harmonische evenredigheid staat.

LAMI pr. 1. p. 461.

I. AANMERKING. Zoo dan a en b de twee eerste getallen en x het gezochte derde is, heeft men $x = \frac{ab}{2a - b}$.

Zoo a en c de *uiterste* en y de *middelste*: is $y = \frac{2ac}{a + c}$. Dit is reeds door THEON van Smirna opgemerkt, *Cap.* 61.

II. AANMERKING. Indien men [Fig. 86*a*] drie lijnen heeft A D, A C, A B, zullen zij harmonisch evenredig zijn, indien

A D : A B = A D — A C : A C — A B:

zoo dan A D de grootste, A C de tweede, en A B de kleinste is: en men op de lijn A D neemt, A C = A C, A B = A B, is A D — A C = C D en A C — A B = B C en dus A D : A B = C D : B C of

A D : C D = A B : B C,

zegt men dan dat die lijn *harmonisch* gesneden is: waar uit deze bepaling van den Heer LA HIRE (*Section Con.* Lib. 1. def. 1.) volgt „ Eene regte lijn A D wordt gezegd *harmo-* „ *nisch* gedeeld te zijn, indien de geheele lijn A D tot een „ der uiterste deelen [A B, of C D], staat, zoo als het an- „ der uiterste [C D of A B], tot het middelste deel: of, „ zoo de regthoek van de geheele lijn en het middelste „ deel, gelijk is aan den regthoek van de uiterste deelen."

III. AANMERKING. Hierop steunt de oplossing van het XI. Werkstuk van het III. Boek der Werkstukken.

IV. AANMERKING. Het tweede gedeelte dezer Bepaling van LA HIRE, *zoo de regthoek*, enz. wordt uit het eerste afgeleid, door het geen in het IV. Boek, Voorstel IX. Gev. 5. zal geleerd worden.

V. AANMERKING. Deze evenredigheid wordt harmonische genoemd, om dat zij de grondslag is van de harmonie. Drie snaren, die even dik, en even gespannen zijn, geven de drie voornaamste toonen uit, den octaaf, quint en quart, wanneer hare lengten zijn als 3, 4, 6. De twee die als 3 tot 6 staan, geven *den octaaf*: de twee die als 4 tot 6 staan, maken den *quint*: en de twee, welke als 3 tot 4 staan, maken den *quart* uit: die getallen nu, 3, 4, 6, zijn zoodanig gesteld dat 3 : 6 = 4 — 3 : 6 — 4.

XXIV. BEPALING.

Verschillende getallen maken eene harmonische reeks uit, als het eene staat tot het tweede dat er op volgt, als

 het

het verschil tusschen het middelste en het eerste, tot het verschil tusschen het gemelde tweede en het middelste; dat is, A, B, C, D, E enz. zullen een harmonische reeks uitmaken, indien

A : C = B — A : C — B
B : D = C — B : D — C
C : E = D — C : E — D enz.
D : F = E — D : F — E.

AANMERKING. WOLF geeft in zijne latijnsche *Algebra* §. 186. deze bepaling van vier *harmonische* evenredige; hij zegt „ vier grootheden zijn harmonisch evenredig, als het verschil tusschen de eerste en de tweede staat tot het verschil tusschen de derde en de vierde, als de eerste „ grootheid tot de vierde:" doch dan moet men die grootheden afzonderlijk beschouwen, en niet als zijnde in eene *harmonische reeks:* men zoude anders in vele feilen vallen; en dus achten wij die bepaling onnaauwkeurig. De Heer WOLF kan eene dusdanige evenredigheid wel *harmonische* evenredigheid noemen: doch dit is niet die evenredigheid welke door alle andere schrijvers dus genoemd wordt: dit zal duidelijker uit de 2. Aanmerking op het XXX. Voorstel blijken.

GEVOLG.

Wanneer getallen *harmonisch* evenredig zijn, zullen hunne producten of quotienten het ook zijn, indien zij allen door een zelfde getal *gemultipliceerd* of *gedivideerd* worden.

LAMI p. 463. pr. 3.

XXVI. VOORSTEL.

Wanneer het tweede van twee gegeven getallen grooter is dan het eerste, kan men niet altijd getallen vinden, die met de voorgaande eene harmonische opgaande reeks, zoo ver uitgestrekt als men wil, zullen uitmaken: maar dit kan altijd geschieden wanneer het tweede getal kleiner is dan het eerste: en dus kan eene nederdalende reeks zoo veel men wil verlengd worden.

BEWIJS. Het blijkt uit het 2. Gevolg van de XXIII. Bepaling, dat men altijd eene derde harmonische evenredige aan twee getallen vinden kan wanneer B < A, maar niet wanneer B > A, dan alleen zoo lang B < 2 A: doch al had men er reeds twee, drie enz., is het niet zeker dat men er eene volgende vinden kan: want in de evenredigheid C : E = D — C : E — D: daar E > C, moet E — D > D — C zijn: dus E + C > 2 D: doch daar E > D en C < D, is zulks niet altijd mogelijk. Zie verder

der 2. Gev. van het XXIX. Voorstel. Maar indien B < A, zal de evenredigheid zijn

C : A = B — C : A — B: En dus A en B gegeven zijnde, is A — B < A: dus moet B — C < C of C > $\frac{B}{2}$ zijn, dat altijd mogelijk is, om dat C nog niet gegeven is. En al verder E : C = D — E : C — D: daar nu C — D < C: is ook D — E < E of E > $\frac{D}{2}$ dat altijd mogelijk is: en dus zal ieder lid altijd grooter zijn dan de helft van het voorgaande.

XXVII. VOORSTEL.

In alle harmonische reeksen, is het product der twee eerste leden tot dat der twee laatste, als het verschil der beide eerste tot dat der beide laatste.

BEWIJS. De leden der evenredigheden van de XXIV. Bepaling onderling en in hunnen rang multipliceerende, zullen de uitkomsten evenredig zijn: (door het X Voorstel): en deze zullen, door het IV. *Axioma*, de evenredigheid opleveren,

AB : EF = B — A : F — E.

XXVIII. VOORSTEL.

Indien A, B, C, D, E, enz eene harmonische reeks uitmaken, en Y het *n*ste lid is, en Z het $\overline{n+1}$, heeft men

B — *n* [B — A] : B — A = Y : Z — Y.

BEWIJS. A : C = B — A : C — B: dus *alterando* en *componendo*
A : B — A = C : C — B:
B : B — A = 2 C — B : C — B: *dividendo*,
B — (B — A) : B — A = C : C — B: *dividendo*,
B — 2(B — A): B — A = B : C — B.
D. T. B. W. 1°.
verder B : C — B = D : D — C
dus B — 2 (B — A) : B — A = D : D — C:
en dus B — 3 (B — A) : B — A = C : D — C:
D. T. B. W. 2°.
verder C : D — C = E : E — D:
dus B — 3 (B — A) : B — A = E : E — D:
en dus B — 4 (B — A) : B — A = D : E — D:
en zoo voorts. D. T. B. W. 3°.

GEVOLG.

Uit dit Voorstel en uit het VIII. N°. 1 volgt:

B — $\overline{n-1}$ [B — A] : B — *n* [B — A] = Z : Y

dus voor het derde lid, d. i. voor *n* = 2.

B — [B — A] : B — 2 [B — A] = C : B

of 2 A — B : A = B : C.

I. AANMERKING. Dit is het 5 Theorema van WOLF in zijne la-

latijnsche algebra § 187. „ Zoo drie getallen *harmonisch* „ evenredig zijn, is het verschil tusschen het tweede en het „ dubbeld van eerste tot het eerste, als het tweede tot het „ derde:" en omgekeerd. Zie ook HORREBOW §. 30.

2°. Uit $2A - B : A = B : C$ volgt
$C : A = B : 2A - B$
en $C + A : C = 2A : B$
of $C + A : 2A = C : B$.

Dit is het *Theorema* van WOLF in §. 191. „ Zoo drie „ grootheden harmonisch evenredig zijn, is de som van de „ eerste en laatste tot het dubbeld van de eerste, zoo als de „ laatste tot de middelste." Dit kan ook aldus uitgedrukt worden, en dan zijn het de *Theoremata* bij HORREBOW §. 23 en 22. „ zoo drie getallen harmonisch evenredig zijn, „ is de som der uiterste, tot een der uiterste, zoo als „ het ander uiterste, tot de helft van het middelste: of „ zoo als het dubbeld van het ander uiterste tot het middelste."

II. AANMERKING. Het *Theorema* van WOLF in § 192, dat namelijk, „ zoo vier grootheden harmonisch evenredig zijn, „ de derde tot de vierde staat, zoo als het verschil tusschen de tweede en het dubbeld van de eerste tot de „ eerste," is in den zin van onze bepaling valsch, als steunende op zijne onnaauwkeurige bepaling, waarvan wij in de Aanmerking op onze XXIV. Bepaling gesproken hebben.

XXIX. VOORSTEL.

Indien Z het *n*ste lid is van eene harmonische reeks, waarvan A het eerste, en B het tweede lid is, is

$$Z = \frac{A \times B}{B - (n-1)(B-A)} = \frac{AB}{B + \overline{n-1}\,(A-B)}.$$

BEWIJS. $A : C = B - A : C - B$

Dus het derde lid of $C = \frac{AB}{2A - B} =$

$$\frac{AB}{B + 2A - 2B} = \frac{AB}{B - 2(B-A)}; \qquad \text{D. T. B. W. 1°.}$$

$B : D = C - B : D - C$:

$$\text{Dus } D = \frac{BC}{2B - C} = \frac{B}{2B - \frac{2A - B}{AB}} \times \frac{AB}{2A - B}$$

$$= \frac{AB^2}{4AB - 2BB - AB} = \frac{AB}{3A - 2B} = \frac{AB}{B - 3(B - A)}$$

D. T. B. W. 2°.

C:

$$C : E = D - C : E - D$$

Dus het vijfde lid, of $E = \frac{CD}{2C - D}$ of

$$E = \frac{\frac{AB}{B - 3(B - A)} \times \frac{AB}{B - 2(B - A)}}{\frac{2AB}{B - 2(B - A)} - \frac{AB}{B - 3(B - A)}} =$$

$$\frac{AB}{AB(2B - 6(B - A) - B + 2(B - A)} = \frac{AB}{B - 4(B - A)}$$

D. T. B. W. 3°.

En zoo voorts voor alle de leden: en dus voor het n lid

$$Z = \frac{AB}{B - \overline{n - 1}\,(B - A)}, = \frac{AB}{B + \overline{n - 1}\,(A - B)}.$$

I. GEVOLG.

Hieruit volgt 1°. dat men ieder lid van eene harmonische reeks vinden kan, als men de twee eerste kent, en weet het hoeveelste het gevraagde lid is; 2°. dat men, een lid naar welgevallen, en de twee eerste gegeven zijnde, vinden kan het hoeveelste het gevraagde lid is.

II. GEVOLG.

Hieruit volgt dat, wanneer het tweede lid grooter is dan het eerste, en dus de reeks wassende is, men deze niet zoo ver men wil verlengen kan; want $B - \overline{n - 1}\,[B - A]$ zoude eindelijk $= 0$ kunnen worden; doch dat dit mogelijk is wanneer $B < A$, of de reeks afnemende is, zoo als wij zulks reeds in het XXVI. Voorstel getoond hebben.

In het algemeen, zoo de reeks wassende, en het verschil $[B - A]$ der twee eerste leden een effen deel van het tweede lid $[B]$ is, is de reeks eindig: want dan wordt $\overline{n - 1}\,[B - A]$ eindelijk gelijk aan B: dus wordt de noemer $B - \overline{n - 1}\,[B - A]$ nul: en de breuk waarvan dat getal de noemer is, kan niet uitgedrukt worden

Indien het verschil $B - A$ een oneffen deel is van B, zoo zal men eindelijk tot een getal komen, zoodanig, dat $B - m\,[B - A]$ nog kleiner is dan B, en dus dat de noemer $B - m\,[B - A]$ nog *positief* is, maar dat $\overline{m + 1}\,[B - A]$ grooter is dan B, en dus de noemer $B - \overline{m + 1}\,[B - A]$ *negatief*, waar door dat lid, en alle de overige, ook *minus* zijn zullen. Bij voorbeeld, zij A, of het eerste lid, 20 : B, of het

twee-

tweede, 36: dan is $B - A = 16$ en $B \times A = 720$: dan zullen de leden zijn

$$20,\ 36,\ \frac{720}{36-2\times 16},\ \frac{720}{36-3\times 16},\ \frac{720}{36-4\times 16}\ \text{enz.}$$

of

$$20,\ 36,\ \frac{720}{4},\ \frac{720}{-12},\ \frac{720}{-28},\ \frac{720}{-44},\ \text{of}$$

$20,\ 36,\ 180,\ -60,\ -25\tfrac{5}{7},\ -16\tfrac{4}{11}$:

en men heeft als dan: bij voorbeeld

$36 : -60 = 180 - 36 : -60 - 180$ of

$36 : -60 = 144 : -240$.

of $6 : -10 = 12 : -20$.

insgelijks

$180 : 25\tfrac{5}{7} = 180 - (-60) : -60 - (-25\tfrac{5}{7})$

of

$$180 : -\frac{180}{7} = 180 + 60 : -60 + 25\tfrac{5}{7}$$

of

$7 : -1 = 240 : -34\tfrac{2}{7}$, of

$7 : -1 = 240 : -\frac{240}{7}$, of

$7 : -1 = 7 : -1$: en zoo voorts in alle gevallen, mits behoorlijk op de teekens $+$ en $-$ lettende.

XXX. VOORSTEL.

Indien men eene beftendige grootheid achtervolgens door de leden van eene arithmetifche reeks divideert; zullen de quotienten eene *harmonifche* reeks uitmaken.

HORREBOW §. 10. — LAMI p. 465.

BEWIJS. Uit het voorgaand Voorftel blijkt, dat eene harmonifche reeks A, B, C, D, E, enz. dus kan worden uitgedrukt,

$$\frac{AB}{B},\ \frac{AB}{B+(A-B)},\ \frac{AB}{B+2(A-B)},\ \frac{AB}{B+3(A-B)}$$

$$\frac{AB}{B+4(A-B)}\ \cdots\cdots\cdots\ \frac{AB}{B+\overline{n-1}(A-B)}$$

Maar AB is eene beftendige grootheid, en (XXII. Voorftel), B, B + (A — B), B + 2 (A — B), B + 3 (A — B) ······· B + $\overline{n-1}$ (A — B) maken eene arithmetifche reeks: waaruit dan het Voorftel volgt.

I.

I. GEVOLG.

Getallen, die het omgekeerde zijn van de leden eener arithmetische reeks, maken eene harmonische reeks uit.

I. AANMERKING. Indien men, zoo als HORREBOW, dit Voorstel als de bepaling van eene harmonische progressie aanneemt, kan men uit dezelve, zoo wel onze bepaling als de vorige voorstellen afleiden.

II. AANMERKING. Uit dit Voorstel blijkt genoegzaam, dat de bepaling van WOLF hier niet geldt: want men heeft hier niet

$$A : \frac{AB}{B + 3(A - B)} = A - B : \frac{AB}{B + 2(A - B)} - \frac{AB}{B + 3(A - B)}$$

Want dan moest men hebben

$$A : A - B = \frac{1}{B + 3(A - B)} : \frac{1}{B + 2(A - B)} - \frac{1}{B + 3(A - B)}$$
$$= B + 2(A - B) : A - B$$
$$= 2A - B : A - B\text{: dat valsch is.}$$

II. GEVOLG.

Wanneer men, uit eene harmonische reeks, leden uitneemt, die even ver van elkander afstaan, zullen zij ook eene harmonische reeks uitmaken.

HORREBOW § 12.

BEWIJS. Het blijkt om dat de noemers altijd in eene arithmetische reeks blijven.

XXXI. VOORSTEL.

Wanneer drie getallen eene arithmetische evenredigheid uitmaken, zijn de producten van het eerste met het tweede, van het eerste met het derde, en van het tweede met het derde *harmonisch* evenredig.

LAMI p. 464. prop. 4.

BEWIJS. $\div$ I, K, L: dus
$I + L = 2K$:
$I - K = K - L$:
maar $I.K : K.L = I : L$ (IV *Ax.*)
dus $I.K : K.L = I(K - L) : L(I - K)$ (IV *Ax.*)
of $IK : KL = IK - IL, : IL - KL$ derhalve
IK, IL, en KL, harmonisch evenredig.

XXXII. VOORSTEL.

Wanneer men tusschen twee getallen I, K eene arithmetische mid-

midden-evenredige [A] en eene harmonifche midden-evenredige [H] neemt, zullen die vier getallen eene geometrifche evenredigheid uitmaken, waarvan de twee gegevene de uiterfte, en de twee gevondene de middelfte leden zullen zijn.

BEWIJS. Door de onderftelling en Voorft. XX. Gev. 1. is $A = \frac{I + K}{2}$

en door onderftelling en Bep. 23. Gev. 3.

$$H = \frac{2\,K\,I}{I + K}\text{: maar}$$

$$1 : I = K : KI \text{ (IV } \textit{Axioma}\text{)}$$

dus (X. Voorftel, 2 Gevolg.)

$$I + K : I = K : \frac{KI}{I + K} \text{ of}$$

$$\frac{I + K}{2} : I = K : \frac{2KI}{I + K}$$

dus

$$A : I = K : H.$$

I. ALGEMEENE AANMERKING.

De leer der harmonifche evenredigheid is van het grootst belang in vele ftukken van de Natuurkunde, waaromtrent men HORREBOW ter aangehaalde plaatfe §. 45. en volg. kan raadplegen, zoo als ook mijne *Pofitiones Phyficae* Lib. III. §. 105. Lib. IV. §. 115, & §. 294. §. 333, 361.

II. ALGEMEENE AANMERKING.

Er is nog eene andere foort van evenredigheid, die WOLF *tegen-harmonifche* (*contra-harmonica*) noemt, in zijne latijnfche *Algebra* §. 193: namelijk drie getallen zijn *tegen-harmonisch* evenredig, zoo het verfchil tusfchen het eerfte en het tweede, ftaat tot het verfchil tusfchen het tweede en het derde, als het derde tot het eerfte: dus zijn A, B, C, *tegen-harmonisch evenredig*, indien

$$A - B : B - C = C : A\text{: en dus is}$$

$$C^2 - BC = BA - A^2 \text{ of;}$$

$$C^2 + A^2 = B(C + A)\text{: en dus}$$

$$\frac{C^2 + A^2}{C + A} = B\text{:}$$

gevolglijk: Indien men de fom der quadraten van twee getallen door de fom dier getallen divideert, is het quotient *middel contra-harmonisch-evenredig* tusfchen die getallen.

Zie verder WOLF §. 193—196.

Die bepaling was reeds door THEON van *Smirna* in zijn 58 hoofddeel gegeven.

IV.

IV. AFDEELING.

OVER DE LOGARITHMEN.

XXV. BEPALING (*).

Indien men twee reekſen van getallen heeft, de eene, eene geometriſche reeks, de andere eene arithmetiſche reeks; en men dezelve zoodanig ſtelt, dat er tegen over ieder lid van de geometriſche reeks een lid van de arithmetiſche reeks ſtaat: worden de getallen van de arithmetiſche reeks *in het algemeen* de *logarithmen* genoemd van de getallen der geometriſche reeks, ieder van dat getal, tegen over het welk het ſtaat.

Bij voorbeeld: Geometriſche reeks 1, 3, 9, 27, 81, 243,
Arithmetiſche reeks 0, 1, 2, 3, 4, 5,
Dan zouden 0, 1, 2, 3, 4, 5, ieder in zijn' rang de *Logarithmen* zijn van 1, 3, 9, 27, 81, 243.

St. XI. def. 1.

AANMERKING. Wij zullen in de eerſte aanmerking op het volgend Voorſtel een naauwkeuriger denkbeeld van Logarithmen geven.

XXXIII. VOORSTEL.

Indien men de geometriſche reeks
a^0 (of 1), a^1, a^2, a^3, a^4, - - - - - - - a^n
heeft; zijn de *exponenten* 0, 1, 2, 3, 4, enz., de logarithmen van de getallen a^0 (of 1), a, a^2, a^3, enz. ieder in zijn' rang.

St XI. def. 2.

BEWIJS. Uit de XXV. Bep. het XV. Voorſtel, 4. Gevolg, en het XXII. Voorſtel, 5. Gevolg.

I. AANMERKING. In de berekening, en dus in het gebruik, der Logarithmen, onderſtelt men altijd dat de eenheid, (en dus a^0. (Zie IV. Bep. 3. Aanm.) het eerſte lid van de geometriſche reeks is, en dus *nul* het eerſte lid van de arithmetiſche reeks, of van de reeks der *logarithmen*: gevolgelijk zijn,

(*) De *eerſte* Bepalingen zijn te vinden pag. 86. de *tweede* pag. 98, de *derde* pag. 130. en de *vierde* pag. 136.

zijn, in eenen meer bepaalden en naauwkeuriger zin, de *logarithmen*, „ getallen in eene arithmetische reeks met nul „ beginnende en staande tegen over de getallen van eene „ geometrische reeks, die met 1 begint."

I. GEVOLG.

Dus in het algemeen, indien a het getal is, waar van de Logarithmus 1 is, zal $1 = \text{Log.}\ a$, $0 = \text{Log.}\ a^0 = \text{Log.}\ 1$, en $x = \text{Log.}\ a^x$ zijn.

II. AANMERKING. Dat getal a, waarvan 1 de Logarithmus zijn zal, kan naar welgevallen genomen worden: doch het hangt van dat getal af, welke de getallen zijn waarvan 2, 3, 4 enz. de logarithmen zijn zullen, daar die getallen de 2, 3, 4 magten enz. van a zijn. Om deze rede noemt men dat getal, waarvan 1 de logarithmus is, den grondslag, of de *basis* van dat *stelsel* van logarithmen; en dus kunnen er zoo vele verschillende stelsels van logarithmen zijn, als men verschillende getallen tot grondslag aanneemt.

II. GEVOLG.

Wij hebben gezien in het 7. Gevolg van het XV. Voorstel, dat men de Geometrische reeks

$$A,\ Aq,\ Aq^2 \text{ - - - - - - - - } Aq^{n-1}$$

aan den anderen kant van A verlengen kan: dus, stellende $A = 1$, heeft men

$$q^{-(n-1)} \text{---},\ q^{-4},\ q^{-3},\ q^{-2},\ q^{-1},\ q^0,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4, \text{ of}$$

$$\frac{1}{q^{n-1}} \text{ --- } \frac{1}{q^4},\ \frac{1}{q^3},\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4 \text{ --- } q^{n-1}$$

En gevolgelijk zullen $-(n-1)$, -4, -3, -2, -1 de logarithmen zijn der breuken $\frac{1}{q^{n-1}}$, $\frac{1}{q^4}$, $\frac{1}{q^3}$, $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{q}$.

III. GEVOLG.

Insgelijks, indien men andere middel-evenredige tusschen twee leden, bij voorbeeld 1 en q, q en q^2 neemt, zoo als

$$1,\ q^{0,25},\ q^{0,5},\ q^{0,75},\ q^1,\ q^{1,25},\ q^{1,5},\ q^{1,75},\ q^2, \text{ enz.}$$

zullen 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1,25, 1,5, 1,75, 2, de *logarithmen* van die getallen zijn, ieder in hunnen rang; en dus is er geen getal hoegenaamd, of men kan zijn *logarithmus* bepalen: want dat getal valt zeker tusschen twee leden van de reeks q, q^2, q^3 enz. in, welk getal men ook voor q neme:

me: en er is geen getal of het is eenige magt of wortel van het getal q (8. Gevolg van het XV. Voorftel).

IV. GEVOLG.

Men kan dus in eenen nog meer bepaalden zin dan in Aanm. I. op Voorftel XXXIII. zeggen, dat „ de *loga-* „ *rithmen* de *exponenten* zijn der magten tot welke men „ een beftendig getal (q) moet verheffen, om achtervol- „ gens alle de mogelijke getallen te verkrijgen: zijnde dat „ beftendig getal q de *bafis*, of grondflag, van het ftelfel „ Logarithmen dat men aanneemt."

LA CROIX *Algèbre* §. 242.

XXXIV. VOORSTEL.

De Logarithmen [x en y] van een en het zelfde getal [Z], welke tot verfchillende ftelfels van Logarithmen behooren, ftaan altijd in eene beftendige rede tot elkander.

BEWIJS. Zij het eene ftelfel

$a^0, a^1, a^2, a^3, \text{- - - - - -} a^x$

het andere

$b^0, b^1, b^2, b^3, \text{- - - - - -} b^y$

Men ftelle dat $a^x = Z = b^y$: zoo als bij voorbeeld, indien $a = 4$ is, en $b = 2$, is $a^4 = 256$, en $b^8 = 256$: dus $a^4 = b^8 = 256 = Z$: daar dan $a^x = Z$; $b^y = Z$; is $a^x = b^y$: x Log. $a = y$ Log. b en dus $x : y =$ Log. b : Log. a: dat is, in eene beftendige rede.

XXXV. VOORSTEL.

De fom der Logarithmen van twee getallen, is de Logarithmus van het product dier beide getallen door elkander gemultipliceerd.

St. XI. 1.

BEWIJS. Uit het XXXIII, het XXIV en het XVII. Voorftel.

I. GEVOLG.

De Logarithmus van het product uit verfcheiden getallen is de fom der Logarithmen van ieder van die getallen: dat is Log. $(a \times b) =$ Log. a + Log. b.

II. GEVOLG.

De Logarithmus van eenige magt n van een getal b, of van b^n, is het product van den *exponent* n gemultipliceerd door den Logarithmus van het getal b. Dat is Log. $b^n = n \times$ Log. b.

BEWIJS. Uit het I. Gevolg en de IV. Bepaling.

St. XI. 2.

III. GEVOLG.

Indien men dan eene tafel gemaakt heeft van de Logarithmen van alle de getallen, zal men, met te zien, welk getal tegen over de som der Logarithmen van twee of meerder getallen ſtaat, weten, dat dit getal het product van die getallen is: en men zal dus het zeer lastig werk van *multipliceeren*, tot het gemakkelijk werk van *addeeren* herleiden.

XXXVI. VOORSTEL.

Het verschil der Logarithmen van twee getallen is de Logarithmus van het quotient dat uit de divisie dier twee getallen voorkomt: dat is Log. $\frac{a}{b}$ = Log. a — Log. b.

St. XI. 3.

BEWIJS. Uit het XXXIV. Voorſtel, gepaard met de III. Aanmerking op de IV. Bepaling: of uit het XXXIII. Gev. 2., XXIV. en XVII. Voorſtel.

I. GEVOLG.

De Logarithmus van den wortel n uit eenig getal, (of van $\sqrt[n]{b}$, of $b^{\frac{1}{n}}$) is het n^e gedeelte van den Logarithmus van dat getal zelf: (II. Gevolg van het voorgaand Voorſtel, gepaard met de III. Aanmerking op de IV. Bepaling). d. i. Log. $b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times$ Log. b.

St. XI. 4.

II. GEVOLG.

Als men eene tafel heeft, waarin de logarithmen van al-

alle de getallen gevonden worden, zal men het lastig werk van *divideeren* tot eene *aftrekking* van logarithmen, en het nog moeijelijker werk van worteltrekken tot eene ligte *divisie* herleiden.

III. GEVOLG.

$$\text{Log. } \frac{1}{a} \text{ is dan } = \text{Log. } 1 - \text{Log. } a:$$

dus is $\text{Log. } \frac{b}{a} = \text{Log. } b \times \frac{1}{a} = \text{Log. } b + (\text{Log. } 1. - \text{Log. } a.)$ of om dat Log. 1 = 0 (Voorst. XXXIII. Gev. 1.) = Log. b — Log. a. Men noemt het *arithmetisch complement* van een' logarithmus de *rest* die men verkrijgt, wanneer men eenen logarithmus van 0 aftrekt; welke *rest* dus *negatief* is (XXXIII. Voorstel, 2. Gevolg). En dus komt het aftrekken van een' logarithmus met het bijvoegen van zijn *arithmetisch complement* overéén. (Zie, op het einde van dit Boek, het *Berigt* N°. VI).

XXXVII. VOORSTEL.

Wanneer drie getallen *zeer weinig* van elkander verschillen, zullen de verschillen der logarithmen zeer ten naasten bij de zelfde rede volgen als die der getallen, waarvan zij de logarithmen zijn.

BEWIJS. Uit het XXXIII. en uit het XXI. Voorstel.

XXXVIII. VOORSTEL.

In alle stelsels van logarithmen, zijn de logarithmen van de *basis*, en van alle de getallen die magten zijn van de basis, gegeven: zij zijn namelijk, *geheele getallen*, de natuurlijke getallen 1, 2, 3, enz. zelve. De logarithmen van alle de andere getallen zijn breuken, en wel zuivere breuken voor alle de getallen tusschen de eenheid en de basis begrepen: gemengde breuken voor alle de overige getallen die grooter dan de basis zijn.

BEWIJS. Uit het XXXIII. Voorstel en deszelfs 2. Gevolg.

GEVOLG.

In onze gewone logarithmen, die men Tafel-Logarithmen, om dat zij de gewone logarithmus-tafels uitmaken, of ook wel *Briggiaansche* logarithmen noemt, omdat

dat zij door HENRY BRIGGS, een' Engelschman, berekend zijn, is 10 de basis: dus is, zoo als altijd, 0 de logarithmus van 1: 1 de logarithmus van 10^1 of van 10: 2 de logarithmus van 10^2 of van 100: 3 de logarithmus van 10^3 of 1000: 4 de logarithmus van 10^4 of 10000: en zoo voorts. De verdere logarithmen worden door decimale breuken uitgedrukt; en dus zijn zij voor alle de getallen tusschen 1 en 10, 0 met zoo vele cijffer-letters er achter als vereischt worden om de breuk te maken; voor alle de getallen tusschen 10 en 100, 1 met cijffer-letters tot breuk; enz. doch voor ware breuken zijn zij *negatief*: namelijk — 1, met cijffer-letters er achter tot breuk voor alle de getallen tusschen 1 en $\frac{1}{10}$: — 2, voor alle de getallen tusschen $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{100}$ enz. Zie a. Gev. van het XXXIII. Voorstel.

De logarithmen bestaan dan uit eene cijffer-letter, 0, of 1, of 2, of 3 enz., die men het *karakter* of den *aanwijzer* noemt, en uit cijffer-letters achter het *karakter* om de noodige breuk te maken: en deze noemt men het *aanvulsel* (*mantissa*).

Het *karakter* is dus een *geheel positief* of een *geheel negatief* getal, naar mate het tot den logarithmus van een getal behoort dat grooter of kleiner is dan de eenheid: en er zijn zoo vele eenheden in het *karakter* als er cijffer-letters in het getal, of in den noemer van de *decimale breuk*, waarvan het de logarithmus is, gevonden worden min één: dus is 0 het *karakter* van alle getallen tusschen 1 en 10: 1 van de getallen tusschen 10 en 100: 2 van de getallen tusschen 100 en 1000 enz. — 1 van alle de decimale breuken tusschen 1 en $\frac{1}{10}$: — 2 van alle de decimale breuken tusschen $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{100}$ enz.

St. XI. def. 8.

AANMERKING. In de gewone kleine Logarithmus-Tafels wordt het karakter altijd vóór het aanvulsel gevonden, en van het zelve met een stip afgescheiden: doch dit is nutteloos, en kan gelegenheid tot vele misslagen geven. Een getal gegeven zijnde, kan men door het gezegde altijd het karakter opmaken: bijv. voor een getal uit 6 cijffer-letters, stel voor 678901, is het karakter 6 *min* 1 of 5. Daarom wordt het karakter te regt weggelaten in de grootere Tafels van DOUWES, SHERWIN, GARDINER, CALLET, en zoo voorts. Men vindt het karakter onmiddelijk door dit Gevolg.

XXX.

XXXIX. VOORSTEL.

De logarithmen van alle de getallen die noch de *basis*, noch magten van de *basis* zijn, worden berekend door het gedurig vinden van geometrische middel-evenredige tusschen die magten der basis, tusschen welken het gegeven getal valt, en van overéénstemmende arithmetische middel-evenredige tusschen de logarithmen van de gemelde magten der basis.

St. XL. 6, 7.

BEWIJS. Uit het XXXIII. Voorstel 3. Gevolg.

I. AANMERKING. Men wil bij voorbeeld den Logarithmus van 5 berekenen: De logarithmus van 1 is 0: die van 10 is 1: het getal 5 staat tusschen 1 en 10: ik beschouw dan de getallen 1 en 10 als de uiterste van eene geometrische, en de getallen 0 en 1 als de uiterste van eene arithmetische reeks: ik zoek dan wederzijds middel-evenredige, tot dat ik in de geometrische reeks een getal krijg, dat zeer ten naasten bij 5 is; aldus,

Middel-evenredige tusschen 1 en 10 = $\sqrt{1 \times 10}$ = $\sqrt{10}$ = 3,162277: middel-evenredige tusschen 0 en 1 is $\frac{1}{2}$ of 0,5; dus is 0,5 de logarithmus van 3,162277: dit getal is te klein: ik zoek dan weder eene middel-evenredige tusschen 10 en 3,162277: die gevolgelijk kleiner dan 10, doch grooter dan 3,162277 zijn zal: (XV. Voorstel 2. Gev.): deze is $\sqrt{31,62277}$ = 5,623413: de middel-evenredige tusschen 1 en 0,5 is 0,75: dus is 0,75 de logarithmus van 5,623413: dit getal is te groot: ik zoek dan eene middel-evenredige tusschen 5,623413 en 3,162277 welke kleiner dan 5,623413, doch grooter dan 3,162277 zijn zal; deze is $\sqrt{5,623413 \times 3,162277}$ = 4,216964; ik zoek insgelijks eene middel-evenredige tusschen 0,5 en 0,75; deze is 0,625: dus is 0,625 de logarithmus van 4,216964. Dit getal te klein zijnde, neem ik weder eene middel-evenredige tusschen 4,216964 en 5,623413 en zoo voorts, tot dat ik tot middel-evenredige een getal verkrijge, dat zeer na bij 5 komt. Zie ook de volgende III. Aanmerking.

II. AANMERKING. Het blijkt hieruit hoe het kome, dat, daar de logarithmen de exponenten zijn van getallen in eene geometrische reeks staande, nogthans in de Tafels de getallen, tot welken de logarithmen behooren, eene arithmetische reeks maken, als zijnde de natuurlijke getallen 1, 2, 3, enz. Men heeft immers alle de middelleden, die tusschen

 o

o en 1, tusschen 1 en 2 enz. zijn, en die men mede heeft moeten berekenen om de overige te vinden, weggelaten. Het vinden van den logarithmus van een getal, bijv. van 5, is eigenlijk vinden, welke magt dat getal van de bazis 10 zij: dus vindt men hier dat $5 = 10^{0,69897}$: en dus is 0,69897, de exponent van die magt, de logarithmus van 5.

III. AANMERKING. Het volgt hieruit dat de Logarithmen slechts ten naasten bij gevonden worden, daar alles steunt op worteltrekken uit getallen die alle *onmeetbaar* zijn: en gevolgelijk dat de logarithmen ook naauwkeuriger zijn zullen, naar mate men de wortels naauwkeuriger, dat is tot meerder cijffer-letters, berekent. De logarithmen zelve worden doorgaands tot 7 cijfferletters in het aanvulsel gebragt.

IV. AANMERKING. Het is op deze wijze dat BRIGGS en VLACQ de logarithmus-tafels berekend hebben: dan hoe lastig en langwijlig dit werk ook zij, wordt het veel verligt, 1°. hier door, dat het genoeg is de logarithmen der *eerste* getallen, 1, 2, 3, 11, 13 enz. te berekenen: daar de overige door eene enkele optelling van logarithmen gevonden worden, bij voorb. Log. 21. = Log. 3 + Log 7. 2°. Dat alle die middel-evenredige welke men berekent om den logarithmus van een getal te vinden, niet verloren zijn, maar wederom in het vervolg in de tafels dienen kunnen: 3°. dat wanneer de getallen zeer weinig verschillen, men de arithmetische middel-evenredige nemen kan in plaats van de geometrische (Voorst. XXI). Ook heeft men in het vervolg andere en kortere handelwijzen uitgedacht, om den *logarithmus* van welk getal men wil, veel gemakkelijker te berekenen. Wij zullen eene dier wijzen in het AANHANGSEL opgeven.

V. AANMERKING. NEEPER, een Schotsch Edelman, de eerste uitvinder der logarithmen, heeft zijne logarithmen op eene andere basis dan 10 berekend: zijne basis is het getal 2,7182818: dus is 1 de logarithmus van 2,7182818, daar het bij ons de logarithmus van 10 is. Die logarithmen worden de NEEPERIAANSCHE, ook de *natuurlijke* of *Hyperbolische* logarithmen genoemd: het eerste naar den uitvinder, het ander om dat zij ook uit de *quadratuur* van de *hyperbole* ontleend worden. Het zal genoeg zijn hier aantemerken, dat de NEEPERIAANSCHE of *Hyperbolische* logarithmus van 10 is 2,3025850, en dus (XXXIV. Voorstel) dat de *hyperbolische* logarithmus van eenig getal staat tot den logarithmus van het zelfde getal in de Tafels, als 2,3025850 tot 1,0000000: dat de tafel-logarithmen gevolgelijk tot de hyperbolische herleid worden, zoo men ze door 2,3025850 mul-

multipliceert, en de hyperbolische tot de tafel-logarithmen, indien men ze door 2,3025850 divideert, of door $\frac{1}{2,3025850}$, dat is, door 0,4342744, multipliceert.

B E R I G T.

Ik zal in mijne lessen zelve het gebruik der Logarithmus-tafels door voorbeelden uitleggen, en toonen hoe het zelve op de voorgaande Voorstellen rust: het is onnuttig dit gebruik hier intelasschen, om dat het voor alle Tafels gevonden wordt. Het zal echter niet ondienstig zijn aantemerken, dat er vijf Vraagstukken optelossen zijn.

I. *Te vinden den Logarithmus van een gegeven* geheel *getal, dat in de Tafels staat.* Dit lost zich van zelf op.

II. *Te vinden den Logarithmus van eene decimaale breuk, het zij zuivere, het zij gemengde breuk, doch die niet uit meer cijffers bestaat dan de getallen van de Tafels die men gebruikt.*

Men zoekt den logarithmus als of het een geheel getal was, doch zonder op het *karakter* (indien het in de Tafels staat) te letten: men voegt er het karakter bij naar de Aanmerking op het XXXVIII. Voorstel, Gevolg.

Wij zullen hier uitleggen hoe, en waarom, men voor het *karakter* der logarithmen van zuivere breuken, in plaats van *negatieve* karakters, gebruiken kan 9 voor de getallen tusschen $\frac{1}{10}$ en 1, en dus in plaats van -1 : 8 voor de getallen tusschen $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{100}$ en dus in plaats van -2 : 7 voor de getallen tusschen $\frac{1}{100}$ en $\frac{1}{1000}$ en dus in plaats van -3: en zoo voorts: altijd zoo vele eenheden van 10 aftrekkende, als er nullen vóór de eerste cijfferletter van de breuk gevonden worden.

III. *Te vinden den logarithmus van een getal, het zij een geheel getal, het zij eene breuk, uit meer cijffers bestaande dan de getallen van de Tafel.* — Men neemt de logarithmen van het naastvoorgaande en het naast volgende getal, na dat men bij ieder dezer getallen zoo vele nullen gevoegd heeft, als er cijffers meer in het gegeven getal zijn, en de *karakters* naar eisch gesteld heeft, neemt men hun verschil. Men neemt insgelijks het verschil tusschen die twee getallen, en tusschen het kleinste en het gegeven; vervolgens zoekt men door eenen regel van drieën een evenredig gedeelte voor den logarithmus, zeggende:

Het verschil tusschen de twee getallen staat tot het verschil

fchil van hunne logarithmen, zoo als het verfchil tusfchen het kleinfte getal en het gegeven, tot het verfchil tusfchen den logarithmus van het kleinfte en den logarithmus van het gegeven getal: welk verfchil men dus bij den eerstgemelden voegt. (XXXVII. Voorftel).

Wij zullen hier het gebruik aanwijzen van de kolommen van *proportioneele gedeelten* die in de grootere Logarithmus-Tafels gevonden worden: en de reden geven, waarom de gemelde regel naauwkeurig voor groote, doch onnaauwkeurig voor kleine getallen is.

IV. *Een logarithmus gegeven zijnde, het getal te vinden.*

Zoo de logarithmus in de Tafels ftaat, is het overeenftemmend getal het gezochte. Zoo niet, vergenoegt men zich met het getal wiens logarithmus het naast aan den gegeven logarithmus komt: of, wil men naauwkeurig te werk gaan, zoekt men een evenredig gedeelte door den zelfden regel als in het voorgaande vraagftuk, zeggende: het verfchil tusfchen de twee logarithmen ftaat tot het verfchil tusfchen hunne getallen, zoo als het verfchil tusfchen den kleinften logarithmus en den gegevenen, tot het verfchil tusfchen het kleinfte en het gezochte getal. Of wel, in plaats van dien regel, gebruikt men in de grootere Tafels de kolom van *proportioneele* of *evenredige gedeelten.*

V. *Te vinden den Logarithmus van eene breuk, het zij zuivere, het zij gemengde.* Men trekt den Logarithmus des noemers van den Logarithmus des tellers af: de *rest* is de gevraagde logarithmus: en het getal, dat over dien logarithmus ftaat, of tot denzelven behoort, is de *decimaale breuk* die aan de gegeven breuk gelijk is.

Zie St. XI. 8—14.

VI. Hier moet men *ten zesden* bijvoegen, dat, daar het *addeeren* altijd gemakkelijker valt dan het *fubtraheeren*; men, in plaats van Logarithmen *af te trekken*, meest altijd derzelver *arithmetifche complementen* (XXXVI. Voorft. het III. Gev.) neemt, en *bijtelt*: het geen vooral veel verkort, wanneer men verfcheiden logarithmen moet aftrekken: bijv. in het berekenen van deze breuk $\frac{23 \times 303 \times 277}{13 \times 24 \times 47}$, zoude men op de gewone wijze dus te werk gaan:

Log. 23	. . . .	1,3617278
Log. 303	. . . .	2,4814426
Log. 277	. . . .	2,4424798
		6,2856502

Log.

			6,2856502
Log. 13	. . .	1,1139434	
Log 24	. . .	1,3802112	
Log. 47	. . .	1,6720979	
		. .	4,1662525
			2,1193977

waarvan het getal ten naasten bij is
131.642

Doch men werkt korter aldus:

Log. 23		. . .	1,3617278
Log. 303		. . .	2,4814426
Log. 277		. . .	2,4424798
Comp. ar. Log.	13	. .	8,8860566
———	24	. .	8,6197888
———	47	. .	8,3279021
			2,1193977

En het valt altijd gemakkelijk het *arithmetisch complement* van eenen *logarithmus* te nemen: want men neemt slechts (van de linker hand beginnende) het verschil van iedere cijffer-letter van den gegeven logarithmus met 9, behalven voor de laatste cijffer-letter, wier verschil men neemt met 10.

VIER-

VIERDE BOEK.

OVER DE GELIJKVORMIGHEID DER FIGUREN, EN DE REDEN VAN DERZELVER ZIJDEN EN INHOUDEN.

INLEIDING.

I. BEPALING.

Men noemt gelijkvormige figuren die, waarin de hoeken onderling gelijk zijn ieder aan ieder, en de zijden, die om gelijke hoeken en tevens over gelijke hoeken ſtaan, de zelfde rede tot elkander hebben.

EUCL. VI. def. 1. — St. VI. Bep. 1. — L. G. III. Bep. 2.

VOORBEELD. In Fig. 87. is ∠ BAE = ∠ GFK: ∠ B = ∠ G: ∠ BCD = ∠ GHI: ∠ CDE = HIK: ∠ E = ∠ K; en verder AE: AB: BC: CD: DE = FK: FG: GH: HI: IK.

I. AANMERKING. In deze bepaling wordt van eene dubbelde eigenſchap geſproken, die niet altijd plaats heeft, zoo als blijkt uit de vierhoeken in Fig. 46. en 41, die wel gelijke hoeken hebben, doch waarin de zijden niet evenredig zijn; en uit de ▱ ▱ ABDC, *ab*DC, *αβ*DC in Fig. 43, die wel gelijke zijden doch ongelijke hoeken bezitten, en geenzins gelijkvormig zijn; maar wij zullen in het II. Voorſtel bewijzen, dat in driehoeken de eene eigenſchap altijd met de andere gepaard is: en dan in het XXIII. doen zien, wat er vereischt wordt op dat het zelfde in andere figuren plaats zoude hebben.

II. AANMERKING. Het valt zeer moeijelijk eene naauwkeurige, alleszins voldoende, en op alle gevallen even toepasſelijke bepaling van de *gelijkvormigheid* te geven. Het natuurlijkst denkbeeld is dat van gelijke, of de zelfde gedaante: dat twee figuren de zelfde gedaante hebben, de eene in het groot, de andere in het klein: want hadden zij gelijke grootte, waren zij in alle opzigten gelijk. Die gelijkheid van gedaante, of die *gelijkvormigheid* wordt dus hierin gezocht; 1°. dat die figuren uit het zelfde getal zijden beſtaan: 2°. in de gelijkheid van ſommige deelen, t. w. der hoeken: 3°. in de evenredigheid der zijden. Het eerſte is klaarblijkelijk: het tweede insgelijks: want indien de zijden niet onderling de zelfde helling behielden in

bei-

beide de figuren, ware er op geene gelijkheid van gedaante te denken. Het derde is ook noodzakelijk: want het is niet genoeg dat de zijden, die gelijke hoeken bevatten, evenredig zijn; bij voorb. in Fig. 87. dat AB : AE = KF : FG zoude zijn; maar het moeten de zijden zijn die tevens over gelijke hoeken staan, AB : AE = FG : KF, om dat men dan de zijden in beide de figuren volgens de zelfde orde, of den zelfden rang, neemt: het geen de gelijkheid van gedaante, en, dus de gelijkvormigheid, in beide de figuren te weeg brengt.

III. AANMERKING. EUCLIDES heeft de woorden, *die tevens over gelijke hoeken staan*, in zijne bepaling achtergelaten: het komt mij voor dat zij er een wezenlijk gedeelte van uitmaken.

IV. AANMERKING. Men zal misschien vragen waarom voor de gelijkvormigheid, *gelijkheid* van hoeken en *evenredigheid* van zijden, en niet evenredigheid zoo wel van hoeken als van zijden, vereischt wordt? Indien men evenredigheid van hoeken stelde zoude daar uit hunne gelijkheid volgen: want laten de hoeken in twee figuren zijn A, B, C, D, E; en F, G, H, I, K, en dat zij ondersteld worden evenredig te zijn: dan is A: B: C: D: E = F: G: H: I: K: en derhalve [III. 8.] A : F = A + B + C + D + E : F + G + H + I + K. Maar om dat de figuren een gelijk getal zijden hebben [Aanm. II.] is uit II. 29. Gev. 1. A + B + C + D + E = 2 *g* R — 4 R = F + G + H + I + K, en dus ook A = F: en gevolgelijk alle hoeken respectivelijk gelijk: de gelijkheid der hoeken zoude dus uit de onderstelde evenredigheid volgen. Ik ben die Aanmerking aan wijlen mijnen dierbaren vriend den Hoogleeraar NIEUWLAND verschuldigd.

V. AANMERKING. Wij zullen in het X. Voorstel van het VII. Boek zien, hoe deze bepaling op den Cirkel toegepast kan worden.

II. BEPALING.

Men noemt, in gelijkvormige figuren, *even-eensgeplaatste*, ook wel *gelijkvormige zijden* (*latera homologa*), die welke gelijke hoeken bevatten, en tevens over gelijke hoeken staan.

St. VI. Bep. 2.

AANMERKING. EUCLIDES heeft daarvan geene opzettelijke bepaling in zijn zesde Boek gegeven: maar in het vierde Voorstel van zijn zesde Boek bewezen, dat de zijden, welke, in gelijkvormige driehoeken, over gelijke hoeken staan, *eveneensstaande* (*homologa*) zijn:

zijn: en het blijkt uit dat bewijs dat de uitdrukking eveneensstaande zijden, in den zelfden zin gebruikt wordt, als eveneensstaande leden eener evenredigheid, volgens de 12 Bep. van zijn vijfde Boek, die hier is de 15 van het derde. Het zal ook in het vervolg blijken, dat die zijden, welke *eveneens-geplaatste* genoemd worden, in de evenredigheid tot welke zij behooren, of beide *voorgaande*, of beide *volgende leden* in die evenredigheid zijn.

III. BEPALING.

Eene figuur wordt gezegd op eene lijn *geplaatst*, of *gesteld*, te zijn, als zij op die lijn staat. En gelijkvormige figuren worden gezegd op verschillende gegeven lijnen *eveneens-geplaatst* te zijn, als, de hoeken op die lijnen gelijk zijnde, de overige gelijke hoeken, en de evenredige zijden, zich in den zelfden rang opvolgen.

CLAVIUS *Scholium op Eucl.* VI. 18.

AANMERKING. EUCLIDES heeft geen bepaling van *eveneensgeplaatste* figuren gegeven, maar zoodanige plaatsing in het hoofd van de XXII. propositie in zijn VI. Boek voorondersteld, en uit de orde die de evenredige zijden volgen, in het bewijs afgeleid. In fig. 87 zijn de figuren M, N op de zijden AE, FK geplaatst, en wel *eveneens* geplaatst.

I. AFDEELING.

OVER DE GELIJKVORMIGHEID VAN DRIEHOEKEN EN PARALLELOGRAMMEN, EN DE REDE VAN DERZELVER INHOUD.

I. VOORSTEL. Fig. 45.

Indien men binnen den driehoek [ADE] eene lijn [BC] evenwijdig aan eene der zijden [DE] trekt: zal die lijn de beide overige zijden in gelijke rede snijden: en omgekeerd; zoo eene lijn twee zijden in de zelfde rede snijdt, zal zij evenwijdig aan de derde zijde zijn.

EUCL. VI. 2. — St. VI. 2. — L. G. III. 15, 16.

I. BEWIJS.

Er hebben twee gevallen plaats: want de lijnen AB en AD hebben *eene gemeene maat*, of wel, hebben *geen gemeene maat*, dat is, zij zijn *onderling onmeetbaar* (III. Bep. 8.).

I.

I. GEVAL. Indien de lijnen BA, en BD eene gemeene maat, stel de lijn AZ, hebben: dan behelst de lijn BA die maat, bij voorbeeld, *m* malen, en de lijn BD *n* malen: en men bewijst uit I. 35. Gev., dat, zoo ZQ // DE, dan AC de lijn AQ ook *m* malen, en CE die zelfde lijn AQ *n* malen, bevat, waaruit volgt (III. *Axioma* IV en Voorst. I.) dat men heeft BA:BD = AC:CE.

Het omgekeerde wordt uit het ongerijmde bewezen: want zoo ED niet // BC: zij EM // BC: dan is door het eerste AC : CE = AB: BM: dat onmogelijk is, vermits door onderstelling, AC:CE = AB:BD.

II. GEVAL. Indien AB en BD geen gemeene maat hebben, zal, niet te min, AB:BD = AC:CE zijn: want zoo neen; zij AB:BM = AC:CE dan is [door het I. Geval omgekeerd] EM // BC: maar BC // DE [onderst.]: derhalve EM // DE: dat ongerijmd is.

AANMERKING. Dit bewijs komt ons voor uit den waren aard der zaken ontleend te zijn, en dus, *wijsgeerig gesproken*, den voorkeur boven andere te verdienen. EUCLIDES heeft een ander bewijs gegeven, ontleend uit ons volgend VI. Voorstel [dat bij hem het I. des zesden Boeks is], dat namelijk driehoeken, die de zelfde hoogte hebben, in de rede hunner grondlijnen staan: doch de Heer D'ALEMBERT heeft reeds te regt aangemerkt, dat dit bewijs slechts *indirect* is. Daar het echter misschien aan sommigen gemakkelijker schijnen zal, zullen wij er de gronden van opgeven, ons VI. Voorstel bewezen stellende: en in de daad, daar het van de vijf voorgaande stellingen onafhankelijk is, kan men het eerst nagaan en bewijzen, en, zoo men wil, voor het *eerste* en dit voor het *tweede* van dit Boek houden.

II. BEWIJS. Fig. 88.

Uit EUCLIDES ontleend: en steunende op het volgende VI. Voorstel. Na de lijnen BE en DC getrokken, en, uit het II. Boek XIII. Voorstel, de gelijkheid der inhouden van de driehoeken BCE en DBC bewezen te hebben, toont men uit het VI. van dat Boek, dat de driehoeken DBC en BAC zijn als de grondlijnen DB en BA: insgelijks ook de driehoeken BCE en BAC als de grondlijnen AC en CE; waaruit dit Voorstel door [III. 5.] volgt.

BEWIJS *van het omgekeerde.* Het zelve gaat voort uit het ongerijmde; of ook regtstreeks, gelijk EUCLIDES gedaan heeft met in het VI. Voorstel van dit Boek. [bij hem VI. 1] te bewijzen, dat de △△, BAC en DBC in de zelfde re-

rede ſtaan als AB : DB; en de △△ BCA en CBE als CA:EC: en derhalve dat, door de onderſtelling, △ BAC: △ DBC = △ BAC: △ BCE: dat gevolgelijk △ DBC ∞ △ ECB; en derhalve [II. 13. Aanm. 2] BC // DE.

I. GEVOLG.

De geheele zijden zijn in de zelfde rede als hare ſtukken: namelijk

AD : AB = AE : AC
AD : DB = AE : CE

uit dit Voorſtel en III. 8.

L. G. III. 15. Corol 1.

II. GEVOLG. Fig. 45.

Indien twee lijnen, die met elkander eenen hoek maken, door zoo vele aan elkander evenwijdige lijnen als men wil geſneden worden: zullen de deelen die, door gemelde ſnijdingen, op eene der lijnen ontſtaan, evenredig zijn aan de deelen op de andere lijn, in de zelfde orde genomen,

L. G. III. 15. Corol 2.

AANMERKING. Dit Voorſtel ſtelt ons in ſtaat om uit het I. Boek der Werkſtukken het 8. [1. oploſſing], en het 9. opteloſſen.

II. VOORSTEL. Fig. 89.

Wanneer de drie hoeken [BAC, ABC, ACB] eens driehoeks [ABC] gelijk zijn aan de drie hoeken [DAE, ADE, AED] van eenen anderen driehoek [ADE] ieder aan ieder; zijn die zijden, welke in beide de driehoeken gelijke hoeken bevatten, en over gelijke hoeken ſtaan, in de zelfde rede.

EUCL. VI. 4. — St. VI. 4. — L. G. III. Gev. 16.

BEREIDING. Men onderſtelt dat de △ DAE in den hoek BAC van den △ ABC geplaats is, waaruit, door de onderſtelling en I. Bep. 10. volgt dat DE // BC. Men trekt DF // EC: waaruit (I. 31.) volgt DE = FC.

BEWIJS. 1°. Uit Voorſtel I. Gev. 1, vooor AD, AE, AB,

AB, AC: en dan 2°. voor AB, BC, AD, FC (= DE); en uit 1°. en 2°. voor AC, BC, AE, DE.

I. GEVOLG.

Driehoeken die gelijke hoeken hebben, zijn gelijkvormig.

I. AANMERKING. Het is om de gelijkvormigheid te besluiten genoeg te weten dat de driehoeken twee gelijke hoeken, (ieder aan ieder) bezitten: want dan is (I. 15. Gev. 2.) de derde altijd gelijk aan den derden.

L. G. III. 18. Gev.

II. AANMERKING. Men kan thans het 1, 2, 4, 5, 6, 10 en 12 Werkstuk van het III. Boek oplossen.

II. GEVOLG. Fig. 91 en 92.

Wanneer twee driehoeken gelijke hoeken hebben, *en dus* gelijkvormig zijn; zijn de hoogten [BG, EH] in de zelfde rede als de eveneensstaande zijden; en de grondlijnen (*zoo noodig verlengd*), worden door de loodlijnen [BG, EH] uit de toppen [B, E] op dezelve getrokken, in evenredige deelen gesneden.

St. VI. 4. Gev.

III. AANMERKING. De gevolgtrekking *en dus* blijkt uit het I. Gevolg. De woorden, *zoo noodig verlengd*, gelden wanneer een der hoeken op de grondlijn stomp is: want dan valt de loodlijn buiten den driehoek (I. 16).

III. GEVOLG. Fig. 93.

Indien men op eene lijn BD een stip B neemt, en uit twee andere stippen [D, E], twee lijnen [DC, EG] naar den zelfden kant zoodanig trekt, dat zij en evenwijdig aan elkander, en in de zelfde rede zijn als hare afstanden van het stip B [DC: EG = DB: EB], zullen hare uiteinden C, G, met het stip B in éene regte lijn zijn.

BEWIJS. Het volgt, door dit Voorstel, uit de ongerijmdheid waarin men vervalt met het tegendeel te stellen.

Immers indien CG, GB twee verschillende lijnen uitmaken, zij dan CGL éene lijn: dan is door dit Voorstel, CD : GE = DL : EL, en dus DL:EL = DE:EB, dat onmogelijk is, om dat DL > DE en EL < EB.

IV. AANMERKING. Dit Gevolg, of dit Voorstel, is in vele

gevallen, ook in de Natuurkunde, van nut; men vindt het bij R. SIMSON, *Sect. Con*, II. *Lemma* I. *ad. prop.* 10. p. 34.

V. AANMERKING. Het blijkt uit het bewijs van dit Voorstel dat „ indien de eveneenstaande zijden van twee driehoeken „ A D E, A B C [Fig. 89] evenwijdig aan elkander zijn, „ ieder aan ieder, die driehoeken gelijkhoekig, en dus ge- „ lijkvormig zullen zijn:" Dit Voorstel wordt bij LE GENDRE (III. 21.) met zoo vele woorden opgegeven. Die Schrijver voegt er bij dat, „ indien de zijden van eenigen „ driehoek F E D [Fig. 90.] loodregt staan op die van eenen „ anderen driehoek [B A C], iedere op iedere, die twee „ driehoeken gelijkvormig zullen zijn:" het geen op het zien der figuur (uit II. 29. en I. 3. op de vierhoeken G B I E, D I A H, G F H C toegepast) gemakkelijk wordt opgemaakt.

Die eigenschap echter kan ook aldus uitgedrukt worden. „ Indien op iedere zijde eens driehoeks uit een stip, naar „ willekeur genomen, eene loodlijn wordt opgerigt, zullen „ die loodlijnen of zich in een stip vereénigen, of door „ hunne ontmoetingen eenen driehoek vormen den gege- „ venen gelijkvormig." Het eerste heeft altijd plaats als de stippen in het midden der zijden genomen worden (zie V. Boek, II. Voorstel, Gev.) en kan op vele andere wijzen plaats hebben.

VI. AANMERKING. Op dit Voorstel steunt het gebruik der *Transversale lijnen* die men op alle *Pleinschalen* aantreft, om geringe onderdeelen van de maat, welke de pleinschaal opgeeft, te kunnen nemen.

Men behoeft slechts het oog op fig. 88*b*. te werpen, om te zien, dat in △ B A C, vermits A C in 10 deelen door de horizontale lijnen gedeeld is, de lijn gemerkt 1 binnen den driehoek $\frac{1}{10}$ van B C zal aanduiden: de lijn 2, $\frac{2}{10}$; de lijn 3, $\frac{3}{10}$ enz. en dat in △ 10,10 9 de zelfde deelen, in omgekeerde orde, van boven naar beneden voortgaan. Indien ik dus op de onderste lijn de eene punt des pasfers stelde op 20, de andere op 5, zoude ik hebben 25 deelen; maar indien ik de eene punt des pasfers op de perpendiculaire lijn 20 voortschuif, en de andere op de schuinsche of *transversale* lijn 5, tot dat beide komen op de horizontale lijn 6; zal ik niet alleen 25 deelen hebben, maar 25 en $\frac{6}{10}$ of 25.6, en zoo voorts in alle gevallen.

VII. AANMERKING. Op dit Voorstel steunt al verder het *algemeen gebruik* van den zoogenoemden *proportionaal pasfer*, of

of *sector*, gelijk de Engelschen denzelven noemen, dien men in de meeste kokers, met mathematische instrumenten voorzien, aantreft. Dit werktuig, dat door velen aan GALILAEUS wordt toegeschreven, bestaat uit twee bladen die met een scharnier verbonden zijn, om wiens *centrum* zij zich bewegen. Op ieder blad zijn verschillende lijnen getrokken, die alle in het *centrum*, of middelpunt, van het scharnier samenlopen, en op ieder blad de zelfde zijn: zoo dat zij altijd bij paren gaan; eene lijn van ieder paar op ieder blad. Wij zullen alle die lijnen beschrijven, en derzelver gebruik doen kennen, achter die Voorstellen waarop derzelver constructie gevestigd is. Nu alleen van de wijze waarop ze alle gebruikt worden, van het algemeen grondbeginsel des geheelen *proportionaal passers*. Wanneer de bladen AD, AE [Fig. 88] van elkander verwijderd zijn, maken de twee lijnen AD, AE, die tot het zelfde paar behooren, in het middelpunt A van het scharnier, eenen hoek. Indien men dan de eene punt eens passers die eene *bepaalde* opening heeft, op een stip D van de lijn AD stelt, en de bladen AD, AE, opent tot dat de andere punt kome op dat stip E van de gelijke lijn op het ander blad, het welk op den zelfden afstand van A gesteld is als D, zoo dat AE = AD, is de hoek DAE, en ook de lijn AE, bepaald. Indien men de punten eens passers zet op die stippen B en C der zelfde lijnen, die ieder op gelijke afstanden van A staan, zoo dat AB = AC: is (I. 27. Gev. 6.) de lijn BC // DE: en door dit Gevolg, AB : AD = BC : DE; zoo dat BC de zelfde rede hebbe tot de gegeven lijn DE als AB tot AD. Dit is de grondslag van den geheelen *proportionaal-passer*.

VIII. AANMERKING. Op dit Voorstel steunt bepaaldelijk het gebruik van die twee lijnen op den proportionaal-passer, welke op dien van Engelsch maaksel met de letter L (eerste letter van het woord *lines*), of met de letters E. P. (*Equal Parts*) en op dien van Fransch maaksel met de woorden *Parties egales* bestempeld zijn. Deze lijnen zijn in gelijke deelen, meestal in twee honderd, verdeeld, en dienen, voornamelijk, om eene gegeven lijn in gelijke deelen te verdeelen; want uit het gezegde in de voorgaande Aanmerking blijkt, dat BC [Fig. 88.]: het zelfde deel is van DE als BA van AD. Indien men dan de lijn DE in 8 deelen wil deelen, zal men de punten des passers, op den afstand DE van elkander staande, wederzijds in D en E brengen, bijv. op 192: en dan naderhand in B en C op 24, die het ⅛ is van 192.

IX. AANMERKING. Op dit Voorstel is ook nog gevestigd het

 ge-

gebruik van die passers, ter wederzijde van het scharnier met twee punten, en dus met vier punten voorzien, welke de Duitschers *Theil-passers*, de Engelschen *Proportionaal-passers*, de Franschen *compas de reduction* noemen. Immers zij Fig. 88*a*. zoodanige passer: dan is, daar AC = AB, AD = AE; ook CB // DE, en de ΔΔ CAB en DAE zijn gelijkvormig; gevolgelijk CA : AD = CB : DE: derhalve is CB het zelfde gedeelte van DE als AC van AD. Meestal is CA de helft van AD, of de korte beenen zijn de helft der lange. Maar men maakt ze ook zoodanig, dat men het middelpunt A kan verschuiven, en dus de lengte der beenen zoo inrigten dat AC zij of ½, of ⅓, of ¼, enz. van AD, waar door dan CB ook ½, of ⅓, of ¼, enz. wordt van DE. Men kan de beschrijving dier passers vinden bij BION, III. B. I Kap. Fig. GH, in plaat 8.

III. VOORSTEL. Fig. 94.

Wanneer de drie zijden [AB, AC, BC] eens driehoeks [ABC] de zelfde rede tot elkander hebben, als de drie zijden [DE, DF, EF] van eenen anderen driehoek [DEF], zullen de hoeken die tusschen de evenredige zijden begrepen zijn, in beide de driehoeken, gelijk zijn.

EUCL. VI. 5. — St. VI. 5. — L. G. III. 19.

BEREIDING. Men vooronderstelt dat er op DF een driehoek DFG, gelijkhoekig met ABC zij gesteld, zoodanig dat ∠ FDG = ∠ A en ∠ DFG = ∠ C; waaruit volgt ∠ G = ∠ B.

BEWIJS. Uit het gegevene, de evenredigheid namelijk der zijden in de driehoeken DFE en ABC, uit de gelijkheid der hoeken in de ΔΔ ABC en DGF, en uit het XI. van het III. B. wordt besloten dat de zijden der driehoeken DGF en EDF onderling gelijk zijn: en dus uit I. 26. dat de hoeken het ook zijn: waaruit het Voorstel volgt.

GEVOLG.

Twee driehoeken, wier zijden evenredig zijn, zijn gelijkvormig.

I. AANMERKING. Dus wederom, wanneer het tweede vereischte voor de gelijkvormigheid in driehoeken, de evenredigheid

heid namelijk der zijden plaats heeft, heeft het eerste ook plaats, te weten, de gelijkheid der hoeken.

II. AANMERKING. Dit Voorstel is voor de gelijkvormigheid het zelfde als Voorstel 26. van het I. Boek voor de gelijkheid der driehoeken. Die zelfde overeenkomst zal in de twee volgende Voorstellen ook blijken.

IV. VOORSTEL. Fig. 89.

Indien een hoek [A B C] van een' driehoek [A B C] gelijk is aan eenen hoek [D B F] van een' anderen driehoek [D B F], en de zijden die deze hoeken in beide bevatten evenredig zijn [A B en B C, B D en B F], zullen de driehoeken gelijkhoekig, en *dus* gelijkvormig zijn.

EUCL. VI. 6. — St. VI. 6. — L. G. III. 20.

BEREIDING. Men onderstelt dat de Δ D B F met den hoek D B F in den gelijken hoek A B C van den Δ A B C gesteld is.

BEWIJS. Dan is door de onderstelling uit Voorst. I. Gevolg 1, D F // A C: waaruit het besluit volgt.

GEVOLG. Fig. 95.

Indien men in eenigen driehoek [A B C], waarin eene lijn [D I] evenwijdig is aan de grondlijn [A C], uit den top [B] zoo vele lijnen [B K, B L, B M], enz. als men wil op de grondlijn trekt: zullen deze de grondlijn [A C] en de evenwijdige [D I] in evenredige deelen snijden, [A K: K L: L M, enz. = D E: E F: F G, enz.].

L. G. III. 22.

AANMERKING. Hier door kan men de 2. oplossing van I. Werkstuk 8. verrigten.

V. VOORSTEL. Fig. 89.

Indien twee zijden [A B, A C] eens driehoeks [A B C] evenredig zijn aan twee zijden [B D, D F] van eenen anderen driehoek [D B F], en er boven dien een hoek [A B C] in den eerstgemelden, doch niet tusschen de gegeven zijden [A B, A C] begrepen, maar tegen over eene [A C] derzelve staande, gelijk is aan den hoek [D B F], die in den anderen driehoek [D B F] over de eveneens geplaatste [D F] der twee gegeven zijden [B D, D F]

 staat:

staat: zullen die twee driehoeken onderling *gelijkhoekig*, en dus *gelijkvormig* zijn: indien de derde hoek ACB en DFB in de twee driehoeken zijn, of beide regt, of beide scherp, of beide stomp.

EUCL. VI. 7. — st. VI. 7.

I. BEWIJS. Men stelt den △ BDF met zijn hoek DBF in den gelijken hoek ABC van den △ ABC. I. Zoo de hoeken F en C beide regt, en dus gelijk, zijn, is DF // AC: waaruit het besluit volgt. II. Zoo de hoeken F en C beiden stomp, of beiden scherp zijn, zeg ik dat AC ook // DF: zoo neen; zij eene andere AL // DF: dan is (Voorst. II.) BD: AB = DF: AL: maar (onderstel) BD: AB = DF: AC: derhalve AL = AC: En (I. 27.) ∠ ALC = ∠ C: gevolglijk zoo ∠ C scherp, moet ∠ ALC ook scherp zijn, en dus ∠ ALB stomp: en gevolglijk om dat DF // AL, zou de hoek DFB ook stomp zijn, dat tegen de onderstelling strijdt, en dus valsch is. Zoo ∠ C stomp ware, zoude de hoek ALC ook stomp moeten zijn, dat onmogelijk is. AC is dan // DF: waaruit het besluit volgt.

II. BEWIJS. Fig. 94. Men kan de zaak ook regtstreeks bewijzen.

BEREIDING. Men make ∠ FDG = ∠ BAC: ∠ DFG = ∠ BCA: derhalve hoek G = ∠ B en dus = ∠ E; dan is in △△ ABC en DGF, door Voorst. III. AB: AC = DG: DF: maar (onderstel) AB: AC = ED: DF: derhalve DG = ED: en dan zijn in de △△ DEF en FDG, DE = DG: DF = DF: en ∠ G = ∠ E: gevolglijk daar ∠ BCA, [of DFG] en DFE [bij onderstelling] beide regt, of beide stomp, of beide scherp zijn: is (I. 25.) EF = GF: en derhalve door (I. 26.) is ∠ EDF = ∠ FDG, en ∠ DFE = ∠ DFG; waaruit door de bereiding het besluit volgt.

I. AANMERKING. Men ziet duidelijk welke overeenkomst dit Voorstel heeft met het 25. van het I. Boek: waarom ik het ook, zoo veel mogelijk, in dezelfde bewoordingen heb uitgedrukt; en het blijkt daaruit waarom de derde hoek ACB en de derde hoek DFE beide of stomp, of regt, of scherp moeten zijn; want daar men (I. 11. Gev. 2) uit het stip A twee gelijke lijnen trekken kan, welke dus tot AB de zelfde rede hebben, die namelijk van DF: DE, maar waarvan de eene met BC eenen stompen, de andere eenen scherpen hoek zoude maken, terwijl de hoek F de zelf-

zelfde zoude blijven; volgt het dat de soort der hoeken C en F bepaald moet zijn. Het blijkt verder duidelijk dat wanneer die derde hoek in een der driehoeken scherp en in den anderen stomp is: de eene hoek het aanvulsel tot twee regten is van den anderen.

St. VI. 7. Gev.

II. AANMERKING. Het geen wij in de II Aanmerking op het XXV. Voorstel van het I. Boek gezegd hebben, heeft hier ook plaats: zoo dat sommigen dit Voorstel dus uitdrukken: „ driehoeken, die eenen hoek gelijk hebben, en twee zij- „ den om eenen anderen hoek staande evenredig, doch waar- „ van die, welke over den gelijken hoek staat, grooter is „ dan die welke daaraan grenst, zijn gelijkvormig."

Immers daar de grootste hoek over de grootste zijde staat (I. 18.), zal de gelijke hoek de grootste zijn, en dus zullen de overigen voorzeker scherp zijn.

III. AANMERKING. En hieruit volgt dan, de gelijkvormigheid van regthoekige driehoeken, of stomphoekige, waarin de stompe hoeken gelijk zijn, zoo er twee zijden die om eenen anderen hoek staan, evenredig zijn: dat ook een onmiddelijk en bijzonder Gevolg van ons algemeen Voorstel is. — KARSTEN §. 208.

VI. VOORSTEL. Fig. 98.

Driehoeken [ABC, KCD] die de zelfde hoogte hebben, doch op verschillende grondlijnen [BC, CD] staan: hebben, voor zoo veel derzelver inhouden betreft, tot elkander de zelfde rede als de grondlijnen zelve; en omgekeerd: het geen ook voor de Parallelogrammen plaats heeft.

EUCL. VI. 1. — St. VI. 1. Gev. 1.

BEREIDING. Men verlenge wederzijds de grondlijn BCD, neme daarop, aan den eenen kant zoo vele deelen BE, EF, FG [zij *m* in getal] als men wil gelijk aan BC, en aan den anderen kant zoo vele deelen DH, HI als men wil [zij *n* in getal] gelijk aan DC; men trekke de lijnen AG, AF, AE; AD, AH, AI. Dan staan de △△ ABC en KCD, om dat zij de zelfde hoogte hebben, onder de zelfde parallellen AK en BD; en derhalven is (II. 13.) △ CAD ∞ △ KCD: zoo dat men, wat den inhoud betreft, waarop het hier aankomt, △ CAD voor den driehoek KCD nemen kan.

BEWIJS. Van het I. △ GAB is het *m* vouwd van △ ABC.
△ DAI is het *n* vouwd van △ CAD.
Grondlijn BG is het *m* vouwd van BC.
Grondlijn DI is het *n* vouwd van CD.
Maar △ GAB of > of = of < △ DAI: naar mate BG of > of = of DI (II. 13. Gev. 2.), derhalve III. 8. △ ABC: △ ACD [of KCD] = BC : CD.

BEWIJS *van het II. of omgekeerde.* Uit het ongerijmde waarin men vervallen zoude indien men ftelde dat △ KCD, niet onder de zelfde evenwijdige lijnen AK en BD ftond.

BEWIJS *voor het III.* Uit I. 31. Gev. 1.

I. AANMERKING. Vele Schrijvers bewijzen dit Voorftel aldus: met de eene grondlijn in *m* gelijke deelen bij v. te fnijden; en de andere in *n* deelen van de zelfde grootte: dan zal de eene driehoek *m* en de andere *n* gelijke driehoeken bevatten, en dus zullen de driehoeken tot elkander ftaan als *m* tot *n*, dat is als de grondlijnen: doch het valt in het oog dat men dan, ftilzwijgend, onderftelt dat de grondlijnen eene gemeene maat hebben, dat niet altijd waar is: en dus is dat bewijs onvoldoende.

II. AANMERKING. Men kan thans de tweede oplosfing van het XXI. Werkftuk van het II. Boek verrigten.

VII. VOORSTEL. Fig. 100.

Indien driehoeken, of parallelogrammen, [BAC, FGH] op gelijke grondlijnen [BC, FH] ftaan, zijn hunne inhouden in de zelfde rede als hunne hoogten,

TACQUET op EUCL. VI. 1. Cor. — St. VI. 1. Gev. 2.

BEREIDING Trek de ⊥⊥ AD en GI: neem DE = BC: IK = FH: derhalve DE = KI. Trek AE en GK.

BEWIJS. DA en IG als *grondlijnen* aannemende, en DE en KI als *hoogten*, is (Voorft. VI.) △ DAE: △ KGI = AD : GI: waar uit, om dat △ DAE ∞ △ BAC en △ KGI ∞ △ FGH (Voorft. VI.) het befluit volgt.

Voor de parallelogrammen volgt het uit I. 31: Gev. 1.

AANMERKING. Men is thans in ftaat om het I. Werkftuk van het IV. Boek optelosfen.

VIII. VOORSTEL. Fig. 99.

De inhouden van parallelogrammen, of van driehoeken, die op verfchillende grondlijnen ftaan [CD, CK] en ver-

verschillende hoogten [DE, KH] hebben, zijn tot elkander in samengestelde rede van de grondlijnen en de hoogten, [zoo als CD × DE : CK × KH].

St. VI. 1.

BEREIDING. Men onderstelt dat de regthoeken FEDC en MHKC ieder op de zelfde grondlijn en hoogte als de gegeven parallelogrammen gesteld zijn, en gevolgelijk met deze gelijken inhoud hebben: vervolgens dat de regthoek MK op de zelfde lijn als de regthoek FD, zoodanig geplaatst is, dat een der hoeken aan beide gemeen worde: men verlengt HK tot N.

BEWIJS. Uit het VI. Voorstel van dit Boek wordt de rede der regthoeken van MK en FK: dan die van FD en FK opgemaakt; en daar uit (door III. 10.) besloten die van de regthoeken FD en MK, te zijn, de samengestelde van CD × DE en CK × HK; waaruit die der gegeven parallelogrammen of driehoeken volgt.

I. AANMERKING. Zie daar wederom een algemeen Voorstel dat niet bewezen kan worden, ten zij eerst een bijzonder geval van het zelve bewezen zij: want de twee voorgaande Voorstellen zijn bijzondere gevallen van dit.

I. GEVOLG.

Gelijkhoekige Parallelogrammen, of Driehoeken, zijn in samengestelde rede der zijden die gelijke hoeken bevatten, en over gelijke hoeken staan.

Immers dan is [Fig. 91 en 92.] in de gelijkhoekige driehoeken ABC, DEF; BG : EH = AB : DE, en dus △ABC : △DEF = AC × BG : DF × EH = AC × AB : DF × DE.

II. AANMERKING. Dit Gevolg is de 23 Propositie van het VI Boek bij EUCLIDES. Die Schrijver, bij wien men ons Voorstel niet vindt, bewijst dit zeer vernuftig: namelijk [Fig. 92.] daar de ▱▱ AG en GD gelijkhoekig zijn, vooronderstelt hij dat dezelve met de gelijke hoeken tegen elkander staan: dan zullen FG en GI ééne regte lijn, en HG en GE ééne regte lijn uitmaken: (Voorst. II Gev. 2.) vervolgens ID en AH verlengende, bekomt men ▱HI: waarmede men door het voorgaande Voorstel, beide de gegeven parallelogrammen AG en GD vergelijkende, het besluit opmaakt.

St. VI. 14. Gev. 2 en 19.

III. AANMERKING. De waarheid, in dit I. Gevolg bewezen heeft niet alleen plaats voor gelijkhoekige driehoeken, maar

 zelfs

zelfs voor driehoeken die maar éénen gelijken hoek bezitten, gelijk blijkt uit dit

II. GEVOLG. Fig. 96.

Indien twee driehoeken [DAB en BAC] eenen gelijken hoek [A] bezitten, zullen de inhouden dezer driehoeken tot elkander staan in samengestelde rede der zijden [AB, AC, en AD, AE] die de gelijke hoeken bevatten.

PAPPUS *Coll. Mathem.* VII. 146. — L. G. III. 24.

BEREIDING. Trek BE.

BEWIJS. △ ABE : △ ADE = AB : AD } (VI).
△ ABC : △ ABE = AC : AE }
derhalve △ ABC : △ ADE = AB . AC : AD . AE.

III. GEVOLG.

Indien Parallelogrammen, of Driehoeken, gelijkhaltig zijn, staan de grondlijnen in omgekeerde rede der hoogten, en omgekeerd [III. 5 en 6].

TACQUET op EUCL. VI. 15. Cor. — St. VI. 14 Gev. 3.

IV. GEVOLG. Fig. 99.

Indien Parallelogrammen, of Driehoeken, gelijkhaltig zijn, en boven dien éénen gelijken hoek bezitten; zijn de zijden, welke dien hoek in den eenen bevatten, in omgekeerde rede van die, welke den gelijken hoek in den anderen omvatten: en omgekeerd.

Het blijkt om dat als dan ED en HK de zelfde rede tot elkander hebben als BD : IK.

EUCL. VI. 14, 15. — St. VI. 12, 13.

IV. AANMERKING. EUCLIDES bewijst zijne veertiende en vijftiende propositien op de zelfde wijze die wij reeds in de II. Aanmerking hebben voorgedragen.

V. AANMERKING. Men is thans in staat de 2. Oplossing van het XIV, XV. en XVI. Werkstuk van het II. Boek te verrigten.

V. GEVOLG.

In alle regthoeken wier inhoud gelijk is, staan de grondlijnen in omgekeerde rede van de hoogten; en omge-

gekeerd; dat is, zoo vier lijnen evenredig zijn, zal de regthoek uit de twee uiterste gelijk zijn aan den regthoek uit de twee middelste.

EUCL. VI. 16.

VI. AANMERKING. EUCLIDES leidt dit Voorstel uit zijn XIV. af, dat hij op de wijze hier boven (Aanm. II.) voorgedragen betoogd heeft. Wij zullen hier onder Voorst. IX. Gev. 3 en 4 zien, dat dit Voorstel volstrekt het zelfde is als het V. van ons III. Boek, met deszelfs 1 Gevolg: en men zoude verwonderd zijn dit gewigtig Voorstel in het V. Boek van EUCLIDES niet aantetreffen, indien het niet met het zoo evengemelde 16 en met het 17 van het VI. Boek overeenkwam, en die Schrijver niet de evenredigheid meer bepaaldelijk in betrekking tot de Meetkunde beschouwd had.

VI. GEVOLG.

Wanneer de inhoud van een vierkant, op eenige lijn geplaatst, gelijk is aan den inhoud eens regthoeks; zal de zijde des vierkants middelevenredig zijn tusschen de zijden des regthoeks: *en omgekeerd*; dat is, wanneer drie lijnen gedurig evenredig zijn, zal het vierkant op de middelste gelijkhaltig zijn aan den regthoek uit de uiterste.

EUCL. VI. 17.

VII. AANMERKING. Dit volgt onmiddelijk uit het voorgaande V. Gevolg: en hier mede komt overeen hetgeen gezegd zal worden in Voorstel IX. Gev. 4.

VIII. AANMERKING. Dit vijfde Gevolg geeft aanleiding om eene verdere uitbreiding te geven aan het Voorstel in Gev. 2. voorgedragen, en daarvan te maken het.

VII. GEVOLG. Fig. 96.

Indien een gelijkbeenige driehoek FAG éénen hoek gemeen heeft met eenen anderen driehoek BAC, en het been AF des eerstgemelden middel-evenredig is tusschen die zijden AB, AC des laatstgemelden, welke den gemeenen hoek bevatten; hebben die twee driehoeken gelijken inhoud.

L. G, IV. 15.

BEWIJS voor het I. Door Gev. 2 is △ BAC : △ FAG = AB.AC : AF.AG (d. i. □ op AF). Maar om dat AF middel-evenredig is tusschen AB en AC, is (Gev. 6.) □ op AF ∞ Rh. uit AB.AC, derhalve △ ABC ∞ △ FAG.

IX. VOORSTEL. Fig. 99.

Indien de grondlijn [CD] eens regthoeks, [CFED], of

of van een parallelogram [CABD] daar mede gelijkhaltig, *m* malen de grondlijn [CK] van een anderen regthoek [CMHK] (of van een ander parallelogram [CGIK] daar mede gelijkhaltig), bevat: en indien de hoogte DE des eersten *n* malen de hoogte [KH] des tweeden bevat: zal de inhoud van den eersten regthoek (of van het eerste parallelogram) tot dien van den tweeden regthoek (of van het tweede parallelogram) staan als het product van *m* door *n* tot 1: en de eerste regthoek [CFED] (of het eerste parallelogram [CABD]) zal zoo vele malen den tweeden regthoek [CMHK] (of den tweeden parallelogram [CHIK]) bevatten, als er eenheden zijn in het getal, dat het product is van *m* door *n* gemultipliceerd.

BEWIJS. Uit Voorstel VIII.

I. GEVOLG.

De regthoek MK, eenmaal aangenomen en bepaald zijnde, kan dan als de maat van alle regthoeken, en daarom (II. 40.) als die van alle figuren beschouwd, en daartoe gebruikt worden. Om nu zoodanige maat der inhouden, ruimten, of oppervlakten, van alle *vlakke* figuren te hebben, neemt men den regthoek MK zoodanig, dat hoogte en grondlijn gelijk zijn: of, dat het een vierkant is, waar van de zijde CK die *éénheid* is, welke tot het bepalen der lengte van de zijden CD, DB, DE, gebruikt wordt: bij voorb. één *duim*, één *voet*, ééne *roede* en zoo voorts: en men noemt dien regthoek MK, *vierkante éénheid*, om de zelve van de *lengte-éénheid*, die ter meeting van afstanden, of lengten, dient, te onderscheiden: en dus indien het ▭ CB 10 voeten bevat, duidt dit aan 10 *vierkante* voeten, of 10 vierkanten, wier zijden ieder éénen voet bedragen.

I. AANMERKING. Het blijkt uit het gezegde; dat *enkele* en *vierkante éénheden* van verschillende benaming tot elkander staan, als het getal deelen die in de enkele éénheid begrepen zijn tot het vierkant van dat getal: dus behelst één voet 12 duimen: en *één vierkante* voet 12 maal 12 of 144 vierkante duimen: het geen ook door EUCLIDES in de XI. Propositie van het VIII. Boek bewezen wordt.

II.

II. AANMERKING. Men ziet hier uit hoe men met EUCLIDES (VII. Bep. 16) een product van twee getallen een *vlak getal* noemen kan, waarvan de getallen die het zelve voortbrengen de *zijden* zijn: dat *vlakke getallen* tot elkander staan in samengestelde rede hunner zijden: (EUCL. VIII. 5.) en dat *gelijkvormige vlakke getallen* zoodanige zijn wier zijden evenredig zijn (VII. Bep. 21).

Deze is ook de reden waarom de Ouden *vlakke plaatsen*, (*loci plani*) en *vlakke vraagstukken* (*problemata plana*), alle die werkstukken noemden, waarin producten van niet meer dan twee grootheden, of alleen *vlakke getallen* gebruikt worden; welke bepaling nader in het V. Boek, Voorstel XIII. Aanm. 5. zal ontwikkeld worden.

III. AANMERKING. Dit eenmaal gesteld zijnde, kunnen verscheide voorstellen op eene andere wijze, dan tot hier toe gedaan is, uitgedrukt, en tevens de uitdrukkingen door andere Schrijvers gebezigd, opgehelderd worden. Welke uitdrukkingen wij onder de gedaante van gevolgen uit dit Voorstel zullen opgeven.

II. GEVOLG.

De vermenigvuldiging der getallen die de lengten van twee lijnen aanduiden, drukt den inhoud uit des regthoeks van dezelve lijnen: en gevolgelijk eene rede, uit twee reden famengesteld, wordt door den regthoek der lijnen, die de enkele reden uitdrukken, en eene verdubbelde rede door het vierkant eener lijn aangewezen, en komen daar mede overéén.

III. GEVOLG.

Wanneer vier lijnen evenredig zijn, is de regthoek der uiterste gelijkhaltig aan den regthoek der middelste, zoo als in het VIII. Voorstel, Gevolg 5, uit andere gronden bewezen is; en men ziet hoe dit overéénkomt met het V. Voorstel van het III. Boek.

IV. GEVOLG.

Wanneer drie lijnen evenredig zijn, is de inhoud van het vierkant op de middelste gelijk aan den regthoek der uiterste; zoo als reeds in het 5. Gevolg van het VIII. Voorstel uit andere gronden bewezen is: en het blijkt hoe dit overeenkomt met het 1. Gevolg van het V. Voorstel des III. Boeks.

V.

V. GEVOLG.

De inhoud van een parallelogram kan worden *uitgedrukt* door het product van de grondlijn, vermenigvuldigd door de hoogte: het geen overeenkomt met het 1. Gevolg van het XI. Voorstel uit het II. Boek.

Insgelijks kan de inhoud van een vierkant uitgedrukt worden door de *tweede magt* of het quadraat van deszelfs zijde.

IV. AANMERKING. Het is om die reden, dat de Ouden (gelijk reeds in het II. Boek, Bep. V. Gev. 2. gezegd is) de uitdrukking *magt van eene lijn*, eene lijn heeft zoo veel *magt*, eene lijn *kan* zoo veel, gebruikten om de vierkanten op die lijnen gemaakt aan te wijzen; dus bij voorbeeld, zoude men, in den trant der Ouden sprekende, kunnen zeggen: (Zie hier onder Bep. IV. Gev.) „ Indien eene „ lijn in uiterste en middelste rede gesneden is, *kan* het „ grootste deel den regthoek van de geheele lijn en het klein„ ste deel." Zoo dan het getal eenheden waar door de inhoud van een vierkant uitgedrukt wordt, geen *quadraat getal* is, is de zijde van het vierkant *onmeetbaar* met betrekking tot de eenheid die de lengte meet: en dit is altijd het geval van de diagonaal van een vierkant met betrekking tot de zijde (Zie III. Bep. 8. Aanm. 2.) het geen ook EUCLIDES in de laatste Propositie van zijn X. Boek bewezen heeft.

VI. GEVOLG.

De inhoud eens driehoeks kan worden uitgedrukt door het product van de grondlijn vermenigvuldigd door de halve hoogte: of door dat van de hoogte vermenigvuldigd door de halve grondlijn: in één woord door het halve product van grondlijn en hoogte: en dit komt overeen met het 1. Gevolg van het XIII. Voorstel uit het II. Boek.

VII. GEVOLG.

De inhoud eens regelmatigen veelhoeks wordt uitgedrukt door het halve product van den omtrek met de loodlijn vermenigvuldigd: en dit komt overeen met het XXXIX. Voorstel van het II. Boek.

VIII. GEVOLG.

De inhoud van een regthoekig *trapezium* wordt uitgedrukt

drukt door het product van de grondlijn met de helft van de som der regthoekszijden; of, wat op het zelfde uitkomt (III. 90. Gevolg); met eene *arithmetische middel-evenredige* tusschen de regthoekszijden, vermenigvuldigd: en dit komt overeen met het XV. Voorstel uit het II. Boek.

IX. GEVOLG.

Een regthoek op eene gegeven lijn *te stellen*, dat is, op eene gegeven lijn eenen regthoek te maken, die aan een gegeven regthoek, of vierkant, gelijkhaltig is, komt overeen met te vinden het quotient dat er voorkomt, wanneer men het product van twee getallen door een gegeven getal divideert; immers komt het gevraagde hier op neer: eene lijn te vinden, die met eene gegeven lijn eenen regthoek, aan eenen gegeven regthoek gelijkhaltig, uitmake: het geen het onderwerp van ons XVI. Werkstuk in het II. Boek oplevert.

V. AANMERKING. Alle de voorgaande uitdrukkingen zijn naauwkeurig als men ze behoorlijk gebruikt: doch zij zijn in zich zelf genomen niet geometrisch, en men boezemt niet alleen onnaauwkeurige, maar zelfs geheel valsche denkbeelden in, wanneer men dezelve, zoo als velen doen, in den beginne gebruikt. De Ouden gebruikten nimmer dergelijke onnaauwkeurige uitdrukkingen, als bij voorb.: de inhoud eens regthoeks *is gelijk* aan het product van de grondlijn met de hoogte; ook hebben wij, zoo als behoort, de woorden *uitgedrukt door*, of *komt overéén met*, in plaats van het onnaauwkeurige en valsche *is gelijk aan* gebezigd. Men kan in den eigenlijken zin geen lijnen door elkander multiplieceeren, maar alléén getallen; en dus ook die getallen welke de lengte van twee lijnen, *met betrekking tot eene gemeene maat*, uitdrukken; het geen eigenlijk, wanneer men de uitdrukking *multiplicatie*, of *product* van twee lijnen gebruikt, bedoeld wordt. De multiplicatie van twee lijnen maakt nimmer eenen regthoek of een vierkant: maar het getal van *vierkanten éénheden*, dat is, van gelijke vierkanten, wier zijden men als *betrekkelijke éénheid*, of *gemeene maat*, voor de *lengte* gebruikt, het welk de inhoud van een' gegeven regthoek bevat, is gelijk aan het product der zijden van dien regthoek, dat is, aan het product der getallen welke de lengte van die zijden, met betrekking tot de gemelde éénheid, of tot de gemeene maat, uitdrukken. Wil iemand echter de gemelde uitdrukkingen, na dat derzelver ware zin ééns naauwkeurig verklaard geweest is, gebruiken, hij doe zulks, doch slechts als verkorte manieren van spreken, of verkorte aanduidingen.

VI. AANMERKING. Men kan dan, wanneer men die uitdrukkingen en die manier van de zaken uittedrukken gebruikt, in plaats van Regth. uit A en B, het teeken A × B, in plaats van □ op A, het teeken A^2 [de magt, even als voor getallen III. Bep. 4.] gebruiken.

Zie hier over D'ALEMBERT, *Melanges Tome* V. p. 211. feqq. — TACQUET *Scholion* op de 34, en 44 Propofitie van het I. en op de 22 Propofitie van het VI. Boek van EUCLIDES: CLAVIUS op die zelfde plaatfen.

X. GEVOLG.

Indien men de inhouden van twee parallelogrammen, of driehoeken, door I en *i*, de grondlijnen door B en *b*, de hoogten door H en *h* uitdrukt, is ons Voorftel dit

I : *i* = B × H : *b* × *h*: en dus

1°. Zoo de grondlijn onmeetbaar is tot de grondlijn, of de hoogte tot de hoogte, doch niet beiden te gelijk, zullen ook [III. Bepaling. 12. Gev. 1.] de inhouden I en *i* onderling onmeetbaar zijn: dat is geen ruimte zal derzelver gemeene maat kunnen zijn.

2°. Indien en hoogte en grondlijn van beide de parallelogrammen onderling onmeetbaar zijn, kan den rede van de inhouden [I : *i*] meetbaar zijn: (III. Bep. 10. Aanm. 2).

Dit is het geval, bij voorbeeld, indien men op de diagonaal en de zijde van een vierkant, vierkanten befchrijft.

3°. Indien vierkanten op lijnen gemaakt worden, die onderling onmeetbaar zijn, zullen hunne inhouden, dat is die vierkanten zelf, niet tot elkander ftaan als een *quadraatgetal* tot een *quadraat getal*, dat is als twee getallen, waaruit men de wortels trekken kan.

4°. Vierkanten kunnen onderling onmeetbaar zijn: want [Fig. 124.] zij AF onmeetbaar tot FD: bijv. als $\sqrt{15} : 2$. Men ftelle eene middel-evenredige FB tusfchen beiden: dan is $FB^2 = 2\sqrt{15} = \sqrt{60}$; en dus het □ op FB: □ op FD $= \sqrt{60} : 4 = \sqrt{15} : 2$: en dus onmeetbaar: en □ op FB: □ op AF $= \sqrt{60} : \sqrt{15}$. d. i. = 2 : 1, onderling meetbaar.

Er zijn dan *vierkanten* die onderling *onmeetbaar* zijn; er zijn lijnen die onderling onmeetbaar zijn, doch wier vierkanten meetbaar worden: en er zijn er die onderling onmeetbaar zijn, en wier vierkanten het ook zijn: EUCLIDES noemt de eerstgemelde lijnen *onmeetbaar in lengte:* de laatstgemelde *onmeetbaar in lengte en in magt.*

En

En hier uit volgt het IX. Voorftel van zijn X. Boek in deze woorden: „ De vierkanten welke op lijnen, die in *lengte* „ *meetbaar* zijn, gemaakt worden, ftaan tot elkander als „ een *quadraat-getal* tot een *quadraat-getal*, en omge- „ keerd. De vierkanten op lijnen gemaakt die in lengte „ onmeetbaar zijn, ftaan niet tot elkander als een *quadraat-* „ *getal* tot een *quadraat-getal*, en omgekeerd: En, (dit „ is het Gevolg) lijnen die meetbaar zijn in lengte, zijn het „ ook in magt: die, welke meetbaar zijn in magt, zijn het „ niet altijd in lengte: die, welke onmeetbaar zijn in lengte, „ zijn het niet altijd in magt; doch die, welke onmeetbaar „ zijn in magt, zijn het ook altijd in lengte.

XI. GEVOLG.

Uit de voorgaande Gevolgen, vooral uit het IV. blijkt verder, dat men alle reden, hoe famengefteld zij ook zijn mogen, altijd door de rede van twee regte lijnen kan uitdrukken.

Want zij M : N = A × B × C : D × E × F. De enkele reden A tot D, B tot E, C tot F kunnen altijd door regte lijnen worden uitgedrukt, het zij dezelve meetbaar of onmeetbaar zijn.

Ik ftel P middel-evenredige tusfchen A en B, Q tusfchen D en E: en R derde evenredige aan P en Q: dan is (Gev. 4.)

□ op P ∞ Regth. uit A en B:
□ op Q ∞ Regth. uit D en E
dus □ op P : □ op Q = A × B : D × E : maar
P : Q = Q : R : dus (4. Gev. en III. 15)
□ op P : □ op Q = P : R : gevolgelijk
P : R = A × B : D × E : en
M : N = P × C : R × F.

Stel S middel-evenredige tusfchen P en C, T tusfchen R en F, en U derde evenredige aan S en T: dus

□ op S : □ op T = P × C : R × F.
maar □ op S : □ op T = S : U: dus
M : N = S : U: en op de zelfde wijze voor alle mogelijke gevallen.

X. VOORSTEL. Fig. 91 en 92.

In gelijkvormige driehoeken [A B C, D E F] zijn de regthoeken der eveneensgeplaatfte zijden [A C, B C, D F,

 E F]

E F] doch wederkerig genomen, (namelijk van A C en E F, B C en D F) gelijk aan elkander.

BEWIJS. Uit het II. Voorstel en het 4. Gevolg van het VIII.

AANMERKING. Dit zal in het V. Boek, in de I. Aanmerking van het XII. Voorstel op eene andere wijze bewezen worden.

XI. VOORSTEL. Fig. 91 en 92.

Gelijkvormige driehoeken staan, wat hunne inhouden betreft, tot elkander in de zelfde rede als de vierkanten hunner eveneensstaande zijden: of, in andere woorden, zij zijn in verdubbelde rede hunner eveneensstaande zijden.

EUCL. VI. 19. — St. VI. 14. — L. G. III. 25.

BEREIDING. Men stelle dat B G en E H de hoogte der driehoeken A B C en D E F zijn.

BEWIJS. Uit het VIII. Voorstel, en het 2. Gevolg van het II: of, zonder bereiding, uit het 1. Gevolg van het VIII. Voorstel, het II. Voorstel van dit Boek, en het 2. Gevolg van het XI. Voorstel van het III. Boek.

AANMERKING. Fig. 91. Wij hebben in het III. Boek, Aanm. op de 18. Bep. gezegd, dat die uitdrukking *verdubbelde rede*, in den eersten opslag, bij EUCLIDES eene andere beteekenis schijnt te hebben dan bij ons: en wij hebben (Aanm. op III. 15. Gev. 1) getoond, hoe beide die beteekenissen echter in de daad overéénkomen. Volgens de beteekenis door EUCLIDES aan het woord *verdubbelde rede* gegeven, moet men bewijzen, dat indien B L derde evenredige is aan B A, en D E, men hebben zal △ B A C, △ D E F = A B : B L: Men stelle B A : D E = D E : B L: en trekke C L, dan gaat dat bewijs aldus voort:

B C : B A = F E : D E,
dus B C : F E = B A : D E
maar B A : D E = D E : B L, (onderstelling).
dus B C : F E = D E : B L:
waarom, uit het 4. Gevolg van het VIII. Voorstel
△ B L C ∞ △ D E F:
doch △ B C A : △ B L C = A B : B L (Voorst. VI.)
dus △ B C A : △ D E F = A B : B L.

XII.

XII. VOORSTEL. Fig. 97.

Indien eene lijn [BD] eenen hoek [CBA] van eenen driehoek [BCA] in twee gelijke deelen deelt, en tot op de overstaande zijde of de grondlijn [CA] verlengd wordt, zullen de stukken [AD, CD] van die overstaande zijde, of grondlijn, in de zelfde rede staan als de aangrenzende zijden [AB, BC] des driehoeks: en het vierkant van die zelfde lijn [BD], te samen met den regthoek uit de gemelde stukken [AD, DC] van de grondlijn, is gelijk aan den regthoek van de twee overige zijden [BA, BC].

EUCL. VI. 3. — St. VI. 3. — L. G. III. 17, 31.

BEREIDING. Voor het I. Men verlenge AB: en zij CE // BD.

BEWIJS. Men betoogt eerst uit den aard der evenwijdige lijnen, en uit I. 7. dat ∠ ECB = ∠ CEB, en dus (I. 28.) EB = CB: waaruit het bewijs volgt door het I. Voorstel van dit Boek.

BEREIDING. Voor het II. Stel ∠ DAF = ∠ ABF: verleng BD tot in F, en trek CF.

BEWIJS. Men betoogt uit het gegevene, en de bereiding, dat Δ ABF ∽ Δ DAF, om dat ∠ ABF = ∠ CBD, en dus in de ΔΔ CDB en FDA ook ∠ BCD = ∠ AFD, of ∠ AFB in den Δ ABF: en dus in de ΔΔ BFA en CBD wederom ∠ BAF = ∠ CDB. Waaruit door het X. Voorstel van dit Boek, door II. 1. Gev. 2. en wederom door het X. van dit Boek, de zaak bewezen wordt.

I. GEVOLG.

AD + DC of AC : AD = AB + BC : AB: dat is, de grondlijn tot een der stukken van dezelve, zoo als de som der zijden tot de zijde aan het gemelde stuk grenzende. En insgelijks het verschil der stukken tot het verschil der zijden, als een der stukken tot de aangrenzende zijde.

I. EN GEWIGTIGE AANMERKING. Fig. 101, 102. Het eerste gedeelte van dit Voorstel is de derde Propositie van het VI. Boek van EUCLIDES; doch het zelfde geldt ook voor den uitwendigen hoek CBE: dan valt de lijn BD, die den gemelden hoek CBE in twee gelijke deelen [EBD, en DBC] deelt, buiten de grondlijn CA: doch niet altijd aan den zelfden kant: want indien ∠ EBC = 2 ∠ BCA, en dus indien de Δ CBA gelijkbeenig is, zal BD // AC

 zijn,

zijn, en gevolgelijk zal die lijn de grondlijn A C niet snijden. Indien ∠ EBC < 2 ∠ BCA, zal de lijn BD naar CB hellen zoo als in Fig. 101: doch naar BA zoo ∠ EBC > 2 ∠ BCA, zoo als in Fig. 102.

Indien men dan in Fig. 101. CO // AB stelt, is DA: DC = AB : CO: maar ∠ BOC = ∠ OBE (I. 7.) en dus = ∠ OBC: dus (I. 28.) OC = BC:

en dus DA:DC = AB:BC.

En indien men in Fig. 102. AO // CB stelt, is

DA : DC = AO : BC:

maar ∠ AOB = ∠ CBQ = ∠ QBE = ∠ ABO: en dus (I. 28.) AO = BA: dus DA : DC = AB:BC.

Verder, men trekke in Fig. 101. QA zoodanig dat ∠ QAB = ∠ BDC: dan is

Δ DCB ∽ Δ BQA: want ∠ QBA = ∠ OBC;
∠ QAB = ∠ BDC: dus ∠ DCB = ∠ BQA:
waaruit volgt (IV. 2.)
DB : BC = BA : BQ: dus (Voorst. VIII. Gev. 5.)
Regth. uit BC, BA ∞ Regth. uit DB, BQ ∞ Regth.
uit DB, DQ — □ op DB (II. 1. Gev. 2.)
maar Δ DCB ∽ Δ DQA: dus
DB : DC = DA : DQ en
Regth. uit DB, DQ ∞ Regth. uit DC, DA:
dus:

I. Regth. uit BC, BA ∞ Regth. DC, DA — □ op DB.

Men stelle in Fig. 102. QC zoo dat ∠ QCB = ∠ BDA: dus is Δ QCB ∽ Δ BAD: waaruit volgt
DB : BA = BC : BQ en
Regth. uit BA, BC ∞ Regth. uit DB, BQ
∞ Regth. uit DB, DQ — □ DB (II. 1. Gev. 2.)
Maar Δ DBA ∽ Δ DQC: en dus
DB : DA = DC : DQ en
Regth. uit DB, DQ ∞ Regth. uit DA, DC.

II. En dus Regth. uit BA, BC ∞ Regth. uit DA, DC — □ op DB.

Uit het geen hier N°. I. en N°. II. bewezen is, blijkt, dat het tweede lid van ons Voorstel in dit geval het volgende wordt.

„ Het verschil tusschen het vierkant van die lijn en den
„ regthoek der stukken van de grondlijn, is gelijk aan
„ den regthoek der overige zijden.

Ons geheel voorstel, zoo wel op den inwendigen als op

op den uitwendigen hoek toegepast, wordt in den algemeensten zin het volgende:

„ Indien eene lijn eenigen hoek eens driehoeks, het zij „ eenen inwendigen het zij eenen uitwendigen, in twee „ gelijke deelen ſnijdt, en, zoo noodig verlengd zijnde, „ de tegenovergeſtelde zijde, of grondlijn, ontmoet; zul„ len de ſtukken door die lijn op de grondlijn gemaakt, „ in de zelfde rede tot elkander ſtaan als de aangrenzende „ zijden: en de ſom, of het verſchil, van het vierkant „ van die lijn en van den regthoek uit de gemelde ſtuk„ ken van de grondlijn, zal gelijk zijn aan den regthoek „ uit de overige zijden: de ſom namelijk, zoo de in„ wendige, het verſchil zoo de uitwendige hoek ge„ deeld is geweest.”

De Heer R. SIMSON heeft het eerste gedeelte van die eigenſchap voor den uitwendigen hoek als een belangrijk bijvoegſel op de derde Propoſitie des VI. Boeks van EUCLIDES voorgeſteld, doch hij heeft niets van het tweede gemeld (*Sect. Conicae Libr.* I. *pr.* 11. p. 36).

II. AANMERKING. De Heer REHUEL LOBATTO heeft mij het volgende, naar mijn inzien treffend, bewijs medegedeeld.

BEREIDING. Fig. 103*a*. Zij DB de lijn die den inwendigen hoek ABC in twee gelijke deelen deelt: rigt op BD in B de ⊥ FBG, die AC, zoo noodig verlengd, in G ontmoet. Trek AF en CL ⊥⊥ op FG en dus // BD.

BEWIJS. Voor het I. gedeelte. Dan is, om dat ∠ FBD = L = ∠ DBL en ∠ ABD = ∠ DBC: ook ∠ FBA = ∠ CBG en △ AFB ∽ △ CLB. Verder om dat ∠ EBG = ∠ FBA = ∠ CBG; wordt de uitwendige hoek EBC in twee gelijke deelen gedeeld door de lijn BG welke loodregt ſtaat op de lijn BD die den inwendigen hoek in twee gelijke deelen verdeelt. Nu is, om dat △ AFB ∽ △ CLB, AF : CL = AB : BC: maar (Voorſt. I. Gev. 2. en Voorſt. II.) AD : DC = AF : CL: en AG : CG = AF : CL: derhalve

Voor den inwendigen hoek AD : DC = AB : BC en voor den uitwendigen: AG : CG = AB : BC.

BEWIJS. Voor het II. gedeelte. Men trekke BH ⊥ op AC: dan is in de △△ ABH en HBC door II. 16. Gev. 4. □ op AB − □ op BC ∞ □ op AH − □ op HC: derhalve (II. 10.)

Rh. uit [AB + BC] en [AB − BC] ∞ Rh. uit [AH + HC] en [AH − HC] ∞ Rh. uit AC en [AC − 2 HC]. Zoo dat 1°. (Voorſt. VIII. Gev. 5.) AC : AB + BC = AB − BC : AC − 2 HC. Tot dus verre zoo wel voor den inwendigen als voor den uitwendigen hoek: maar nu

Voor den inwendigen hoek: AB : BC = AD : DC en dus AD + DC : AB + BC = DC : BC: d. i. AC : AB + BC = DC : BC: en derhalve AB − BC : AC − 2 HC = DC : CB: gevolgelijk Rh. uit AB en BC − □ op BC ∞ Rh. uit AC . DC − 2 Rh. uit DC . HC: of Rh. uit AB en BC ∞ □ op BC + Rh. uit [AD + DC] en DC − 2 Rh uit DC . CH ∞ □ op BC + Rh. uit AD . DC + □ op DC − 2 Rh. uit DC . CH.

Maar in Δ DBC is □ op BC + □ op DC − 2 Rh. uit DC . CH ∞ □ op BD (II. 19): derhalve 2°. Rh. uit AB en BC ∞ □ op BD + Rh. uit AD en DC.

Voor den uitwendigen hoek is AB : BC = AG : GC derhalve AG − GC : AB − BC = GC : BC: dus AC : AB − BC = GC : BC dus uit 1°. AB + BC : AC − 2 HC = GC : BC: en Rh. uit AB en BC + □ op BC ∞ Rh. uit AC . GC − 2 Rh. uit HC . CG: ∞ Rh. uit [AG − GC] en GC − 2 Rh. uit HC . CG ∞ Rh. uit AG en GC − □ op GC − 2 Rh. uit HC . CG: en dus Rh uit AB en BC ∞ Rh. uit AG en GC − [□ op BC + □ op GC + 2 Rh. uit HC . CG]. Maar (uit II. 19) is in Δ CBG, □ op BC + □ op CG + 2 Rh. uit HC . CG ∞ □ op BG: derhalve Rh. uit AB en BC ∞ Rh. uit AC en CG + □ op BG.

III. AANMERKING. Fig. 97*a*. Indien de driehoek BCA regthoekig is in C: en de hoek CBA wordt door BD in twee gelijke deelen, ∠ CBD en ∠ DBA, gedeeld; is AC : CD = BC + BA : BC: en daar AB > CB; is AD > CD; dus AC > 2 CD: terwijl ∠ CBA = 2 ∠ CBD: derhalve AC : CD > ∠ ABC : ∠ CBD. Indien nu ∠ ABE = ∠ CBA; is insgelijks CE : AC > ∠ CBE : ∠ CBA: en derhalve CE : CD > ∠ CBE : ∠ CBD. De lijnen CD, CA, CE, die de hoeken CBD, CBA, CBE op de grondlijn CE des regthoekigen driehoeks bespannen, groeijen derhalven in grootere rede aan dan de hoeken zelve: en daar uit is op te maken, het geen trouwens nader, en uit geheel andere gronden, in VIII. 26. zal bewezen worden, dit

II. GEVOLG.

Indien uit eenen der hoeken eens regthoekigen driehoeks, op de overstaande regthoekszijde lijnen getrokken worden: zullen de stukken die dezelve daarvan, van den regten hoek te beginnen, afsnijden, in grootere rede aangroeijen dan de hoeken die zij zelve met de andere regthoekszijde maken.

IV.

IV. AANMERKING. PAPPUS vooronderstelt dit Voorstel in het bewijs van het I. Voorstel des vijfden Boeks zijner *Collectiones Mathematicae*, en het is aldaar in den *Commentarius* van COMMANDINUS door dezen bewezen geworden.

XIII. VOORSTEL. Fig. 103.

De lijnen [CE, AF], die uit twee hoeken [C en A] van eenen driehoek [CAG] op de tegenovergestelde zijden [AG en CG] getrokken worden, en dezelve in twee gelijke deelen snijden, ontmoeten elkander in een stip [D] dat op twee derde gedeelten is van iedere lijn, van den top af te rekenen: en indien men uit den derden hoek [G] door dat stip [D] eene lijn [GB] op de derde zijde [CA] trekt, zal zij ook die zijde in twee gelijke deelen snijden: zoo dat de drie lijnen, welke, uit de drie hoeken getrokken, de tegenoverstaande zijden in twee gelijke deelen snijden, elkander in één stip, dat op twee derde gedeelten van iedere lijn geplaatst is, ontmoeten.

VOOR HET I. GEDEELTE: BEREIDING. Men stelle FY // AG.

BEWIJS. Men bewijst uit het II. Voorstel van dit, en het IV. van het III. Boek dat FY de helft is van EG, dus ook van AE; en men gaat voort uit de gelijkvormige driehoeken ADE, YDF, om te toonen dat AD = 2 DF.

VOOR HET II. GEDEELTE. BEREIDING. Men stelle FR // CA.

BEWIJS. Men bewijst, even als in het voorgaande, dat CB = $\frac{1}{2}$ RF, en men gaat voort uit de gelijkhoekige driehoeken ADB en RDF, waaruit het besluit volgt.

AANMERKING. Dit Voorstel is van veel nut in de Natuurkunde, daar het dient om het zwaarte-middelpunt eens driehoeks te bepalen, het welk in het stip D zelf valt.

XIV. VOORSTEL. Fig. 104.

Indien men uit twee hoeken (G, C) eens driehoeks [CAG] loodregte lijnen [GB, CE], op de tegenoverstaande zijden [CA, AG] trekt, zullen zij zich, binnen of buiten den driehoek, in éénig stip D ontmoeten, naar mate de hoeken des driehoeks alle scherp zijn, of niet; indien men verder uit den derden hoek [A] door dat stip [D] eene lijn AF op de derde zijde [CG] trekt, zal deze ook loodregt op die zijde staan.

BEWIJS. $\triangle CBD \backsim \triangle CAE \backsim \triangle GBA$: dus
CB : BD = BG : BA.
of, CB : BG = BD : BA.

 en

IV. GEVOLG. Fig. 105.

Indien men in den regthoekigen driehoek ACB de loodlijn CD uit den regten hoek neergelaten verlengt, tot dat de zelve de lijn AF, uit A loodregt op CA getrokken in F ontmoet, zullen AD en CD middel-evenredige zijn, tusschen DF en DB:

want DF : AD = AD : DC
en AD : DC = DC : BD: dus
∺ DF; AD, DC, BD.

V. AANMERKING. Indien er dan een middel was, om, wanneer DF en DB regthoekig op elkander geplaatst zijn, de lijnen AF, AC, CB zoodanig te trekken, dat AF en AC om A in de verlenging van de lijn BD, en AC en BC om C in de verlenging van DF regte hoeken zouden maken, zoude het beroemd vraagstuk om *twee middel-evenredigen* tusschen twee gegeven lijnen te vinden, geometrisch opgelost zijn: doch dit is onmogelijk. PLATO (*a*) heeft echter een middel uitgedacht, om zulks door twee winkelhaken werktuigelijk te doen; en dit middel is slechts eene toepassing van dit gevolg: zie onze II. Aanmerking op het IX. Werkstuk van het III. Boek.

V. GEVOLG.

Indien men uit B, BI loodregt op AB stelt, en uit I, IL loodregt op ACI, zullen AB, AI, twee middel evenredige zijn tusschen AC en AL: want uit het tweede Gevolg is

AC : AB = AB : AI
AB : AI = AI : AL
en dus ∺ AC, AB, AI, AL.

VI. AANMERKING. Hierop steunt een instrument door CARTESIUS (*b*) uitgedacht, om twee of meerdere middel-evenredige tusschen twee gegeven lijnen te trekken: ik zeg twee *of meerdere*: want men kan met het trekken van loodlijnen op AL en AI, op de zelfde wijze voortgaan zoo ver men wil, en er zullen altijd gelijkvormige driehoeken ontstaan.

(*a*) Zie EUTOCIUS: *Comm. ad prop. 2 Lib. II.* ARCHIMEDIS *de Sphaera et Cylindro.*
(*b*) *Geometria Lib. II. in initio et Lib. III. in initio.*

V.

II. AFDEELING.

OVER LIJNEN IN UITERSTE EN MIDDELSTE REDE GESNEDEN.

IV. BEPALING. Fig. 107.

Eene lijn [AB] wordt gezegd in *uiterste* en *middelste* rede gesneden te zijn, als de geheele lijn [AB] tot het grootste deel [AC] de zelfde rede heeft als het grootste deel [AC] tot het kleinste [CB].

EUCL. VI. Bep. 3. — St. VI. Bep. 3.

I. AANMERKING. Indien men het 6. Gevolg van het VIII. Voorstel op deze Bepaling toepast zal het blijken, dat eene lijn in *uiterste* en *middelste rede* gesneden, die is waarin het vierkant op het grootste stuk van gelijken inhoud is als de regthoek uit de beide stukken: en hieruit wordt afgeleid dit

GEVOLG.

Eene lijn in uiterste en middelste rede te snijden, is het zelfde, als eene lijn zoodanig te snijden, dat het vierkant van het grootste stuk [AC] gelijk is aan den regthoek uit de geheele lijn [AB] en het kleinste stuk [BC].

II. AANMERKING. Wij hebben reeds in de XXV. en XXVI. Voorstellen van het II. Boek van zoodanige lijn gewag gemaakt: en verder in de Aanmerking op het XXV. tot het X. Werkstuk van het eerste Boek der Werkstukken verwezen, om eene lijn zoodanig (en dus in uiterste en middelste rede) te snijden.

III. AANMERKING. De Ouden hadden veel op met het snijden eener lijn in uiterste en middelste rede: zij noemden die snede de *goddelijke snede*, of ook wel, bij uitsluiting, *de snede*. En in de daad de eigenschappen daarvan zijn opmerkelijk. EUCLIDES heeft in de zes eerste Voorstellen van zijn XIII. Boek over dezelve gehandeld: wij zullen, om den leergierigen lezers dienst te doen, en ze aan den trant der Ouden te gewennen, die Voorstellen opgeven, met de eigen woorden van EUCLIDES, dezelve bewijzen, en dat geen bijvoegen wat wij zullen oordeelen te behoren. Wij moeten enkel hier herinneren, het geen wij reeds

(II.

(II. Boek, Bep. 5. Gev. 2. Aanm. 5.) gezegd hebben: dat „ de *magt* van eene lijn:" of „ eene lijn te famen met eene „ andere *kan*," wil zeggen, het vierkant op die lijn, of op de fom dier twee lijnen, gemaakt.

XVI. VOORSTEL. Fig. 106.

Indien eene lijn [BA] in uiterfte en middelfte rede gefneden is, en men voegt aan dezelve een ftuk [AD] gelijk aan het grootfte ftuk [AC]; zal de geheele aldus verlengde lijn [BD] ook in uiterfte en middelfte rede gefneden zijn, en de gegeven lijn [BA] zal er het grootfte ftuk van zijn.

EUCL. XIII. 5.

BEWIJS. Zij L de gegeven lijn, G het grootfte, K het kleinfte ftuk; zoo dat G + K = L en L + G de verlengde lijn. Dan is L : G = G : K (Bep. 4) en derhalve *componendo*, L + G: L = G + K : G: dat is L + G : L = L : G: of [Fig. 106.] BD : BA = BA : AD.

I. AANMERKING. Indien men uit L : G = G : K, *dividendo* befluit, heeft men L — G: G = G — K : K: dat is K : G = G — K : K: of G : K = K: G — K. Dat is [Fig. 107] indien BE = AC; AC: EA = EA: CE: het geen dit Voorftel geeft. „ Indien men van eene lijn, „ in uiterfte en middelfte rede gefneden, uit het uiteinde „ dat aan het kleinfte ftuk grenst, een ftuk affnijdt gelijk „ aan het grootfte ftuk; zal het aldus afgefneden, of het „ grootfte, ftuk [BE] daardoor in uiterfte en middelfte „ rede gefneden zijn: en het kleinfte ftuk [BC] van de „ gegeven lijn, zal het grootfte zijn van de aldus vermin„ derde lijn [BE]."

II. AANMERKING. Men hadt ook aldus kunnen redeneeren: te weten, na den laatften regel van het bewijs in de voorgaande Aanmerking, of na G — K: K = K: G zoude men voor G hebben kunnen ftellen, L — K, en dan hadt men G — K: K = K: L — K: dat is, in Fig. 108. zoo AF = BC; is CF : BC = BC : BF : waaruit dit Voorftel: „ Indien eene lijn in uiterfte en middelfte rede „ gefneden is, en men van het grootfte deel (aan het uit„ einde van de lijn te beginnen) een ftuk affnijdt gelijk „ aan het kleinfte ftuk, zal het overfchot ook in uiterfte „ en middelfte rede gefneden zijn; en het kleinfte ftuk van „ de gegeven lijn, zal nu het grootfte ftuk zijn."

III. AANMERKING. Het blijkt dan dat, wanneer men eens eene

lijn heeft, die in uiterste en middelste rede gesneden is, men er altijd zoo wel grootere en grootere, als kleinere en kleinere, zoo veel men wil, vinden kan: men heeft slechts aan de gegeven lijn een stuk te voegen gelijk aan het grootste stuk, of er een stuk van aftetrekken gelijk aan het kleinste: en gedurig aldus met iedere der lijnen die als dan geboren worden voort te gaan.

IV. AANMERKING. Om dat men (volgens de II. Aanmerking) heeft G — K: K = K: G; en uit de bepaling K: G = G: L: is G — K: K = G: L; of = G: G + K: en dus [G — K], [G + K] = K.G of $G^2 - K^2$ = K.G: het geen dit Voorstel geeft. „ Indien eene lijn in uiterste en „ middelste rede gesneden is, is het verschil der vierkan- „ ten op de stukken, gelijk aan den regthoek uit dezelve."

XVII. VOORSTEL.

Indien twee lijnen, beide, in uiterste en middelste rede gesneden zijn, zijn zij in de zelfde rede gesneden: dat is hare deelen zijn onderling evenredig.

EUCL. XIV. 2: of volgens andere, XIV. 7. en PAPPUS *Col. Math.* V. 44.

BEWIJS. Laat ons de lijnen door L en *l*, de grootste stukken door G en *g* en de kleinste door K en *k*, kortheidshalve, uitdrukken.

Dan is □ op G ∞ Regth. uit L en K: en □ op *g* ∞ Regth. uit *l* en *k*: derhalve □ op G: Regth. uit L en K = □ op *g*: Regth. uit *l* en *k*: en □ op G: 4 Regth. uit L en K = □ op *g*: 4 Regth. uit *l* en *k* en *componendo* □ op G + 4 Regth. uit L en K: □ op G = □ op *g* + 4 Reght. uit *l* en *k*: □ op *g*: maar [II. 7.] □ op G + 4 Regth. uit L en K ∞ □ op [L + K]; en □ op *g* + 4 Regth. uit *l* en *k* ∞ □ op [*l* + *k*]: gevolgelijk □ op [L + K]: □ op G = □ op [*l* + *k*]: □ op *g*: en derhalve L + K: G = *l* + *k*: *g*: en *dividendo* [L — G] + K: G = [*l* — *g*] + *k*: *g*; of 2 K: G = 2 *k*: *g* of K: G = *k*: *g*: en K + G: K of G = *k* + *g*: *k* of *g*: dat is L: G of K = *l*: *g* of *k*.

I. AANMERKING. Dit bewijs is van EUCLIDES: doch het Voorstel kan korter bewezen worden uit de wijze waarop zoodanige lijn gesneden wordt, d. i. uit II. 25. Dat Fig. 68*a*. AB en EB twee lijnen zijn in uiterste en middelste rede

in

in M en C gesneden: dan is uit de bereiding AG: BG = ED: BD of AG: GH = ED: DF en AG — GH: AG = ED — DF: ED: d. i. AH: AG = EF: ED; of AC: AB = EM: EB.

II. AANMERKING. De rede der geheele lijn tot de stukken is dan voor alle de lijnen bestendig de zelfde. Het deelen van eene lijn in uiterste en middelste rede wordt tot het oplossen van verscheide Werkstukken gevorderd: men zoude dus verwagten eene zoodanige lijn op de *proportionaal-passers* te vinden, en echter zijn er maar zeer weinige waarop er eene onder dien naam gesneden is: op de meeste staat zij niet: maar dit gemis is slechts schijnbaar: zij is er in de daad; want wij zullen in het VI. Boek, Voorstel XXI. zien, dat als men den radius van den cirkel in uiterste en middelste rede snijdt, het grootste stuk de zijde is van den tienhoek in den cirkel beschreven. Men neme dus op den *proportionaal-passer* de zijde van den zeshoek, (d. i. den *radius*) voor de geheele lijn; de zijde van den tienhoek geeft het grootste stuk.

XVIII. VOORSTEL.

Indien eene lijn in uiterste en middelste rede gesneden is; *kan* het grootste stuk te samen met de helft van de geheele lijn, het vijfvoud van het vierkant der halve lijn.

EUCL. XIII. 1.

UITLEGGING. Fig. 107. Dat is □ op (AC + ½ AB) ∞ 5 □ op ½ AB.

I. BEWIJS. Uit de onderstelling □ op AC ∞ Regth. uit AB en BC, dat is ∞ Regth. uit AB (en AB — AC) ∞ □ op AB — Regth. uit AB . AC (II. 5).

derhalve □ op AC + Regth. uit AB . AC ∞ □ op AB:

en □ op AC + Regth uit AB . AC + □ op (½ AB)
∞ □ op AB + □ op ½ AB.
∞ 5 □ op (½ AB).

of: □ op AC + 2 Regt. uit AC en ½ AB + □ op (½ AB)
∞ 5 □ op (½ AB):

d. i. door II. 5. □ op (AC + ½ AB) ∞ 5 □ op (½ AB).

II. BEWIJS. Uit de constructie (Fig. 68*a*.) en II. 25.

□ op AG ∞ □ op AB + □ op BG.
∞ 5 □ op ½ AB.

Maar □ op AG ∞ □ op (AH + HG) ∞ □ (op AC + ½ AB): dus □ op (AC + ½ AB) ∞ = 5 □ op ½ AB.

I. AANMERKING. Indien men dit laatste op de nieuwste wijze uitdrukt is

$$\overline{AC + \tfrac{1}{2} AB}^2 = \frac{5 \overline{AB}^2}{4}$$

en dus $AC + \tfrac{1}{2} AB = \frac{AB}{2} \times \sqrt{5}$:

en dus $AC = \frac{AB}{2} \sqrt{5} - \tfrac{1}{2} AB$: het geen juist de wijze oplevert om eene lijn in uiterste en middelste rede te snijden (I. Boek, Werkstuk 10).

II. AANMERKING. Dit geeft ook $AC = \tfrac{1}{2} AB (\sqrt{5} - 1)$:
en dus $BC = AB - \tfrac{1}{2} AB (\sqrt{5} - 1) = \frac{AB}{2} (2 - \sqrt{5} + 1)$

$= \frac{AB}{2} (3 - \sqrt{5})$.

Waaruit volgt $AC : BC = \sqrt{5} - 1 : 3 - \sqrt{5}$: het geen ook bewijst dat die snede bestendig voor alle lijnen de zelfde is.

XIX. VOORSTEL.

Indien eene lijn in uiterste en middelste rede gesneden is, is ieder stuk *onmeetbaar*, en wordt *apotome* genaamd.

EUCL., XIII. 6.

BEWIJS. Uit Aanm. 2. op Voorst. XVIII. is $G = \tfrac{1}{2} L (\sqrt{5} - 1)$ en $K = \tfrac{1}{2} L (3 - \sqrt{5})$: dus beide onmeetbaar ten opzigte der geheele lijn, en onderling.

Doch EUCLIDES noemt *apotome* (X. 74.) het verschil van twee grootheden die onmeetbaar zijn in lengte, doch meetbaar in magt, zoo als hier $\sqrt{5}$ het is ten opzigte van 1 en 3, want de vierkanten 5, 1, 9 zijn meetbaar.

XX. VOORSTEL. Fig. 109.

Indien eene lijn KI het vijfvouwd *kan* van haar deel BK, en het dubbeld BD van dat deel in uiterste en middelste rede gesneden wordt, zal het grootste stuk daarvan gelijk zijn aan het overschot BI van de eerstgemelde lijn KI.

EUCL. XIII 2.

BEWIJS. Uit de onderstelling is $KI = BK \sqrt{5}$: dus
$BI = KI - BK = BK \sqrt{5} - BK = BK (\sqrt{5} - 1)$.

Maar zoo $BD = 2 BK$ in uiterste en middelste rede gesneden wordt, is het grootste deel $= \tfrac{1}{2} BD (\sqrt{5} - 1) = BK (\sqrt{5} - 1)$. Zie het voorgaande Voorstel. Dus is dat grootste deel gelijk aan BI.

XXI. VOORSTEL.

Indien eene lijn L in uiterste en middelste rede gesneden is, *kan* het kleinste deel [K] met de helft van het grootste [G] het vijfvoud van het vierkant op de helft van het grootste deel G.

EUCL. XIII. 3.

BEWIJS. Daar $K : G = \frac{1}{2} L (3 - \sqrt{5}) : \frac{1}{2} L (\sqrt{5} - 1)$. (Voorst. XVIII. Aanm. 2).

is $K : G = 3 - \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1$ en dus (III. 5.)

$$K = \frac{G (3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1} \text{: en}$$

$$K + \tfrac{1}{2} G = \tfrac{1}{2} G \left(1 + \frac{2 (3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} G \left(\frac{\sqrt{5} - 1 + 6 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} G \frac{(5 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1} = \tfrac{1}{2} G. \sqrt{5}.$$

Derhalve □ op $(K + \frac{1}{2} G)$ ∞ 5 □ op $(\frac{1}{2} G)$.

XXII. VOORSTEL.

Indien eene lijn [L] in uiterste en middelste rede gesneden is, is de som der beide vierkanten op het kleinste deel [K] en op de geheele lijn [L] het drievoud van het vierkant op het grootste deel [G].

EUCL. XIII. 4.

BEWIJS. Uit Voorst. XVIII. Aanm. 2. is

$$K = \tfrac{1}{2} L (3 - \sqrt{5})$$

en dus $K^2 = \frac{1}{4} L^2 (9 - 6 \sqrt{5} + 5) = \frac{1}{4} L^2 (14 - 6 \sqrt{5})$

en $K^2 + L^2 = \frac{1}{4} L^2 (18 - 6 \sqrt{5})$

Maar uit Voorst. XVIII. Aanm. 2. is

$$L = \frac{2 G}{\sqrt{5} - 1} \text{: dus } L^2 = \frac{4 G^2}{(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{4 G}{6 - 2 \sqrt{5}}\text{:}$$

$$\text{en dus } K^2 + L^2 = G^2 \times \frac{(18 - 6 \sqrt{5})}{6 - 2 \sqrt{5}} = 3 G^2.$$

III.

III. AFDEELING.

OVER DE GELIJKVORMIGE VEELHOEKEN.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 87.

Indien veelhoeken [M en N] die uit een gelijk getal zijden bestaan, door diagonalen [AC, AD en FH, FI], uit eenen der hoeken [A en F], naar de andere hoeken getrokken, in driehoeken [BAC, CAD, DAE en GFH, HFI, IFK] gedeeld worden; zullen de veelhoeken gelijkvormig zijn, zoo de driehoeken twee aan twee en in hunnen rang genomen gelijkvormig zijn [namelijk △ BAC ∽ △ GFH, △ CAD ∽ △ HFI; △ DAE ∽ △ IFK.

St. VI. 15 en Gevolg. — L. G. III. 16. *Scholie.*

BEWIJS. Uit de gelijkheid der hoeken in de driehoeken, wordt de gelijkheid der eveneens geplaatste hoeken in de beide veelhoeken bewezen: dat het eerste is.

Uit de evenredigheid der zijden in de driehoeken, wordt de evenredigheid der eveneensstaande zijden in de veelhoeken afgeleid, dat het tweede is.

AANMERKING. Dit moet bewezen worden om aantetoonen, dat er gelijkvormige veelhoeken zijn kunnen, en hoe men dezelve beschrijven kan. Zie het II. Werkstuk van het IV. Boek.

I. GEVOLG.

Wanneer twee driehoeken gelijkvormig zijn, zullen de parallelogrammen welke voor diagonalen eene der zijden van die driehoeken hebben, en dus het dubbeld van die driehoeken zijn, ook gelijkvormig zijn: en derhalve heeft alles wat van de gelijkvormige, of gelijkhoekige, driehoeken bewezen is, ook voor de gelijkvormige parallelogrammen plaats.

II. GEVOLG. Fig. 52.

De parallelogrammen die om de diagonaal van een parallelogram staan, zijn onderling en aan het geheel parallelogram waartoe zij behoren gelijkvormig.

EUCL. VI. 24 — St. VI. 20.

XXIV. VOORSTEL. Fig. 87.

Gelijkvormige veelhoeken [M en N] worden door diagonalen, als deze op eene gelijkvormige wijze getrokken zijn, in gelijkvormige driehoeken gedeeld: en de inhouden dier veelhoeken ſtaan tot elkander als de vierkanten op hunne eveneensſtaande zijden, of in de verdubbelde rede van die zijden.

EUCL. VI. 20. — St. VI. 16. — L. G. III. 26, 27.

BEWIJS. Voor het I. Uit het IV. Voorſtel.

Voor het II. Uit de beſchouwing dat de veelhoeken tot elkander ſtaan als de ſommen hunner driehoeken: dat deze driehoeken tot elkander ſtaan als de vierkanten hunner eveneensſtaande zijden, en dus als die der eveneensſtaande zijden van de veelhoeken: waaruit het Voorſtel volgt door het XIII. Voorſtel van het III. Boek.

I. AANMERKING. Men kan thans het 2, 3, 4, 5, 6 en 7 Werkſtuk van het IV. Boek oplosſen.

I. GEVOLG.

Zoo vier lijnen evenredig zijn, ſtaan de vierkanten op dezelve beſchreven in verdubbelde rede dier lijnen: en gevolgelijk komt het geometriſch vierkant overeen met de verdubbelde rede, en men kan de *arithmetiſche quadraten*, of *tweede magten* der getallen, welke de lengte van eenige lijnen uitdrukken, in plaats der geometriſche vierkanten gebruiken Zie III. Boek XVIII. Bepaling: en hier boven IX. Voorſtel, het 5. Gevolg.

KOENIG op EUCL. VI. 20.

II. GEVOLG.

Uit dit Voorſtel, op parallelogrammen toegepast, en vergeleken met de 2. Aanmerking op het IX. Voorſtel, blijkt, in welken zin EUCLIDES gezegd heeft, in de XVIII. propoſitie van zijn VIII. Boek, dat „ gelijkvormige vlakke getallen tot „ elkander ſtaan in verdubbelde rede van de eveneensſtaande „ zijden, en (pr. XXVI.) dat zij tot elkander ſtaan als een „ quadraat-getal tot een quadraat-getal."

III. GEVOLG.

Zoo drie lijnen gedurig evenredig zijn, ſtaat de Figuur op de eerſte, tot de gelijkvormige Figuur op de tweede,

zoo

zoo als de eerste lijn tot de derde lijn, (XV. Voorstel van het III. Boek).

TACQUET op EUCLIDES VI. 20. Cor. 2.

II. AANMERKING. Op dit Voorstel steunen, op de proportionaal-passers van Fransch maaksel, de lijnen welke den naam dragen van *les Plans*. Zij staan niet op de passers van Engelsch maaksel: men vindt ze op eenige andere, ook wel onder den tijtel van *Geometria*. Zij dienen om, wanneer men eene gegevene figuur moet vergrooten of verkleinen, de zijde te vinden van de figuur, die aan de gegevene gelijkvormig en tevens daarvan het gevraagde veelvoud, of deel, zijn zal. Daarom gaan de deelen op die lijnen in eene geometrische rede: daar bijv. de afstand van o tot 90 het drievouwd, die van o tot 40 het dubbeld is van dien van o tot 10: zijn die getallen 90, 40, 10, of 9, 4, 1 in de verdubbelde rede van 3, 2, 1: dat is in die rede welke de gelijkvormige figuren onderling hebben, als zij op lijnen geplaatst worden die onderling zijn als 3, 2, 1 Indien men dan eene figuur maken wil die het negenvoud is van eene andere, stelle men de punten des passers, welke eene zijde van die figuur bevatten, op de zelfde getallen op de twee bladen; bijv. van 10 tot 10: dan zal de afstand van 90 tot 90 de eveneensstaande zijde geven voor de te vervaardigen figuur. Indien men eene figuur maken moet die het $\frac{1}{6}$ gedeelte van eene gegevene is; stelle men de punten des passers op de zelfde getallen op beide de bladen: bijv. van 96 tot 96; neme het $\frac{1}{6}$ van dat getal of 16; en plaatse de punten des passers van 16 tot 16: men heeft de eveneensstaande zijde voor de figuur die het $\frac{1}{6}$ is van de gegevene: en welke zijde zal staan tot de zijde der gegevene als $\sqrt{\frac{1}{6}} : 1 = 1 : \sqrt{6}$.

XXV. VOORSTEL.

Zoo vier lijnen evenredig zijn, zullen de gelijkvormige en eveneens geplaatste figuren op de eerste en tweede lijn, in de zelfde rede staan als de gelijkvormige en eveneens geplaatste figuren op de derde en vierde: — en omgekeerd: — Zoo twee gelijkvormige figuren in de zelfde rede zijn als twee andere gelijkvormige figuren, zullen de eveneens geplaatste lijnen waar op deze figuren gesteld zijn, evenredig zijn.

EUCL. VI. 22. — St. VI. 18.

I. BEWIJS. Volgens EUCLIDES: A, B, C, D, zijn de vier lijnen.

VOOR HET I. GEDEELTE. BEREIDING. Stel *b* derde evenredige aan A en B: en *d* derde evenredige aan C en D.

BEWIJS. A : B = B : *b* } Bereiding.
C : D = D : *d* }
A : B = C : D
dus B : *b* = D : *d*
en A : C = *b* : *d*
of A : *b* = C : *d*
Maar Fig. op A: Fig. op B = A : *b* } XXIV. Voorst.
Fig. op C: Fig. op D = C : *d* } Gev. 3.
dus Fig. op A: Fig. op B = Fig. op C: Fig. op D.

VOOR HET II. BEREIDING. Stel A : B = C : *d*.

BEWIJS. □ op A : □ op B = □ op C : □ op *d*: door het
en □ op A : □ op B = □ op C : □ op D, XXIV Voorst.
dus □ op *d* = □ op D en *d* = D.
dus A : B = C : D.

AANMERKING. Dit Bewijs van EUCLIDES, dat wij voor het tweede gedeelte wat eenvoudiger voorgesteld hebben, is zeer fraai, en ten vollen geometrisch.

II. BEWIJS. VOOR HET I. Uit het XXIV. Voorstel, deszelfs 1. Gevolg, en het 1. Gev. van het X. Voorstel van het III. B.

VOOR HET II. Uit het 1 Gevolg van het X. Voorstel van het III. Boek: 1. Gevolg van het XXIV. van dit Boek.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 110.

In alle regthoekige driehoeken is de figuur op de schuinsche zijde gelijk aan de som der beide gelijkvormige en eveneensgeplaatste figuren die op de regthoekszijden staan.

EUCL. VI. 31. — St. VI. pr. 30. Gev.

BEWIJS. Uit het XXV. Voorstel; III, 8: het XXV. Voorstel: III, 11: II, 16: en III. *Axioma* 3.

I. AANMERKING. Het Voorstel van PYTHAGORAS (II. Boek XVI. Voorstel) is slechts een bijzonder geval van dit Voorstel: ook hangen zij beide van eene meer algemeene eigenschap der driehoeken af, zoo als wij dit reeds in de II. Aanmerking op het XVI. en in het XX. Voorstel met deszelfs Gevolgen van het II. Boek gezegd hebben.

II. AANMERKING. Men kan thans het 8. Werkstuk van het IV. Boek oplossen.

XXVII.

XXVII. VOORSTEL.

Alle regelmatige veelhoeken, die uit een evengroot getal zijden bestaan, zijn gelijkvormig aan elkander; en hunne inhouden zijn als de vierkanten der eveneensstaande zijden, of der stralen, of der loodlijnen; dat is, in verdubbelde rede dier zijden, stralen, of loodlijnen.

L. G. IV. 8.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit het XXIII. Voorstel; en den aard der gelijkvormige veelhoeken.

VOOR HET II. Uit het XXIV. en XI. Voorstel.

GEVOLG. Fig. 80, 81 en 82.

Dus zijn de veelhoeken, waarvan wij in het XXXV, XXXVI, XXXVII en XXXVIII. Voorstel van het II. Boek gewag gemaakt hebben, gelijkvormig aan de veelhoeken in welke zij staan: en in het geval van het XXXVIII. Voorstel [Fig. 82.], zal de veelhoek E F G I L, in omtrek en in inhoud, de kleinste zijn die hij zijn kan, wanneer de stippen E, F, G, I, L, op het midden der zijden A D, D C, C B, B Q, Q A staan: want dan is de straal O E loodregt op A D, en dus de kortste lijn.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 81 en 82.

De omtrekken der regelmatige veelhoeken, die uit een gelijk getal zijden bestaan, maar op ongelijke lijnen beschreven zijn, staan tot elkander zoo als hunne stralen, of loodlijnen.

BEWIJS. Uit den aard der veelhoeken; namelijk uit het 2 Gevolg van de 11 Bepaling van het II. Boek, en het II. Voorstel, Gev. 2. van dit Boek.

GEVOLG.

In alle regelmatige veelhoeken, die uit het zelfde getal zijden bestaan, is de rede van den omtrek tot de loodlijn, of tot den straal, bestendig de zelfde.

XXIX. VOORSTEL.

Verschillende regelmatige veelhoeken staan tot elkander in samengestelde rede hunner omtrekken en loodlijnen.

BEWIJS. Uit het XXXIX. Voorstel van het II. B. en uit het VII. Voorstel van dit Boek.

GEVOLG.

Dus, indien de omtrekken gelijk zijn, zijn de inhouden als de loodlijnen: en indien de inhouden gelijk zijn, ftaan de omtrekken in omgekeerde rede der loodlijnen, (III. Axioma 4: en III, 5).

XXX. VOORSTEL. Fig. III.

Van twee regelmatige veelhoeken [ABDEF en GOKLMN] wier omtrekken gelijk zijn, heeft die [GOKLMN] de grootfte loodlijn [PQ] welke de meeste zijden heeft.

BEREIDING. Men ftelle de omtrekken van beide, die toch gelijk zijn, uitgedrukt te worden door O: het getal der zijden door *m* en *n*, zoo dat $m > n$: Trek CI en PQ ⊥⊥; dan is FE $= \frac{O}{n}$, GN $= \frac{O}{m}$: en derhalve FE > GN en FI > GQ. Neem RI = GQ. Trek RC. CI en PQ zijn de loodlijnen. ∠ FCE is > ∠ GPN en dus ook ∠ FCI > ∠ GPQ.

BEWIJS. FI : GQ $= \frac{O}{n} : \frac{O}{m} = \frac{4L}{n} : \frac{4L}{m}$; maar ∠ FCI : ∠ GPQ $= \frac{4L}{n} : \frac{4L}{m}$: derhalve FI : GQ of RI = ∠ FCI : ∠ GPQ. Maar (XII. Gev. 2.) FI : RI > ∠ FCI : ∠ RCI: en dus ∠ FCI : ∠ GPQ > ∠ FCI : ∠ RCI: derhalve ∠ GPQ < ∠ RCI: en om dat ∠ RIC = L = ∠ GQP is de derde ∠ PGQ > ∠ CRI. Gevolgelijk indien men in R maakt ∠ IRS = ∠ QGP, zal het been RS boven het been CR vallen: en dus zal het ftip S de lijn IC, verlengd, boven C fnijden: zoo dat SI > CI: maar SI = PQ: derhalve PQ > CI.

XXXI. VOORSTEL. Fig. III.

Van twee regelmatige veelhoeken die gelijke omtrekken hebben heeft die den grootften inhoud die de meeste zijden heeft.

PAPPUS *Col Mathem.* V. 1. — L. G. IV. *Appendix*, *pr.* 7.

BEWIJS. Uit Voorft. XXIX. Gev. en Voorft. XXX.

GEVOLG.

Indien dus een gelijkzijdige driehoek, een vierkant, en een regelmatige zeshoek gelijken omtrek hebben, is de inhoud van den zeshoek grooter dan die van het vierkant, en die van het vierkant grooter dan die van den driehoek.

BE-

BEREKENING. Fig. 83. De loodlijn CX in den zeshoek PQRSTU $= \sqrt{CR^2 - RX^2} = \sqrt{RS^2 - \frac{1}{4} RS^2} = \sqrt{\frac{3}{4} RS^2} =$

$RS \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{O}{6} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = O \times \sqrt{\frac{3}{4 \times 36}} = O \times \sqrt{\frac{1}{48}}$, indien O den omtrek aanduidt.

De loodlijn in het vierkant is de helft van de zijde, dus hier $\frac{O}{8} = O \sqrt{\frac{1}{64}}$; dus kleiner dan voor den zeshoek.

In den gelijkzijdigen driehoek DAF, is de loodlijn $CX = \frac{1}{3} AX$ (XIV. Voorstel, Gev. 3) $= \frac{1}{3} \sqrt{AF^2 - FX^2} =$

$\frac{1}{3} \sqrt{AF^2 - \frac{1}{4} AF^2} = \frac{1}{3} AF \sqrt{\frac{3}{4}} = AF \sqrt{\frac{3}{9 \times 4}} =$

$AF \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3} O \sqrt{\frac{1}{12}} = O \sqrt{\frac{1}{9 \times 12}} = O \sqrt{\frac{1}{108}}$; dus kleiner dan voor het vierkant.

AANMERKING. De Beijen, die aan hare celletjes eene zeskantige gedaante geven, gebruiken dus eene van die figuren, in welke geen tusschenruimte verloren wordt (II. 29. Gev. 2); en wel die, welke den grootsten inhoud onder den zelfden omtrek bezit.

Zie PAPPUS *Collec. Matth.* V. Boek Voorrede, die hier over zeer lezenswaardig is: en bij de nieuwere Schrijvers, onder anderen, LA CHAPELLE *Institutions de Géometrie* T. II. p. 217—233.

XXXII. VOORSTEL. Fig. 79.

Indien men in eenen regelmatigen vijfhoek, uit de twee einden [H, K] van eene der zijden [KH], regte lijnen [HC, KE] naar de uiteinden der aangrenzende zijden [KC, HE] trekt: zullen 1°. deze den veelhoek verdeelen in eene ruit [CBEx], in twee gelijkbeenige driehoeken [KxC, HxE], wier beenen gelijk zijn aan de zijden van den vijfhoek, en in eenen derden gelijkbeenigen driehoek [KxH], wiens grondlijn de gebruikte zijde des vijfhoeks is: verder 2°. zullen de twee gemelde lijnen [CH, KE] elkander in uiterste en middelste rede snijden, en haar grootste stuk is gelijk aan de zijde van den vijfhoek. 3°. Indien men uit iederen hoek lijnen naar alle de overige hoeken trekt, zal ieder dier diagonalen zoodanig door twee andere gesneden worden, dat het grootste stuk door de eerste dezer afgesneden, weder door de tweede in uiterste en middelste rede gesneden wordt, zullende het kleinste stuk het middelstuk der twee snijdingen zijn: en 4°. zullen deze lijnen door hare ontmoeting binnen den vijfhoek, en

om het zelfde middelpunt eenen nieuwen vijfhoek maken, die den gegevenen gelijkvormig, doch ten zijnen opzigte omgekeerd geplaatst is, en wiens zijde tot die van den gegeven' vijfhoek ſtaat, als het kleinſte ſtuk van de geſneden geheele lijn tot die geheele lijn.

EUCL. XIII. 8. voor het tweede gedeelte.

BEWIJS. VOOR HET I.

$\angle KHE = \frac{6R}{5}$ (II. 29. het 1. Gev)

dus $\angle KHC = \frac{2}{5}R$: dus $\angle CHE = \frac{4}{5}R$:

en $\angle CHE + \angle BEH = \frac{10\ R}{5} = 2\ R$:

gevolgelijk (I. 7) CH // BE

op de zelfde wijze KE // CB:

dus is CBEx eene ruit (I. Bep. 17.) en de zijden CB, BE, Ex, xC, zijn gelijk aan elkander;

dus zijn de $\Delta\Delta$ CxK, en ExH gelijkbeenig en onderling gelijk: dus ook Kx = Hx: en dus is ook Δ HxK gelijkbeenig.

VOOR HET II. in de $\Delta\Delta$ KxH en KEH is de $\angle$ HKE gemeen: $\angle$ KHx = $\angle$ KEH, $\angle$ KxH = $\angle$ KHE; en dus (I. Voorſt.)

KE : EH = KH : Hx of

KE : Ex = Ex: Kx: en insgelijks

HC : xC = xC : Hx.

Dus ſnijden de lijnen HC en EK elkander in uiterſte en middelſte rede (Bep. 4).

VOOR HET III.

HC : xC = xC : Hx dus (III. 8)

HC — xC : xC = xC — Hx : Hx

of

Hx : xC = xC — yC : Hx

of

Hx : xC = $x$$y$: Hx

dus

Hx : $x$$y$ = xC : Hx = HC : xC

of

HC : xC = xC : Hx of Cy; en dus, daar HC in uiterſte en middelſte rede geſneden is in x, is xC het ook in y (door Voorſt. XVII).

VOOR HET IV, Dat de vijfhoek ON$v$$x$$y$ regelmatig is, blijkt uit de gelijkheid der driehoeken OBN, NEv, vHx, xKy, yCo, en dus is dezelve aan den gegeven' vijfhoek gelijkvormig (XXVII. Voorſtel).

Dat het middelpunt het zelfde is voor beiden blijkt hier uit, dat de lijnen die uit B en C loodregt op HK en EH zouden getrokken worden, door het middelpunt van den gegeven veelhoek gaan: en dat dezelve ook loodregt op ON, yO, en door x en v gaan zouden, en dus door het middelpunt van den nieuwen vijfhoek.

Ver-

Verder: △ OBN ∽ △ KBH: dus
ON : KH = OB : BK.

I. AANMERKING. Alle de eigenschappen in dit Voorstel vermeld, zijn den vijfhoek *alléén* eigen, uitgezonderd deze, dat de diagonalen door hare onderlinge ontmoeting eenen nieuwen gelijkvormigen veelhoek zullen maken; dit is aan alle de regelmatige veelhoeken, van den vijfhoek te beginnen, eigen, doch met eenige bijzonderheden, waarvan wij in het XXXI. Voorstel van het VI. Boek, handelen zullen.

II. AANMERKING. Indien men den nieuwen vijfhoek op de zelfde wijze verdeelt, zal er wederom een nieuwe vijfhoek ontstaan, op wien alle de gemelde eigenschappen toepasselijk zijn.

VIJFDE BOEK.

OVER DEN CIRKEL (*).

INLEIDING.

I. BEPALING. Fig. 112.

Men noemt *Choorde*, *Spanlijn*, of *Pees* eens cirkelboogs [BAE] eene lijn [BE], die, in den Cirkel getrokken, de uiteinden [B en E] diens boogs verëénigt, en denzelven boog bespant. Indien eene dergelijke choorde [DCF] door het middelpunt [C] gaat, draagt zij den naam van *middellijn*, of *diameter*, bespant wederzijds den halven omtrek [DAF, DGF], en deelt dus zoo wel den cirkel [DAFGD] als den omtrek deszelven in twee gelijke deelen.

EUCL. I. d 17. — St. III. d. 1. — L. G. II. Bep. 3.

I. AANMERKING. Dat de middellijn den cirkel in twee gelijke deelen deelt, is, dunkt mij, een *Axioma*: Men kan het echter bewijzen, met door de verbeelding den halven cirkel DGF, aan den anderen kant des diameters te stellen, en optemerken dat dan de geheele boog DGF, op den geheelen boog DBAEF vallen moet, of de *radii* des cirkels zouden niet gelijk zijn, zoo als de bepaling des cirkels vordert.

L. G. II. 1.

II. AANMERKING. Eene choorde wordt ook wel eene in den cirkel *ingeschreven lijn* genoemd.

L. G. II. Bep. 6.

GEVOLG.

Eene *Choorde*, *Spanlijn*, of *Pees*, bespant altijd, of wederzijds den halven omtrek zoo zij door het middelpunt gaat, en dus middellijn is; of aan den eenen kant eenen boog [BAE] die kleiner, en aan den anderen kant eenen boog [BGFE] die grooter is dan de halve omtrek: zoo dat de beide bogen te samen den geheelen omtrek uitmaken.

III.

(*) Zie de bepaling van den *cirkel*, en van *cirkelbogen*, in het I. Boek, Bep. 5. bl. 4.

III. AANMERKING. Het gebruik wil dat, wanneer men zegt dat eene lijn de choorde is van een' boog, men daar door verstaat den kleinsten der twee bogen die den omtrek des cirkels uitmaken.

II. BEPALING. Fig. 112.

Wanneer twee bogen [DHG, GIF] te samen den halven omtrek [DHGIF] uitmaken, wordt de eene [bijv. DHG] het *aanvulsel*, of het *supplement*, van den anderen [GIF] genoemd: dat is het aanvulsel tot den halven omtrek.

AANMERKING. Wij zullen in het VIII. Boek nader over de *supplementen* spreken.

III. BEPALING. Fig. 112.

Men noemt *sector* van den cirkel een stuk [DCG] dat tusschen twee stralen (*radii*) [DC, CG,] en eenen boog [DHG], tot wiens uitersten de stralen komen, begrepen is.

EUCL. III. d. 10. — St. III. d. 9. — L. G. II. Bep. 5.

AANMERKING. Een *sector* bevat dus altijd eene bepaalde ruimte.

IV. BEPALING. Fig. 112.

Men noemt *Cirkelstuk*, of *Segment*, [BAE] dat gedeelte van den inhoud eens cirkels, het welk binnen den omtrek van een' boog [BAE] en de choorde [BE], die denzelven bespant, begrepen is.

EUCL. I. d. 18, 19. — St. III. d. 5, 8. — L. G. II. Bep. 4.

I. AANMERKING. Een segment bevat derhalve, even als de *sector*, eene bepaalde ruimte.

II. AANMERKING. Er is dus dit verschil tusschen een *segment* of *cirkelstuk*, en eenen *sector*, dat het *segment* door eenen boog en eene lijn, de choorde namelijk, doch de *sector* door eenen boog en twee lijnen, maar die door het middelpunt gaan, gevormd wordt. Gevolgelijk, behoort de halve cirkel te gelijk tot de *segmenten* en tot de *sectoren*.

V. BEPALING. Fig. 113.

Een *hoek* wordt gezegd *in een Cirkelstuk* [BDE] ge-

plaatst

plaatst te zijn, als zijn top [D] in den boog is, en zijne beenen [DB, DE] tot de uiterlten [B, E] van de choorde [B E] die het ltuk beperkt, komen.

EUCL. III. d. 7. St. III. d. 6, 7.

VI. BEPALING. Fig. 113.

Een *segment* wordt gezegd tot eenen gegeven hoek *bekwaam te zijn*: als men in hetzelve den gegeven hoek zoo plaatsen kan, dat zijn top den boog raakt, en zijne beenen door de uiteinden [B, E] der choorde van het *segment* gaan.

VII. BEPALING. Fig. 113.

Een hoek [FIG, of FCG] wordt gezegd op eenen boog [FG] te ltaan, wanneer zijne beenen [IF en IG; of CF en CG] de uiteinden van dien boog raken: en hij wordt *hoek in het middelpunt*, of *hoek in den omtrek* genoemd, naar mate de top [C of I] van den hoek [FCG, of FIG] in het middelpunt [C] of in den omtrek [in I] ltaat.

EUCL. III. d. 9. — St. III. d. 6. — L. G. II. Bep. 6.

I. GEVOLG.

Een hoek [BDE] in den omtrek, en die dus in een cirkelltuk [BDE] geplaatst is (Bep. V.), rust op den boog [BIFGE] die met den boog van het cirkelltuk waarin de hoek ltaat den geheelen omtrek uitmaakt.

II. GEVOLG.

Die boog [BIFGE] waarop de beenen des hoeks rusten is dan kleiner, even groot, of grooter dan de halve omtrek, naar mate het cirkelltuk waarin de hoek ltaat grooter, even groot, of kleiner is dan de halve cirkel.

VIII. BEPALING. Fig. 121.

Men noemt *raaklijn* van den cirkel, eene lijn [ATZ] die den cirkel raakt, doch, verlengd zijnde, niet lnijdt. Eene *lnijlijn* [ASH] die, welke tot den omtrek [in S] gekomen, en verlengd, den omtrek lnijdt, en binnen

nen den cirkel valt. Raaklijn en snijlijn zijn derhalve twee onbepaalde lijnen.

EUCL. III. d. 2. — St. III. d. 4. — L. G. II. d. 8.

AANMERKING. Zoude er uit deze bepaling niet regtstreeks volgen, dat eene raaklijn den cirkel maar in één stip raakt? doch er moet bewezen worden, dat er lijnen kunnen zijn, die den cirkel in één stip raken, en denzelven, hoe zij ook verlengd worden, niet snijden, het geen wij in ons III. Voorstel, Gev. 1. doen zullen.

IX. BEPALING. Fig. 134 en 135.

Men zegt dat twee cirkels elkander raken, wanneer zij elkander rakende zich niet snijden. De aanraking geschied of *uitwendig*, zoo de eene cirkel geheel buiten den anderen valt, of *inwendig*, zoo de eene geheel binnen den anderen valt.

EUCL. III. d. 3. — St. III. d. 2. — L. G. II. def. 9.

AXIOMATA

OF

ALGEMEENE KUNDIGHEDEN.

I.

Cirkels, die met gelijke stralen getrokken zijn, zijn gelijk.

EUCL. III. def. 1. — St. III. *Axioma* 18.

II.

De middellijn is het dubbeld van den straal of *radius*.

III.

Indien uit het middelpunt naar eenig stip eene regte lijn getrokken wordt, die korter is dan de *radius*, of straal, valt dat stip binnen den cirkel, zoo als ook de geheele lijn: bijv. CM fig. 112.

I. AFDEELING.

OVER DE LIJNEN DIE IN, OF TOT DEN CIRKEL GETROKKEN WORDEN.

I. VOORSTEL. Fig. 112.

Indien men in den omtrek van den cirkel twee ſtippen neemt [E, B], en dezelve door eene regte lijn [E B] vereenigt, zal die lijn geheel binnen den cirkel vallen.

EUCL. III. 2.

BEREIDING. Trek op die lijn uit het middelpunt eenige lijn CM en vervolgens de ſtralen CE, CB.

BEWIJS. Uit I. 15. Gev. 1; 27, 17. en het III. *Axioma* van dit Boek.

AANMERKING. Die lijn is dus in de daad eene choorde, of ſpanlijn (Bep. 1.): en, verlengd zijnde, ſnijdt zij den omtrek in twee ſtippen, E en B. Zij kan den omtrek niet in meer dan in twee ſtippen ſnijden: anders immers zouden de lijnen CD, CB, CM uit het middelpunt naar drie ſtippen van ſnijding getrokken, gelijk moeten zijn: d. i. er zouden uit een ſtip op eene regte lijn meer dan twee gelijke lijnen getrokken kunnen worden; dat onmogelijk is.

L. G. II. 3.

II. VOORSTEL. Fig. 114.

Wanneer drie ſtippen [A, B, D] niet in ééne regte lijn zijn, ſtaan dezelve in den omtrek van eenen cirkel: of, in andere woorden, men kan altijd eenen cirkel trekken wiens omtrek door die ſtippen gaan zal.

L. G. II. 7.

BEREIDING. Trek BD, BA, AD: ſtel dat BD, en AD in twee gelijke deelen gedeeld zijn in K en L: en dat KC, en LC die loodregt op BD en AD ſtaan, elkander in C ontmoeten: trek CB, CD, CA: men moet bewijzen, dat CB, CD, CA onderling gelijk, en dus ſtralen zijn van den cirkel, wiens middelpunt C is.

BEWIJS. Dat BC = CD en CD = CA is, volgt uit I. 21.

AANMERKING. Het ſpreekt van zelf, uit de bereiding, dat er

er door die zelfde drie stippen A, B, D geen andere cirkel dan de reeds getrokkene gaan kan.

GEVOLG.

De voorgaande bereiding en het bewijs leveren deze eigenschap der driehoeken op:

„ De loodlijnen, welke uit het midden der zijden eens „ driehoeks op dezelve getrokken kunnen worden, komen „ alle in één stip, het zij binnen het zij buiten den drie„ hoek, te samen: en de lijnen, uit het zelve naar de hoe„ ken van den driehoek getogen, zijn gelijk."

Hieruit volgt wederom, dat, zoo de driehoek gelijkzijdig is, die loodlijnen door de toppen van de overstaande hoeken gaan, en die hoeken in twee gelijke deelen snijden (I. 27. het 4. Gev.) zullen, en daardoor wordt het stip van snijding, of verééniging, in dat geval, het *middelpunt* van den driehoek genoemd, en het staat van den top af op twee derde gedeelten van iedere loodlijn. Zie IV. 14. het derde Gevolg, en IV. 13.

I. AANMERKING. Men zie in het X Werkstuk van het V. Boek de manier om eenen cirkel door drie gegeven stippen te trekken.

II. AANMERKING. De bereiding en het bewijs leveren ook een der middelen op om het I. en het II. Werkstuk van het V. en het 5. van het VI. Boek optelossen.

III. VOORSTEL. Fig. 116.

Eene regte lijn [B D] die loodregt staat op het einde van de middellijn, valt geheel buiten den cirkel, en raakt den cirkel in dat eenig stip, het uiteinde namelijk [B] van de middellijn.

EUCL. III. 16. — St. III. 9. — L. G. II. 9.

BEWIJS. Uit het ongerijmde. Men trekt namelijk uit het middelpunt de lijn C D tot het stip D, waarin men stelt dat de lijn B D ook den omtrek zoude raken, en dat dus tot den omtrek zoude behooren, zoo dat C D een straal zoude zijn: de ongerijmdheid volgt uit I. 17

GEVOLG.

Eene lijn, die den cirkel raakt, raakt denzelven in één éénig stip.

St. III. 9. Gev. 1.

AANMERKING. Men kan thans het 11, 12 (2. Oplosf.) 14, 15 en 16 Werkftuk van het V. Boek oplosfen.

IV. VOORSTEL. Fig. 116.

Eene lijn [CB] die van het middelpunt [C] naar het ftip [B] van aanraking tusfchen den cirkel en eene regte lijn [BD] getrokken wordt, ftaat loodregt op die raaklijn: en omgekeerd; eene lijn in den cirkel, die loodregt op de raaklijn in het ftip van aanraking ftaat, gaat door het middelpunt.

EUCL. III. 16, 18 en 19. — St. III. 9. Gev. 3.

BEWIJS VOOR HET I. Door de ongerijmdheid waarin men vervalt als men ftelt dat eenige andere lijn CD loodregt is: die ongerijmdheid blijkt uit I. 17.

VOOR HET II. Uit de ongerijmdheid waarin men vervalt indien men ftelt dat eenige andere lijn, BG, door het middelpunt G gaat; die ongerijmdheid blijkt uit het eerfte gedeelte.

GEVOLG.

Er kan uit het raakpunt [B], tusfchen den omtrek des cirkels en de raaklijn [BA] geen lijn [BH] getrokken worden, die den omtrek des cirkels niet fnijdt.

BEWIJS. Immers die lijn BH moet den cirkel of raken, of fnijden: zoo zij den cirkel raakt, moet zij (door dit Voorftel) loodregt ftaan op de middellijn: en derhalve zouden er uit het ftip B, op AB, twee loodregte lijnen BD en BH opgerigt kunnen worden: dat (door I. 2. Gev. 3.) onmogelijk is: de lijn BH kan derhalve den omtrek niet raken: maar moet denzelven fnijden.

I. AANMERKING. Zoodra de lijn BH fchuins valt op AB, maakt zij met BD eenen hoek HBD, waarvan het eene been BD de raaklijn is, en het ander, de choorde BH van den Boog BIH: zoo dat, hoe klein ook de regtlijnige hoek HBD zijn moge, de omtrek BIH des cirkels, nog altijd tusfchen denzelven en de raaklijn BD invalt.

II. AANMERKING. Fig. 116. De boog BIH heeft eene helling op de raaklijn DB, en men kan die helling van den boog BIH op DB ook eenen hoek noemen, waarvan het eene been eene regte lijn, het ander een cirkelboog is: doch de helling eens cirkelboogs op eene regte lijn is geheel anders dan die van eene regte lijn

op

op eene regte lijn; en dus kunnen die twee hoeken, indien men zich bij het eenvoudig en oorspronkelijk denkbeeld van eene helling houdt, niet met elkander vergeleken worden. Wanneer men zegt dat de hoek tusschen den boog BIH en de lijn BD kleiner is dan eenige regtlijnige hoek tusschen BD en eene tweede lijn uit het stip B getrokken; vergelijkt men niet de enkele helling, maar wel stilzwijgend de ruimte die dergelijke hoeken bevatten: zoo is het bijv. waar, en klaarblijkelijk, dat in Fig. 143. de kromlijnige driehoeken GIE, GIEL, kleiner zijn dan de regtlijnige GIE, GIL: doch wij hebben reeds te voren gezegd dat het denkbeeld van ruimte tot dat van een' hoek niet behoort: zie 2. Aanm. op de 8 Bepaling van het eerste Boek. Men heeft zeer veel getwist over den aard van den hoek door eene regte lijn met eenen cirkel-boog gevormd: waarover men kan nazien CLAVIUS en TACQUET op EUCLIDES III. 16. en WALLIS *Opera Mathematica*, T. II. p. 605.

III. AANMERKING. Fig. 138. Het is misschien met niet meerder naauwkeurigheid dat men regtlijnige hoeken met hoeken uit twee cirkel-bogen bestaande vergelijkt: men zegt bijv. dat indien twee gelijke cirkels BAFD, en BKDEG elkander snijden, en men uit één der snijdings stippen B de raaklijn BF aan eenen der cirkels trekt, vervolgens in denzelven den boog BKDEG gelijk neemt aan den boog BAF dien de gemelde raaklijn van den anderen cirkel afsnijdt, en eindelijk de choorde BD trekt; dat dan de kromlijnige hoek FABKD gelijk is aan den regtlijnigen hoek FBG: want, zegt men, de gemelde kromlijnige hoek FABKD = FAB + ∠ FBKD. Maar FAB = BKDEG: dus kromlijnige hoek FABKD = BKDEG + FBKD = ∠ FBG: doch het blijkt, naar ons inzien, duidelijk, dat men dan niet, zoo als behoorde, de enkele *helling* van den omtrek, of van den boog FAB, op den boog BKD vergelijkt met de helling van den lijn FB op de lijn GB: maar stilzwijgend de ruimte door de bogen FAB en BKD bevat, met de ruimte tusschen de regte lijnen BG, BF en de bogen FD, DEG begrepen. Wel is waar dat indien men uit B de raaklijn BI op den boog BA trekt, de regtlijnige hoek IBF door de twee tangenten gevormd wordt: maar de helling van IB op BF is niet vergelijkbaar met die van boog FAB op den boog BKD.

VIETA Oper. p. 388.

II. AFDEELING.

OVER DE HOEKEN IN DEN CIRKEL.

V. VOORSTEL. Fig. 115 *a*, *b*.

Een hoek [GCF] in het middelpunt is het dubbeld van den hoek [GIF] in den omtrek, die op den zelfden boog [GF] ſtaat.

EUCL. III. 20. — St. III. 10.

BEREIDING. Men trekt uit den top I, de middellijn ICL.

BEWIJS. Uit I. 15 en 27, op den driehoek ICG en dan wederom op den driehoek ICF toegepast. Men neemt vervolgens de ſom of het verſchil der hoeken LCF en LCG, LIF en LIG, naar mate de lijn IL binnen of buiten den hoek FCG valt.

I. GEVOLG.

Alle hoeken in den omtrek, die op den zelfden boog rusten, zijn gelijk.

EUCL. III. 21. — St. III. 11. — L. G. II. 18. Cor. 1.

II. GEVOLG.

De ſom of het verſchil van twee hoeken in den omtrek is de helft van de ſom of het verſchil van twee hoeken in het middelpunt, die op de zelfde bogen rusten.

III. GEVOLG. Fig. 115 *b*.

De ſom der hoeken [FIG en FLG], die, in den omtrek, op bogen rusten welke te ſamen den geheelen omtrek uitmaken, zijn gelijk aan twee regte hoeken: en de ſom der hoeken, welke op bogen rusten die te ſamen den halven omtrek uitmaken, zijn gelijk aan éénen regten hoek; en omgekeerd.

IV. GEVOLG.

Op dat de omtrek eens cirkels door vier ſtippen zoude kunnen gaan, moeten dezelve zoo gelegen zijn, dat wanneer men ze met lijnen vereenigt, de ſom der twee hoeken [FIG en FLG, IFL en IGL] die over elkander

det staan, gelijk zij aan twee regte hoeken. Zie verder hier onder Voorst. XII. Aanm. 4.

VI. VOORSTEL. Fig. 117.

In den zelfden cirkel, of in gelijke cirkels, rusten gelijke hoeken, het zij alle in het middelpunt [DCB, BCA] het zij alle in den omtrek, op gelijke bogen AHB, BID: en omgekeerd.

EUCL. III. 26 / 27. — L. G. II. 11.

BEREIDING. Men trekke de choorden DB, BA.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit I. 21. volgt BD = BA; en dus, vermits A op D valt, indien B op B en AB langs BD geplaatst wordt, zullen ook, wegens de gelijkheid der stralen, de bogen DIB en BHA op elkander vallen en gelijk zijn.

VOOR HET II. Uit het ongerijmde, door het I.

I. GEVOLG.

Een hoek, of in den omtrek, of in het middelpunt, die op eenen dubbelden, drievoudigen boog enz. staat, is dubbeld, drievoudig enz. van den hoek die in den zelfden, of in eenen gelijken cirkel, het zij in den omtrek, het zij in het middelpunt, op den enkelen boog staat; en omgekeerd.

II. GEVOLG.

In den zelfden cirkel staat de grootste hoek, het zij in het middelpunt, het zij in den omtrek, op den grootsten boog.

III. GEVOLG.

De hoek, die in het middelpunt regt is, rust op eenen boog die het vierde gedeelte is van den omtrek des cirkels.

IV. GEVOLG. Fig. 117.

De bogen, die tusschen evenwijdige choorden [KL, MN] begrepen zijn, zijn gelijk, en omgekeerd. (uit I. 7. en dit Voorstel).

L. G. II. 16.

V. GEVOLG.

Uit het bewijs van ons voorstel blijkt, dat, wanneer in éénen en den zelfden cirkel twee choorden gelijk zijn, de bogen welke zij bespannen ook gelijk zijn; en het omgekeerde volgt even gemakkelijk.

EUCL. III. 29. — St. III. 16. — L. G. II. 4.

I. AANMERKING. Op dit Gevolg en op het 3. rust het bewijs der oplossing van het 8 en 9. Werkstuk in het V. Boek.

VI. GEVOLG.

Ook volgt hieruit, dat de choorde eens grooteren boogs grooter is dan die van een' kleineren boog.

EUCL. III. 28. — L. G. II. 5.

II. AANMERKING. Men kan het 10. Werkstuk van het II. Boek oplossen.

VII. VOORSTEL. Fig. 118.

Een hoek [ABD] in den halven cirkel geplaatst is regt: een hoek [ABG] die in een kleiner cirkelstuk staat is grooter dan regt: een hoek [ABL] die in een grooter cirkelstuk staat is kleiner dan regt.

EUCL. III. 31. — St. III. pr. 18. — L. G. II. 18. Cor. 2, 3, 4.

BEREIDING. Zij BCF eene middellijn; trek AG, AL.

BEWIJS. 1°. Uit Voorst. V. en I. 3.
2°. Om dat $\angle$ ABG $>$ $\angle$ ABD.
3°. Om dat $\angle$ ABL $<$ $\angle$ ABD.

I. AANMERKING. Het blijkt uit het 2. gevolg van de VII. bepaling, dat men dit Voorstel aldus zoude kunnen uitdrukken.

„ Een hoek in den omtrek is regt, of kleiner, of groo-
„ ter dan regt, naar mate hij staat op den halven omtrek;
„ of op eenen boog die kleiner, of op eenen boog die groo-
„ ter is dan de halve omtrek"

II. AANMERKING. Het bewijs van het eerste lid wordt gemakkelijker, met de middellijn AD te beschouwen als bespannende den halven omtrek; en dus den hoek ABD als de helft van den hoek die de lijnen AC en CD maken, of de helft van twee regten; en dus gelijk eenen regten.

III. AANMERKING. Door het I. gedeelte bewerkt men de 2.

Op-

Oplosfing van het 4. Werkftuk in het I. Boek. Men kan thans ook oplosfen; het 6, 7, 9, 26, 27. Werkftuk van het II. Boek: het 1 (2. Oplosfing) en 12 en 13. van het V. Boek: die alle vooronderftellen dat men weet dat de hoek in den halven cirkel regt is.

IV. AANMERKING. Dit Voorftel, dat de hoek in den halven cirkel regt is, wordt door DIOGENES LAËRTIUS aan THALES toegefchreven; en daarop rust een gemakkelijk middel, om eenen *winkelhaak* te beproeven: men ftelle den top in den omtrek eens cirkels, en keere een van deszelfs beenen zoo dat het valle op het ftip waarin de middellijn den omtrek fnijdt: zoo dan het ander been juist door het ander uiteinde der middellijn gaat, d. i. door het ftip waar die middellijn den omtrek fnijdt, is de winkelhaak naauwkeurig: anders niet. Dit middel is gemakkelijker dan het geen dat wij in II. 16. Aanm. 3. opgegeven hebben.

VIII. VOORSTEL. Fig. 119.

De hoek [DAB of DAF] welke de raaklijn [AB of AF] met de choorde [AD] maakt die uit het ftip van aanraking [A] getrokken wordt, is gelijk aan den hoek [AID, of AHD] die geplaatst is in het overhandfche cirkelftuk [DEIA of DHA] door die choorde gemaakt.

EUCL. III. 32. — St. III. pr. 20. — L. G. II. 19.

BEREIDING Zij ECA eene middellijn, dus ⊥ op FAB; trek ED, AH, DH.

BEWIJS. Uit de befchouwing dat ∠ EDA regt is (door het VII. Voorftel): dus dat ook ∠ DEA, en ∠ EAD te famen regt zijn, zoo wel als ∠ EAD en ∠ DAB te famen Waaruit het befluit voor ∠ AED waar aan (Voorft. VI.) ∠ AID gelijk is, volgt.

Voor den hoek FAD, uit de befchouwing dat (Voorft. V. Gev. 3) ∠ AID + ∠ AHD = 2 L = ∠ FAD + ∠ DAB.

AANMERKING. Hierop fteunt de bewerking van het 5 en 6. Werkftuk van het V. en het 1. van het VI. Boek.

III. AFDEELING,

OVER DE LIJNEN DIE ZICH IN DEN CIRKEL SNIJDEN, OF DOOR DEN OMTREK GESNEDEN WORDEN.

IX. VOORSTEL. Fig. 122.

Indien eene middellijn [PK] eene choorde [LH] in twee gelijke deelen ſnijdt, ſnijdt zij dezelve loodregt; en omgekeerd; zoo eene middellijn loodregt op eene choorde ſtaat, ſnijdt zij dezelve en den beſpannen boog in twee gelijke deelen. Doch twee choorden [BE, AD] kunnen elkander nimmer zoodanig ſnijden, dat zij daar door beide in twee gelijke deelen verdeeld zijn.

EUCL. III. 3, 4. — St. III. pr. I. en 2 Gev. — L. G. II. 6.

BEREIDING VOOR HET I. GEDEELTE: trek LC, HC:

VOOR HET II. trek CF.

BEWIJS VOOR HET I. uit I. 26. *Voor het omgekeerde* uit I. 27. en 22.

VOOR HET II. GEDEELTE uit de ongerijmdheid waarin men vervalt met het tegendeel te ſtellen: want dan moest, door het eerſte gedeelte, zoo wel ∠ AFC als ∠ BFC regt zijn, dat onmogelijk is.

GEVOLG.

Zoo eene choorde op eene andere choorde loodregt valt, en haar tevens in twee gelijke deelen ſnijdt, gaat zij door het middelpunt, en is eene middellijn.

AANMERKING. Door dit Voorſtel lost men het 1, (1 Oplosſing) het 2 en 10 Werkſtuk van het V. Boek op.

X. VOORSTEL. Fig. 120.

Indien men binnen den cirkel eenig ſtip [A] buiten het middelpunt [C] neemt, en daaruit verſcheide lijnen [AB, AG, AD, AE, AH] naar den omtrek trekt, zal het volgende plaats hebben.

1°. De grootſte van allen is die [AD], welke door het middelpunt gaat.

2°.

2°. De kleinste is het overig gedeelte [AF] van de middellijn.

3°. De lijnen [AG, AB, enz.] zullen dus te kleiner zijn, naar mate zij verder van de middellijn af, of van het middelpunt verwijderd, zijn.

4°. Uit het zelfde stip [A] kunnen twee lijnen [AG, AE] getrokken worden, en niet meer dan twee, welke gelijk aan elkander zijn: de eene zal aan den eenen, de andere aan den anderen kant van de middellijn vallen, en zij zullen met dezelve gelijke hoeken [DAG en DAE] maken, of even ver van het middelpunt af zijn.

5°. Eindelijk, al het zelfde zal insgelijks plaats hebben (uitgezonderd N°. 2.), indien het stip A op den omtrek zelven valt.

EUCL. III. 7. — St. III. pr. 3.

VOOR I EN II. BEREIDING: Men trekt de stralen CG, CB, CE, CH:

BEWIJS. Uit de V. Bepaling en het XXIII. Voorstel van het I. Boek.

VOOR HET III. BEREIDING: Men trekt CL ⊥ op AG en CO ⊥ op AB:

BEWIJS. 1°. Voor de △△ ABC, en ACG uit I. 23 volgt AG > AB: en dan 2°. uit I. 17. om te toonen dat CN en dus CO > CL.

VOOR HET IV. BEREIDING. Stel GIE ⊥ op AD: trek AE, en dan CM ⊥ op AE:

BEWIJS. In △△ GAI en IAE is ∠ GAD = ∠ DAE: uit onderst., het IX. Voorstel, bereid. en I. 21. en in △△ GAM en CAL is CM = CL.

Dat er geen andere lijn dan AE, getrokken kan worden, die gelijk is aan AG, blijkt uit N°. 3.

N°. 5. volgt van zelf.

GEVOLG.

Indien er uit eenig stip, binnen den cirkel, tot aan den omtrek meer dan twee lijnen getrokken kunnen worden, die gelijk zijn aan elkander, is dat stip het middelpunt van den cirkel.

EUCL. III. 9. — St. III. 3. Gev. 2.

XI. VOORSTEL. Fig. 121.

Indien men uit eenig stip [A] buiten den cirkel eenige lijnen naar den omtrek trekt, zal het volgende plaats hebben:

1°. De langste van allen, die den cirkel snijden, en binnen in den omtrek komen, is die [AD] welke door het middelpunt gaat: de overige zullen des te korter zijn, naar mate zij grootere hoeken met de middellijn maken, of verder van het middelpunt af zijn.

2°. De kortste van allen die slechts tot aan den omtrek komen, is die [AF] welke, verlengd zijnde, door het middelpunt gaat: en de overige zullen des te langer zijn, naar mate zij grootere hoeken met de middellijn maken, of verder van het middelpunt af zijn.

3°. Men kan, het zij tot binnen, het zij tot buiten den omtrek, slechts twee lijnen uit het zelfde stip [A], trekken, die aan elkander gelijk zijn, en deze zullen, de eene aan den eenen, de andere aan den anderen kant van het middelpunt vallen, en even ver van het zelve af zijn, of gelijke hoeken met de middellijn maken.

EUCL. III. 8. — St. II. pr. 4.

BEREIDING. Voor I en II. Trek de stralen CG, CQ, CB, CP en verder CO ⊥ op BA, CL ⊥ op GA.

BEWIJS. Uit I. Bep. 5. en Voorst. XIX. op △ GCA toegepast, is AD > GA.
Uit I. 23. op △△ GCA en BCA toegepast, is GA > BA.
Uit I. 19. op △ CQA toegepast, is AQ > AF.
Uit I. 20. op △△ CQA en CPA toegepast, is PA > AQ.
Uit I. 17. is CN > CL: dus CO > CL.

BEREIDING voor het III. Zij GIE ⊥ op AD: trek EA, CE, en CM ⊥ op EA.

BEWIJS. Door Voorst. IX. EI = IG: en in △△ EIA en IAG is I. 21. AE = AG: ∠ EAD = ∠ DAG, en CM = CL.

I. GEVOLG.

Van alle de choorden die in den cirkel getrokken kunnen worden, is de middellijn de grootste.

EUCL. III. 15. — St. III. pr. 8. — L. G. II. 2.

I. AANMERKING. Dit kan ook onmiddelijk bewezen worden uit de V. Bep. en het XVII. Voorstel uit het I. Boek.

II. AANMERKING. Men kan thans het 3 en 4 Werkstuk uit het V. Boek oplossen.

II. GEVOLG.

De choorden, die even ver van het middelpunt afstaan, zijn gelijk.

EUCL. III. 14. — St. III. pr. 7. — L. G. II. 8.

III. GEVOLG.

Van alle de lijnen die tot den bollen omtrek komen, is de raaklijn de grootste: doch zij is de kleinste van alle, die tot den hollen omtrek komen.

IV. GEVOLG.

Van eenig stip buiten den cirkel kunnen tot denzelven twee raaklijnen [AT, AU] getrokken worden; deze zullen onderling gelijk zijn; en de grootste zijn van alle de lijnen die tot het holle, doch de kleinste van allen die tot het bolle van den omtrek getrokken kunnen worden.

III. AANMERKING. Het zelfde zal in het 2. Gevolg van het XX. Voorstel op eene andere wijze bewezen worden. Men kan het ook onmiddelijk bewijzen uit het IV. Voorstel van dit, en het Gevolg van het XXV. Voorstel in het I. Boek.

V. GEVOLG.

Uit een stip buiten den cirkel kan men maar twee lijnen naar den omtrek trekken, die gelijk aan elkander zullen zijn.

IV. AANMERKING. Indien men dit Voorstel met het voorgaand vergelijkt, zal men zien, dat zij in de daad slechts één éénig Voorstel uitmaken; en dat het verschil alleen in de plaatsing van het stip A bestaat.

XII. VOORSTEL. Fig. 123.

Twee Choorden [AD, BE], die zich naar welgevallen snijden [in F], snijden zich zoo, dat de regthoek uit de deelen [AF, FD] van de eene, gelijk is aan den regthoek uit de deelen [BF, FE] van de andere.

Eucl. III. 35. — St. III. pr. 23. — L. G. III. 28. Cor.

EERSTE BEWIJS. Uit de eigenschappen der regthoekige driehoeken ontleend.

BEREIDING. Trek door F en het middelpunt C de middellijn NCFG: vervolgens CD; en CH ⊥ op AD.

BEWIJS. Uit het IV. Voorstel van dit Boek, en II. 16. het 4. Gevolg, is in de △△ CDH, en CFH.

□ op CD — □ op CF ∞ □ op HD — □ op HF

waaruit, door de gelijkheid der stralen CD, CN, CG en door het X. Voorstel van het III. Boek, regthoek uit NF en FG ∞ regthoek uit AF en FD. Men bewijst het zelfde voor den regthoek uit BF en FE: waaruit het voorstel volgt.

TWEEDE BEWIJS. Uit de gelijkvormige driehoeken.

BEREIDING. Men trekt AB en DE.

BEWIJS. Uit het 1. Gevolg van het V. Voorstel, is △ ABF ∽ △ FDE: en dus uit IV. 2.

AF: BF ≍ FE: FD:

en dus uit IV. 9. het 3. Gevolg:

regthoek uit AF en FD ∞ regthoek uit BF en FE.

I. AANMERKING. Dit voorstel, aldus bewezen, levert ook een bewijs op van het X. Voorstel uit het IV. Boek.

II. AANMERKING. Het voorstel is algemeen: doch wanneer er voor de choorden die zich snijden, bijzondere omstandigheden bijkomen, zullen er ook uit het Voorstel eenige bijzondere gevolgen getrokken kunnen worden: zoo als bijv. wanneer de choorden elkander regthoekig snijden: en in dat geval is of eene derzelve de middellijn, het geen de stof van het XIII. Voorstel en zijn Gevolg oplevert: of zij zijn beide choorden, maar die regthoekig gesneden worden: en dit is het geval van het XIV. Voorstel.

I. GEVOLG.

De deelen van eene choorde zijn altijd wederkerig, als de

de deelen van eene andere choorde, die de eerstgemelde snijdt: d. i.

AF: BF = FE: FD.

III. AANMERKING. Indien men het eerste bewijs van het Voorstel gebruikt, volgt dit gevolg uit het Voorstel, door IV. 9. het 3. Gevolg.

Maar indien men het tweede bewijs gebruikt, is dit gevolg minder een gevolg van het Voorstel, als de uitdrukking in woorden van dat gedeelte van het bewijs zelf, waaruit het Voorstel wordt afgeleid.

II. GEVOLG.

Op dat er een cirkel door vier gegeven stippen A, B, D, E getrokken zoude kunnen worden, moeten dezelve zoodanig geplaatst zijn, dat de lijnen die ze vereenigen zich in wederkerige rede snijden, of dat

AF: BF = FE: FD.

IV. AANMERKING. Men kan dus niet altijd eenen cirkel door vier gegeven stippen trekken, daar zulks voor drie stippen, mits zij niet in éene regte lijn liggen, altijd mogelijk is, zoo als wij dat in het II. Voorstel bewezen hebben. Zie ook hier boven V. Voorstel, Gev. 4.

XIII. VOORSTEL. Fig. 124.

Indien er uit eenig stip [B] van den omtrek eene lijn [BF] loodregt op de middellijn getrokken wordt, zal het vierkant van die lijn gelijk zijn aan den regthoek uit de deelen [AF, FD] van de middellijn; en dus zal ook die lijn middel-evenredig zijn tusschen de gemelde deelen, d. i.

□ op BF = regthoek uit AF, FD: en (IV. 9. Gev. 3.)

AF: BF = BF: FD.

BEREIDING. Trek BA, BD.

BEWIJS. Uit het VII. Voorstel, II. 18.

I. AANMERKING. Het zelfde kan uit het VII. Voorstel van dit Boek, en het XV. van het IV. Boek onmiddelijk bewezen worden.

II. AANMERKING. Hierop rusten de oplossingen van het 5, 7, 8. 9. Werkstuk van het III: de 3. oplossing van het 16, en het 29 van het II.

III. AANMERKING. Indien dan het deel AF, m malen het deel

deel FD bevat, of AF = *m* × FD: is □ op BF ∞ *m* × □ op FD, en □ op BD = □ op FB + □ op FD ∞ *m* □ op FD + □ op FD = $\overline{m + 1}$ × □ op FD: dat is: het vierkant op de choorde BD bevat zoo vele malen het vierkant van FD, als er in de middellijn AD deelen gelijk aan FD genomen worden.

I. GEVOLG.

Die zelfde lijn [BF], eene loodlijn namelijk op eene middellijn, is altijd zoodanig gesteld dat het vierkant op dezelve gelijk is aan het verschil der vierkanten op den radius, en op het deel van de middellijn dat tusschen het middelpunt en die loodlijn begrepen is, d. i.

□ op BF ∞ □ op CD — □ op CF.

Uit het voorgaand Gevolg, en II. 14. in aanmerking nemende dat FD = CD + FC, en AF = CD — FC. Het zelfde kan onmiddelijk uit II. Gev. 1. worden afgeleid.

II. GEVOLG.

Dit Voorstel en het I. Gevolg, namelijk dat □ op BF ∞ regthoek uit AF en FD, ∞ □ op CD — □ op CF, zijn ook omgekeerd waar: namelijk, zoo eenige kromme lijn ABD zoodanig gesteld is, dat men voor ieder stip van die lijn hebbe □ op BF ∞ regthoek uit AF, FD, of ∞ □ op CD — □ op CF, dan is die lijn de omtrek eens cirkels waarvan AB de middellijn is.

PAPPUS, *Coll. Mathem.* VII. 168.

IV. AANMERKING. Het voorgaande gevolg levert op het geen de hedendaagsche Wiskonstenaars noemen de *Vergelijking* (*Aequatio*) van den cirkel, of in het algemeen van eene kromme lijn. De lijn [AD], wier rigting gegeven is, wordt *as*, of *middellijn*, genoemd: men noemt het stip A of C, uit het welk men de stukken AF, of CF der middellijnen of assen, *afgesnedenen* of *abscissen* (*abscissae*) geheten, begint te nemen, den *oorsprong* der *afgesnedenen*, of *abscissen*; en de lijnen BF noemt men *toegepasten*, of *ordinaten*, (*ordinatae*, *applicatae*).

De kromme lijn is dan bepaald zoodra de betrekking die er bestendig tusschen de *afgesnedene* en *toegepaste* lijnen

nen plaats heeft, bekend is. Voor den cirkel wordt die betrekking uitgedrukt door

□ op BF ∞ regthoek uit AF, FD, of ∞
regthoek uit AD, FD — □ op FD.

noemende dan BF, y; FD, x; AD, $2a$;

en in acht nemende het geen wij IV. 9. het 5. Gevolg en 5. Aanm. gezegd hebben, is

$y^2 = (2a - x)x = 2ax - x^2$ de vergelijking die den aard der cirkels aanduidt: of ook, stellende CF $= x$, dat is, de *abscissen*, niet uit het uiteinde der middellijn, maar uit het middelpunt nemende, is $y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$ de vergelijking van den cirkel.

V. AANMERKING. Wij hebben in de 2. Aanmerking op het 1 Gev. IX. Voorstel van het IV. Boek gezegd, wat de Ouden door *vlakke plaatsen* of *vlakke werkstukken* verstaan: zij zijn namelijk die, waarin het gevraagde getal zoo wel in het vierkant als door een ander, doch *gegeven*, getal gemultipliceerd voorkomt: en het is door dit Voorstel dat zij dezelve geometrisch oplossen: immers kan men alle die Vraagstukken, of, zoo als men het nu noemt, alle die *vergelijkingen van den tweeden graad* tot deze twee herleiden.

I. $x^2 \pm ax = b^2$. II. $x^2 \pm ax = - b^2$.

VOOR HET I. Stel [Fig. 125.] GC $= \frac{1}{2}a$, IG $= b$ regthoekig op DC: beschrijf uit C, als middelpunt met den radius CI den cirkel DIF, die de verlengde lijn CG in D en F snijdt. Dan is de lijn DG het getal x dat de vergelijking $x^2 + ax = b^2$: en de lijn GF het getal x dat de vergelijking $x^2 - ax = b^2$ oplost.

Verder zij HF = DG: dan is DG = HF = GF — GH = GF — a.

Want: DC = $\frac{1}{2}a$ + DG; DF = a + 2 DG; GF = a + DG.

Indien men dan voor de vierkanten de tweede magten, en voor de regthoeken het multiplicatie-teeken gebruikt, het geen geschieden kan, zoo als wij zulks in IV. 9. Gev. 5. getoond hebben: is

$$\overline{IG}^2 = b^2 = DG \times GF = DG \times (a + DG) = \overline{DG}^2 + a \times DG,$$

dat is $x^2 + ax = b^2$.

en

en

$\overline{IG}^2 = b^2 = DG \times GF = GF \times (GF - a) = \overline{GF}^2 - a \times GF$:

dat is $x^2 - ax = b^2$.

VOOR HET II. Stel (Fig. 126.) $AC = \frac{1}{2}a$: beschrijf uit C met AC den cirkel ADB: stel AE $= b$ loodregt op AB: zij ED // AB: en DF ⊥ op AB: dus $CB = -\frac{1}{2}a$; $DF = EA = b$: dan is $\overline{FC}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{DF}^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$; en $FC = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$; dus $BF = CB + CF = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

waar uit volgt:

1°. $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = BF + \frac{1}{2}a$, en dus

$\frac{1}{4}a^2 - b^2 = \frac{1}{4}a^2 + a \times BF + \overline{BF}^2$

of $\overline{BF}^2 + a \times BF = -b^2$

en dus voldoet BF aan het getal x dat de vergelijking $x^2 + ax = -b^2$ oplost

2°. $AF = AC - FC = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ en dus

$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = \frac{1}{2}a - AF$: en dus

$\frac{1}{4}a^2 - b^2 = \overline{AF}^2 - a \times AF + \frac{1}{4}a^2$

en dus $\overline{AF}^2 - a \times AF = -b^2$

dus voldoet AF aan het getal x dat de vergelijking $x^2 - ax = -b^2$ oplost.

Men ziet dan dat er, om die vergelijkingen door de Meetkunst opteloosfen, niets anders vereischt wordt, dan dat eene lijn een getal $\frac{1}{2}a$ uitdrukke, en eene andere de wortel b uit een getal b^2, dat men als een vierkant getal, meetbaar of onmeetbaar, beschouwt: het eerste valt in het oog: het tweede insgelijks, zoo b^2 een vierkant getal is; zoo niet, kan men b^2 behandelen als een product van twee getallen m en l, voor een derzelve, zoo dit noodig is, de eenheid stellende: die getallen m en l kunnen door lijnen worden uitgedrukt, en de lijn middel evenredig tusschen dezelve is de gezochte lijn b.

De Heer KOENIG herleidt het geen wij nu gezegd hebben tot de 28 en 29 propositie van het VI Boek van EUCLIDES: en in de daad, daar men hier x vinden moet, zoekt men, volgens de lijn a, eenen regthoek $(a + x) x$ te plaatsen, gelijk aan eenen gegeven regthoek b^2, en wiens

wiens basis $(a \pm x)$ grooter of kleiner dan de gegeven lijn a is: waarop de gemelde propositien van EUCLIDES neerkomen.

XIV. VOORSTEL. Fig. 127.

Indien twee choorden elkander regthoekig snijden, zal de som van de vierkanten der deelen [□ op AF + □ op BF + □ op FD + □ op FE] gelijk zijn aan het vierkant van de middellijn.

AANMERKING. Dit kan op verscheiden wijzen bewezen worden.

BEREIDING. Trek BD, DE, vervolgens door het middelpunt C, BCI, en eindelijk BA, AI, ID.

I. BEWIJS. Uit dit Voorstel is AF: BF = FE: FD: gevolgelijk is uit III. 10. Gev. 1. en Voorstel XIV. Gev. 1.
□ op AF: □ op BF = □ op FE: □ op FD.
waaruit, door samentelling, verwisseling en wederom door samentelling der reden volgt
□ op AF + □ op BF + □ op FE + □ op FD:
□ op FE + □ op FD = □ op BF + □ op FD: □ op FD:
of (II. 16.)
□ op AF + □ op BF + □ op FE + □ op FD:
□ op ED = □ op BD: □ op FD.
Maar Δ FDE ∽ Δ IBD; want
∠ FED = ∠ BID (Voorst. V. Gev. 1.)
En ∠ EFD = L = ∠ BDI (Voorst. VII.) dus (IV. 25.)
□ op FD: □ op BD = □ op ED: □ op BI: en dus (III. *Axioma* 4.) □ op BI = □ op AF + □ op BF + □ op FE + □ op FD.

II. BEWIJS. Men kan ook dit gevolg bewijzen door het voorstel van PYTHAGORAS (II. 16.). Men trekt als dan CB, CD, CE, CA en de loodlijnen CL, CM. Men neemt door II. 16, in de ΔΔ BCL, ECL, ACM, en MCD, de waarde der vierkanten op CB, CD, CE, CA: de som van die vier vierkanten is gelijk aan 4 □ op CB, = □ op BI: en de som der gevonden waarden door II. 16. en II. 4. ontwikkelende vindt men dezelve gelijk aan □ op AF + □ op BF + □ op FE + □ op FD.

III.

III. BEWIJS. Men kan het ook bewijzen uit de beſchouwing dat (V. Voorſtel, Gevolg 3.) daar ∠ ABE + ∠ BAF = L, de bogen AE + BD den halven omtrek uitmaken: insgelijks ook de bogen AB + ED: dat dus boog AI = boog ED; maar ∠ BAI = L (VII. Voorſtel) dus (II. 16.) □ op BI ∞ □ op AB + □ op AI ∞ □ op AB + □ op ED: waaruit, door II. 16, het Voorſtel volgt.

AANMERKING. Het derde bewijs is het kortſte, en eenvoudigſte.

II. AANMERKING. Dit Voorſtel is het XI. van de *Lemmata* van ARCHIMEDES.

XV. VOORSTEL. Fig. 124.

De vierkanten der choorden [AB, AE] uit de uiteinden eener middellijn getrokken, ſtaan tot elkander als de ſtukken [AF, AP] op de middellijn afgeſneden door de loodlijnen [BF, EP] uit de uiteinden der choorden daar op neergelaten.

VIVIANI *Divinatio de locis ſolidis*, pr. 9.

BEWIJS. Uit Voorſtel VII. en II. 18.

GEVOLG.

□ op AB: □ op BD = AF: FD.

AANMERKING. Deze eigenſchap geeft een gemakkelijk middel om, twee lijnen gegeven zijnde, twee vierkanten te maken welke de zelfde rede tot elkander hebben als die lijnen: zij bijv. AF = $\frac{1}{3}$ FD: dan is □ op AB = $\frac{1}{3}$ □ op BD.

Zie PAPPUS *Coll. Mathem.* V. 5. en VIII. 6.

AANMERKING. Hier door kan men ook het Gevolg van het 1. Werkſtuk des IV. Boeks oploſſen.

XVI. VOORSTEL. Fig. 132.

Indien men van de uiteinden A, en B van de middellijn naar twee of meerder ſtippen [D en E] in den omtrek lijnen [AD en DB, AE en EB] trekt, zullen de ſommen der vierkanten op de lijnen naar het zelfde ſtip getogen onderling gelijk zijn.

Het zelfde heeft plaats al worden de lijnen niet van de uiteinden der middellijn, maar uit twee ſtippen [I, K] op gelijke afſtanden van het middelpunt, getrokken.

SIMPSON *Elem. of Geom.* III. B. pr. 20.

BEWIJS. Voor het I. Uit II. 16, vermits door Voorstel VII. van dit Boek ∠∠ ADB en AEB regt zijn.

Voor het II. Men laat de ⊥⊥ DO en EP op de middellijn vallen. Dan is II. 19.

∴ □ op ID ∽ □ op AD — □ op AI — 2 Rh. uit AI . IO
□ op KD ∽ □ op BD — □ op KB — 2 Rh. uit KB . KO
derhalve □ op ID + □ op KD ∽ □ op AD + □ op DB —
□ op AI — □ op KB — 2 Rh. uit AI . IO — 2 Rh. uit KB . KO
dat is, om dat AI = KB, en uit II. 16.
□ op ID + □ op KD ∽ □ op AB — 2 Rh. uit AI en [AI + IO + KO]
∽ □ op AB — 2 Rh. uit AI en AK.
Insgelijks □ op AE + □ op EB ∽ □ op AB — 2 Rh. uit KB en BI:
derhalve, om dat AI = KB en AK = BI
is □ op ID + □ op KD ∽ □ op AE + □ op EB.

XVII. VOORSTEL. Fig. 128.

Lijnen [FA, FE, enz.] uit een stip [F] buiten den cirkel, tot aan den omtrek van den cirkel getrokken, en verlengd, snijden dien omtrek zoo, dat de regthoeken uit elke geheele lijn en haar stuk dat buiten den cirkel valt [uit FA en FD, uit FE en FB] gelijk aan elkander zijn.

St. III. 24. Gev. 1. — L. G. III. 29.

EERSTE BEWIJS. Uit de eigenschappen der regthoekige driehoeken.

BEREIDING. Men trekke de stralen CA, CE, en dan CM ⊥ op AD en CQ ⊥ op FE: vervolgens door F en C, de middellijn FCN.

BEWIJS. In de regthoekige driehoeken CFQ en CEQ, CFM en CAM is (door II. 16. het 4. Gev.) □ op FQ — □ op QE ∽ □ op FM — □ op MA: waaruit, door II. 10. en het IX. Voorstel van dit Boek, het besluit opgemaakt wordt.

TWEEDE BEWIJS. Uit de gelijkvormige driehoeken.

BEREIDING. Trek EA en BD.

BEWIJS. Men toont 1°, dat △ AFE ∽ △ BDF vermits ∠ EFA in beiden gemeen, ∠ EAD + ∠ EBD = 2 L (V. Voorst. 3. Gev.) = ∠ EBD + ∠ DBF: en dus

 ∠ EAD

∠ EAD = ∠ DBF; derhalve door IV. 2. FA : FE = FB : FD: waaruit door IV. 8. het 5. Gev. het Voorstel volgt.

I. AANMERKING. Het blijkt duidelijk, dat dit Voorstel en het XII. in de daad één en het zelfde Voorstel zijn, dat men algemeener op deze wijze zoude kunnen uitdrukken.

„ Indien men twee lijnen trekt, die elkander binnen of „ buiten den cirkel snijden: zijn de regthoeken der stuk„ken van iedere lijn die tusschen het stip daar de lijnen „ elkander snijden en de beide stippen daar elke lijn den „ omtrek snijdt, onderling gelijk."

I. GEVOLG.

De snijlijnen worden door den cirkel in omgekeerde rede gesneden: dat is

AF : EF = FB : FD.

II. AANMERKING. Indien men het eerste bewijs gebruikt volgt dit uit het Voorstel door IV. 8, het 5. Gevolg: en zoo men het 2. Bewijs gebruikt, is het minder een Gevolg, dan de uitdrukking in woorden van dat gedeelte des bewijs waaruit het besluit wordt opgemaakt.

II. GEVOLG. Fig. 128.

Indien het buitenste deel [BF] van eene der lijnen [EF] middel-evenredig is tusschen de beide deelen van eene andere [FA]: zal ook het buitenste deel [FD] van deze middel-evenredig zijn tusschen de beide deelen van den eerstgemelde:

want zoo DF : BF = BF : AD door de onderstelling
en DF : BF = FE : FA door dit Voorstel
is ook BF : AD = FE : FA
of BF : FE = AD : FA
en dus FE — BF : BF = FA — AD : AD
of EB : BF = DF : AD
EB : DF = BF : DA
en dus EB : DF = DF : BF.

VIETA *Operum* 242.

III. GEVOLG. Fig. 129.

Indien de beide lijnen zoodanig getrokken worden, dat het buitenste deel van de eerste staat tot derzelver binnenste deel, als het binnenste deel van de tweede tot derzelver buitenste deel; zullen de buitenste deelen van de eerste en van de twee-

tweede, twee middel-evenredige zijn tusschen de binnenste deelen van de tweede en eerste: want,

indien DK : AK = AP : HP is *componendo.*

DK : DK + AK = AP : AP + HP, of

DK : AD = AP : AH; maar uit dit Voorstel

AD : AH = AP : AK dus

DK : AP = AP : AK = AK : HP.

Of ∺ DK, AP, AK, HP.

III. AANMERKING. Indien men dan twee lijnen in den cirkel *geometrisch* zoodanig trekken kon, dat KD: AK = AP: HP, zoude het vraagstuk om twee middel-evenredige te vinden geometrisch opgelost zijn, en het is hiertoe dat VIETA het vraagstuk gebragt heeft: doch dit is *geometrisch* niet mogelijk. Men kan wel de zaak tot eene meer eenvoudige oplossing brengen: namelijk aldus: Fig. 129. men beschrijve eenen cirkel waarvan de middellijn eene der gegeven lijnen is: men trekke de andere, (de kleinste), HP in den cirkel: men verlenge dezelve zoo dat HL = HP: men trekke vervolgens LC, en PI // LC, en eindelijk door het middelpunt C, de lijn DCKA zoodanig dat AG = KC worde: dan is

AG: AP = GC: PL:

maar AG = ½ KD zoo als PH = ½ PL.

dus AG: KD = PH: PL en dus

KD: AP = GC: PH.

maar AG = KC: dus GC = AK: dus

KD, AP = AK: PH, of

KD, AK = AP: PH: en derhalve

∺ KD, AP, AK, PH: maar men kan de lijn DCKA *geometrisch* niet trekken zoo dat AG = KC zij.

VIETA *Operum* p. 243.

IV. GEVOLG. Fig. 130.

Indien de hoek ABC regt is, en men den regthoek ADCB voltooit; verder door D en A, en door D en C, de lijnen DCG en DAF; en eindelijk uit B, de snijlijn GBOF, zoodanig trek dat BG = OF: zullen AF en GC twee middel-evenredige tusschen AB en BC zijn:

Want daar OF = BG, is OG = BF:

en dus

Regth. FD, AF ∞ Regth. BF, FO ∞ Regth. OG, BG:

∞ Regth. DG GC: en dus

1°. GD: FD = AF: GC: maar (IV. 2.)

GD: FD = AB: FA: dus

2°. AB: FA = FA: GC.

 3°.

3°. GD — AB: GD = FD — FA: FD
of GC: GD = BC: FD
4°: of GC: BC = GD: FD = FA: GC;
derhalve uit 2°. en 4.
AB: FA = FA: GC = GC: BC: en dus
∺ AB, FA, GC, BC.

Indien men dan, AB regthoekig op BC gesteld, en een cirkel die door de stippen A, B, C gaat, getrokken zijnde, den regthoek ABCD voltooit, en DA en DC verlengd zijnde, door het stip B, de lijn GBF zoodanig trekken kon, dat BG = FO, zoude het vraagstuk van twee middel-evenredige lijnen opgelost zijn, en het is tot die vraag dat PHILO van *Byzantium* het gemelde vraagstuk gebragt heeft. Zie TACQUET op EUCL. VI. 13.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 131.

Indien eene snijlijn [ABD] door eene middellijn [GCD] zoodanig ontmoet wordt [in D], dat het stuk [BD] buiten den cirkel gelijk is aan den *radius* des cirkels; zal de eene boog [AG] welken de lijnen van den omtrek afsnijden het drievoud zijn van den anderen boog [BF] insgelijks door dezelve lijnen in den omtrek bepaald.

ARCHIMEDES *Lemma* 8.

BEWIJS. Men trekke GE // AB: en de stralen CE, en CB. Dan is in △△ DBC en ECG, ∠ BDC = ∠ DCB = ∠ CGE = ∠ CEG: maar ∠ DCE = 2 ∠ CGE: derhalve ∠ BCE = ∠ BCD + ∠ DCE = 3 ∠ BCD: d. i. ⌒ BE = 3 ⌒ BF: maar ⌒ AG = ⌒ BE: derhalve ⌒ AG = 3 ⌒ BD.

AANMERKING. Indien men dan, de boog AG gegeven zijnde, de middellijn GCD en eene choorde AD te gelijk zoodanig kon trekken dat de omtrek de choorde AD, door de ontmoeting der middellijn bepaald, zoodanig sneedt in B dat BD = CB, zoude het beroemd vraagstuk om eenen gegeven boog, of hoek, in drie gelijke deelen te snijden opgelost zijn

XIX. VOORSTEL. Fig. 155.

Indien men op den radius [CH] van eenigen cirkel een stip [I] neemt, en op den zelven verlengd, een ander stip [A] buiten den cirkel, zoodanig gesteld, dat de *radius* des *cirkels* middel-evenredig zij tusschen de afstanden [CI, CA] des middelpunts van het eerste en van het tweede stip; indien men verder uit het laatstgemelde eene snijlijn trekt, zal men hebben

GI [of *g*I]: GA [of *g*A] = HI: HA.

L. G. III. 34.

BE-

BEREIDING. Men trekke de stralen CG, C*g*.

BEWIJS. Om dat 1°. CI : CH = CH : CA : is
2°. CI : CG = CG : CA : en derhalve
Δ CGI ∽ Δ GCA : en dus
3°. GI : GA = CI : CG of CH.
Uit N°. 1. *dividendo.*
4°. CI : CH = CH — CI : CA — CH :
d. i. CI : CH = IH : AH : en dus uit 3°.
5°. GI : GA = IH : AH.

XX. VOORSTEL. Fig. 128.

Indien men uit een stip F buiten den cirkel eene raaklijn [FI] en eene snijlijn [FA] naar welgevallen trekt; is het vierkant op de raaklijn [FI] gelijk aan den regthoek uit de snijlijn [FA] en haar gedeelte [FD] dat buiten den cirkel valt: en omgekeerd.

EUCL. III. 36, 37. — St. III. pr. 24. — L. G. III. 30.

I. AANMERKING. Wij beschouwen dit Voorstel als een onmiddelijk gevolg van het XVII: want wanneer FE eene raaklijn wordt, vallen de stippen E en B op elkander en beide op het stip T: zoo dat FB = FE = FT, en regthoek uit FA, FD = □ op FT. Anderen, zoo als EUCLIDES, maken van dit Gevolg het hoofdvoorstel, en van ons XVII. Voorstel een Gevolg: en dan wordt het bewezen, of uit de eigenschappen der regthoekige driehoeken, of uit de gelijkvormige driehoeken. in het eerste geval is door II. 16. Gevolg 1. □ op FT ∞ □ op FC — □ op TC ∞ □ op FC — □ op CN ∞ Regth. uit FN, FS (II. 7.) en dan volgt het besluit uit Voorstel XVII. — In het tweede geval volgt het door IV. 2. en IV. 8. Gevolg 5. uit de gelijkvormigheid der driehoeken TFB en TFE: want ∠ TFE is gemeen in beiden: en door het IIX. Voorstel van dit Boek is ∠ FTB = ∠ TEB.

II. AANMERKING. Hierop rust de oplossing van het 11 Werkstuk van het I. Boek, en ook het Bewijs van de 1. Oplossing van het 11. in het II. Boek.

I. GEVOLG.

De raaklijn is middel-evenredig tusschen de snijlijn en haar gedeelte dat buiten den cirkel valt.

BEWIJS. Uit IV. 8. Gev. 6.

II. GEVOLG.

De twee raaklijnen, die men uit een ſtip naar den omtrek eens cirkels trekken kan, zijn onderling gelijk.

III. AANMERKING. Dit hadden wij reeds in het XI. Voorſtel, 4. Gevolg, bewezen.

XXI. VOORSTEL. Fig. 128.

Indien de raakpunten [T, I] van twee gelijke raaklijnen [FT, FI] door eene choorde [TI] vereenigd worden, en men uit het ſtip [F] waar de beide raaklijnen elkander ontmoeten, eene ſnijlijn [FE] naar welgevallen trekt, die den cirkel [in B] en de gemelde choorde [in O] ſnijdt, zal die ſnijlijn in *harmoniſche* evenredigheid geſneden worden door den cirkel [in B] en de gemelde choorde [in O].

KRAFFT *Geom. Sublim.* §. 77.

BEWIJS. Zij FN ⊥ op TI: en derhalve gaande door het middelpunt, dan is

□ op FI ∞ □ op FO + □ op OI — 2 Rh. uit OI, OP (II. 19.)
∞ □ op FO + Rh. uit OI en (IO — 2 OP)
∞ □ op FO + Rh. uit OI en (IP — OP)
∞ □ op FO + Rh. uit OI en (TP — OP)
∞ □ op FO + Rh. uit IO en TO.

Maar □ op FI ∞ Rh. uit FE . BF (Voorſt. XX.)
en Rh. uit IO en TO ∞ Rh. uit BO en EO (Voorſt. XII.); derhalve,
□ op FO + Rh. uit BO en EO ∞ Rh. uit FE . BF.
Maar □ op FO + Rh. uit BO, EO ∞ □ op FB + 2 Rh. uit BF, BO + □ op BO + Rh. uit BO, EO (II. 4.)
en Rh. uit BF, FE ∞ □ op BF + Rh. uit FB, BE (II. 5. Gev. 3.)
Gevolgelijk □ op BF + 2 Rh. uit BF, BO + □ op BO + Rh. uit BO, OE ∞ □ op BF + Rh. uit BF, BE
en Rh. uit BF, BO + Rh. uit BO en (BF + BE) = Rh. uit FB, BE:
d. i. Rh. uit BF. BO + Rh. uit BO, FE ∞ Rh. uit FB, BE
en Rh. uit BO, FE ∞ Rh. uit FB, OE:
derhalve BF : FE = BO : OE
of BF : FE = FO — BF : EF — FO:
derhalve III. Bep. 23.
BF, FO, EF in *harmoniſche* evenredigheid.

IV.

IV. AFDEELING.

OVER DE CIRKELS DIE ELKANDER RAKEN OF SNIJDEN.

XXII. VOORSTEL.

Cirkels die zich ſnijden of raken hebben het zelfde middelpunt niet.

EUCL. III. 5, 6.

ALGEMEENE AANMERKING. Dit Voorſtel en de drie volgende rusten op dit grondbeginſel, dat twee cirkels, die elkander raken of ſnijden, juist zoo vele ſtippen gemeen hebben, als er ſtippen zijn in welke zij zich raken, of ſnijden; gevolgelijk dat de lijnen uit die ſtippen naar ieder middelpunt getrokken, gelijk zullen zijn.

BEWIJS. Voor de cirkels die elkander ſnijden Fig. 133; voor die welke elkander inwendig raken Fig. 134; voor die welde elkander uitwendig raken, Fig. 135; voor deze laatſte ſpreekt de zaak van zelf, daar de beide cirkels geheel buiten elkander ſtaan: voor de twee eerſte gevallen wordt het bewijs opgemaakt uit de ongerijmdheid die voortvloeit met het tegendeel te ſtellen; en die ongerijmdheid wordt uit de gelijkheid der ſtralen opgemaakt; want dan zoude moeten zijn CA = BC = CE:

XXIII. VOORSTEL.

Zoo twee cirkels elkander inwendig, of uitwendig raken, gaat de lijn, die de beide middelpunten vereenigt, ook door het ſtip van aanraking.

EUCL. III. 11, 12.

BEWIJS. Voor beiden uit het ongerijmde. Zoo de cirkels elkander *inwendig* raken, Fig. 134, en het geſtelde geen plaats heeft: laat dan I buiten de lijn FA het middelpunt zijn van den cirkel ADE: trek AI: dan moest (I. 19.) AI + FI > AF of > FB: d. i. ID + FI, of DF > FB zijn: dat onmogelijk is. Zoo de aanraking uitwendig is, (Fig. 135.) laat de lijn Cf, die de middelpunten vereenigt buiten A vallen: dan moet (I. 19.) CD + Bf > Cf zijn, dat onmogelijk is.

AANMERKING. Men kan thans de 17, 18, 19 Werkstukken van het V. Boek oplossen.

XXIV. VOORSTEL.

Een cirkel raakt eenen anderen cirkel slechts in een stip.

EUCL. III. 13. — St. III. pr. 5, 6.

BEWIJS. Uit het ongerijmde. Zoo de aanraking inwendig geschiedt, Fig. 134, laten B en A de twee stippen van aanraking zijn: en (Voorstel XXIII.) F en C de twee middelpunten: dan moest F B = FA = FC + CB zijn dat (I. 19.) onmogelijk is. Zoo de aanraking uitwendig is, Fig. 135, laten A en D de twee stippen van aanraking zijn: dan moest $cA + Af = cD + Df$: dat (I. 19.) onmogelijk is.

AANMERKING. Het blijkt dat zoo de afstand der middelpunten gelijk is aan de som der stralen, de cirkels zich uitwendig raken: en zoo dezelve gelijk is aan het verschil der stralen, raken zij zich inwendig.

L. G. II. 13, 14.

XXV. VOORSTEL.

Twee cirkels die elkander snijden, snijden zich in twee stippen, welke zoodanig geplaatst zijn dat de lijn die dezelve vereenigt loodregt staat op de lijn die door de middelpunten van beide de cirkels gaat, en door deze in twee gelijke deelen gedeeld wordt; en zij kunnen elkander in niet meer dan in twee stippen snijden.

EUCL. III. 10. — St. III. 4. Gev. 2. — L. G. II. 11.

I. GEDEELTE. Fig. 137. Indien de beide cirkels maar een stip gemeen hadden zouden zij zich slechts raken: dus, daar zij zich snijden, snijden zij zich ten minsten in twee stippen.

De stippen kunnen niet staan aan den zelfden kant van de lijn, die de beide middelpunten vereenigt: want dan zoude men aan éénen kant uit een ander stip dan het middelpunt twee gelijke lijnen kunnen trekken dat onmogelijk is (door X. Voorstel).

De stippen A, F zullen dan aan verschillende kanten vallen, en dan volgt het Voorstel uit I. 27. Gevolg 4.

II. GEDEELTE. Fig. 136. Uit het ongerijmde: want dan moesten de beide cirkels een en het zelfde middelpunt hebben; dat onmogelijk is: door het X. Voorstel.

AAN-

AANMERKING. Het blijkt uit de figuur 1°. dat de afstand C D der twee middelpunten kleiner is dan de som der twee stralen C H, D G: 2°. dat de grootste straal C H kleiner is dan de afstand C D der twee middelpunten, en de kleinste straal D G te samen genomen. En dit heeft bij het snijden van twee cirkels altijd plaats.

L. G. II. 12.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 134, 135.

Indien twee cirkels elkander, het zij inwendig, het zij uitwendig, raken, en er uit het stip van aanraking [A] eene lijn [A L M] getrokken wordt die ze beide snijdt: zullen de hoeken [A C L en A F M] in het middelpunt [C en F] van iederen cirkel gevormd door de lijnen [A C, C L en A F, F M] welke uit het middelpunt naar het stip van aanraking [A] en naar de stippen van snijding [L en M] getrokken worden, aan elkander gelijk zijn.

PAPPUS *Collect. Mathem.* IV. *Lemma ad prop.* 9.

BEREIDING. Men vereenige de middelpunten door de lijn F C, die, zoo noodig verlengd, door het stip van aanraking A gaat (Voorst. XXIII).

BEWIJS. Om dat in △△ A F M, C A L, ∠ C A L = ∠ F A M en C A = C L, F A = F M: en dus A C: C L = A F: F M, is (IV. 2.) C L // F M: en derhalve ∠ A C L = ∠ A F M.

AANMERKING. Wij zullen in VII. 10. Gev. 2 toonen dat, wanneer ∠ A C L = ∠ A F M, de bogen A D L en A B M de zelfde rede hebben tot de geheele omtrekken waarvan zij deelen zijn, dat is dat zij onderling *gelijkvormig* zijn. Ook luidt dit Voorstel aldus bij PAPPUS. „ Als twee cirkels elkander inwendig of uitwendig raken, snijdt de lijn „ die uit het raakpunt genomen wordt, van de zelve gelijkvormige bogen af."

ZESDE BOEK.

OVER DE VEELHOEKEN IN EN OM DEN CIRKEL BESCHREVEN.

INLEIDING.

I. BEPALING.

Eene figuur wordt gezegd in eene andere figuur te ſtaan, of in dezelve beſchreven te zijn, als de toppen van hare hoeken op de zijden van die andere figuur rusten.

En dus wordt eene figuur gezegd in eenen cirkel te ſtaan, of in denzelven beſchreven te zijn, als de toppen van hare hoeken op den omtrek rusten: en de cirkel wordt gezegd in eene figuur beſchreven te zijn, als zijn omtrek alle de zijden raakt.

EUCL. IV. Bep. 1, 3, 5. — St. IV. def. 1.

AANMERKING. Volgens het geen wij in het XXXVIII. Voorſtel van het II. Boek bewezen hebben, kan men (Fig. 82), in iederen regelmatigen veelhoek zoo vele andere gelijkvormige veelhoeken beſchrijven als men wil, doch die alle van verſchillende grootte zijn zullen. Wanneer men echter van veelhoeken in veelhoeken beſchreven, in het algemeen, 'ſpreekt, behoort men van veelhoeken te ſpreken, die eene bepaalde grootte hebben: in het gevolg nu van het XXVII. Voorſtel van het IV. Boek hebben wij gezien dat dit plaats heeft als de toppen E, F, G, I, L op het midden der zijden AD, DC, CB, BQ, QA rusten: waarom men dan ook dien veelhoek, als bij uitſtek, den veelhoek in den veelhoek beſchreven noemen kan. Zie Voorſt. XIII.

II. BEPALING.

Eene figuur wordt gezegd om eene andere figuur te ſtaan, of, om dezelve beſchreven te zijn, als alle hare zijden de toppen van alle de hoeken van die andere figuur raken.

En dus, wordt een cirkel gezegd om eene figuur beſchreven te zijn, of om dezelve te ſtaan, als de omtrek van den cirkel de toppen van alle de hoeken raakt: en eene

eene figuur wordt gezegd om den cirkel beschreven te zijn, als alle hare zijden den omtrek van den cirkel raken.

EUCL. IV. Bep. 2, 4, 6. — St. IV. Bep. 2.

I. AANMERKING. Wij zullen in het II. Gevolg van het XIV. Voorstel zien hoe een regelmatige veelhoek om eenen regelmatigen veelhoek beschreven wordt.

II. AANMERKING. Wij zullen somtijds, kortsheidshalve de veelhoeken *in* of *om* den cirkel beschreven noemen, den eersten *den veelhoek in*, den anderen *den veelhoek om*.

III. BEPALING.

Wanneer een regelmatige veelhoek *in* of *om* eenen cirkel beschreven is, en insgelijks een ander die een dubbeld getal zijden heeft; noemen wij den eerstgemelden den *voorgaanden*, den anderen den *volgenden veelhoek*.

A X I O M A.

Een veelhoek kan noch in eenen veelhoek, noch om eenen veelhoek, beschreven worden, ten zij deze evenveel zijden hebbe.

I. AFDEELING.

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN DER VEELHOEKEN IN EN OM DEN CIRKEL BESCHREVEN.

I. VOORSTEL. Fig. 141, 139.

Geen figuur kan in eenen cirkel beschreven worden, ten zij er, in of buiten dezelve, eenig stip [C] zoodanig gesteld zij, dat alle de lijnen van het zelve naar de hoeken van de figuur getrokken [CB, CD, CA enz.], onderling gelijk zijn.

En geen figuur kan om eenen cirkel beschreven worden ten zij in dezelve eenig stip [C Fig. 139.] zoodanig gesteld zij, dat de loodlijnen [CI, CK, CL] uit het zelve op alle de zijden van de figuur getogen, onderling gelijk zijn.

BEWIJS voor het I. Uit den aard van den cirkel en Bepaling I.

Voor het II. Uit de II. Bepaling en V. 4.

II. VOORSTEL.

Geen figuur kan om eenen cirkel beschreven worden, ten zij, indien hare zijden *even* in getal zijn, de som van de eerste, derde, vijfde, zevende, enz. gelijk zij aan de som der tweede, vierde, zesde, achtste, enz.; en, indien zij *oneven* in getal zijn, ten zij de som der eerste, derde, vijfde, zevende, enz. gelijk zij aan de som van de tweede, vierde, zesde, achtste, enz. en daarenboven van tweemaal dat stuk der laatste zijde dat tusschen de eerste en het stip van aanraking begrepen is.

PITOT. *Mem. de l'Acad. de Paris.* A. 1725. p. 45.

BEWIJS. Uit de II. Bepaling, en V. 11. Gevolg 4.

GEVOLG.

Er kan dus nooit een parallelogram of een regthoek, maar wel eene ruit of een vierkant om eenen cirkel beschreven worden.

III. VOORSTEL.

Er is geen driehoek, of dezelve kan in of om eenen cirkel beschreven worden: en dus ook geen, of er kan een cirkel om of in denzelven staan.

BEWIJS. I. Gedeelte. De inschrijving des driehoeks in den cirkel, en dus de beschrijving van dezen om denzelven, blijkt uit V. 2.

II. Gedeelte. De beschrijving des driehoeks om den cirkel.

BEREIDING. Fig. 139. Stel dat de lijnen BC, en CD, welke de hoeken ABD en ADB in twee gelijke deelen snijden, in C samen komen: trek CA; en de loodlijnen CI, CK, CL: men moet bewijzen (I. Voorstel) dat CI = CK = CL.

BEWIJS. Uit I. 22.

I. AANMERKING. De Bereiding en het Bewijs van het II. gedeelte van dit Voorstel leveren de volgende eigenschappen der driehoeken op.

I.

I. GEVOLG.

De lijnen, welke de hoeken van eenen driehoek in gelijke deelen verdeelen, komen in één stip binnen den driehoek te samen: en de loodlijnen, die uit hetzelve op de zijden des driehoeks getrokken worden, zijn allen gelijk aan elkander.

L. C. §. 502.

II. AANMERKING. De driehoek is de eenige figuur die altijd in of om den cirkel beschreven kan worden: en in of om welke men altijd eenen cirkel beschrijven kan.

III. AANMERKING. Men kan thans het 2 en 4 Werkstuk van het VI. Boek oplossen.

II. GEVOLG.

De inhoud eens driehoeks wordt uitgedrukt door deszelfs omtrek gemultipliceerd door den halven *radius* van den cirkel daarin beschreven.

L. G. III. 82. *Scholie.*

BEWIJS. △ ABD ∞ △ ABC + △ BCD + △ ACD ∞ (IV. 9. Gev. 6.) AB × ½ CI + BD × ½ CK + AD × ½ CL ∞ [AB + BD + DA] × ½ CL ∞ *omtrek* × ½ *radius*.

III. GEVOLG.

Wanneer eene lijn [AC] eenigen hoek [BAD] in twee gelijke deelen deelt, zal ieder stip [C] op die lijn waaruit men loodlijnen [CI, CL] op de beenen des hoeks laat vallen, het middelpunt zijn eens cirkels die de beide beenen zal raken, en van denzelven, gelijke deelen, van den top te beginnen, zal afsnijden.

D. G. §. 331.

IV. VOORSTEL. Fig. 127.

Wanneer een driehoek [ABD] in eenen cirkel beschreven is, is de regthoek uit twee zijden [AB. BD] van gelijken inhoud als de regthoek uit de loodlijn [BF] op de derde zijde [AD] neergelaten en de middellijn van den cirkel.

L. G. III. 32.

BEWIJS. Trek AI, dan is △ ABI ∽ △ BFD, om dat ∠ BAI = L = ∠ BFD en ∠ AIC = ∠ BDF: en dus ∠ ABI = ∠ EBD: derhalve (IV. 2.) AB : BI = BF : BD: en gevolgelijk (IV. 8. Gev. 5.) Regth. uit AB . BD ∞ Regth. uit BI . BF.

I. GEVOLG.

De inhoud eens driehoeks wordt uitgedrukt door het product der zijden, gedivideerd door de dubbelde middellijn van den omschreven cirkel.

BEWIJS. Een driehoek immers kan altijd gehouden worden als in eenen cirkel beschreven te zijn (Voorst. III.): en uit dit Voorstel is AB × BD × AD = BI × BF × AD: derhalve $AD . BF = \frac{AB.BD.AD}{BI}$. Maar △ ABD ∞ $\frac{AD, BF}{2}$ (IV. 9. Gev. 6): derhalve △ ABD ∞ $\frac{AB.BD.AD}{2 BI}$.

L. G. III. 32. Cor.

II. GEVOLG.

Indien verschillende driehoeken in den zelfden cirkel, of in gelijke cirkels, beschreven zijn: staan hunne inhouden tot elkander als de producten hunner zijden.

AANMERKING. Deze twee uitdrukkingen van den inhoud eens driehoeks: die namelijk van het eerste Gevolg van dit en van het 2. des voorgaanden Voorstels, hoe verschillende ook in schijn van de uitdrukking in IV. 9. Gev. 6. en in II. 13. Gev. 1. begrepen, zijn, echter op deze gevestigd: wij zullen in IX. 8 en 9. nog twee andere uitdrukkingen voor den inhoud eens driehoeks opgeven. Alle die uitdrukkingen komen dikwerf te pas.

V. VOORSTEL.

Niet alle onregelmatige, maar wel alle regelmatige veelhoeken kunnen in of om den cirkel beschreven worden.

L. G. §. 530.

BEWIJS. Voor het I. uit het 1. en 2. Voorstel: en voor het II. uit het 1. en 2. Voorstel, en II. 32.

I. AANMERKING. Het eerste en tweede Voorstel van dit Boek, gepaard met het 32. van het II. toonen genoeg aan hoe men in en om eenen gegeven regelmatigen veelhoek eenen cirkel beschrijven moet: dus kan men het 13. en 14. Werkstuk van het VI. Boek oplossen.

II. AANMERKING. Wij spreken hier, en in de volgende Voorstellen, van het VIII. af, van *regelmatige* veelhoeken in en om den cirkel beschreven: doch CLAVIUS merkt te regt aan (op EUCL. IV. 16.), dat een gelijkzijdige veelhoek in den cirkel beschreven altijd gelijkhoekig, en dus regelmatig is: doch dat een gelijkzijdige veelhoek om den cirkel beschreven, niet altijd daarom ook gelijkhoekig is, ten zij het

het getal der zijden oneven zij: of, zoo het even is, twee naastliggende hoeken gelijk zijn, of wel twee hoeken, waarvan, de eene voor den *eersten* genomen zijnde, de andere eene even plaats bekomt: bijv. de 4, 6 enz. Verder, dat een gelijkhoekige veelhoek, om den cirkel beschreven, altijd gelijkzijdig is, doch dat een gelijkhoekige veelhoek in den cirkel beschreven het niet altijd is, ten zij het getal der zijden oneven zij, of, indien het even is, ten zij twee naastliggende zijden gelijk zijn, of twee zijden het zijn, waarvan, de eene voor de *eerste* genomen zijnde, de andere eene even plaats bekomt: bijv. de 4, 6, enz.

VI. VOORSTEL. Fig. 140.

In alle vierhoeken [ABCD], in den cirkel beschreven, zijn de overstaande hoeken te samen genomen [ABC en ADC; BAD en BCD] gelijk aan twee regten.

EUCL. III. 22. — St. III. 12

BEWIJS. Uit V. 5. Gev. 3.

AANMERKING. Er kan dus geen vierhoek in den cirkel beschreven worden, of hij moet deze eigenschap bezitten: en dus kunnen er nooit eene ruit, of een parallelogram in den cirkel beschreven worden: maar wel een vierkant, of een regthoek.

VII. VOORSTEL. Fig. 140.

In alle vierhoeken [ABCD], in den cirkel beschreven, is de som van de regthoeken uit de tegenoverstaande zijden [BA en DC, AD en CB] gelijk aan den regthoek der *diagonalen* [AC en BD].

L. G. III. 38. — TACQUET in zijn scholium op EUCLIDES VI. 16.

BEREIDING. Men trekt BG zoodanig dat ∠ ABG = ∠ DBC: waaruit, en uit V. 5. Gev. 1. volgt, 1°. Δ ABG ∾ Δ DBC, en Δ GBC ∾ Δ ABD: want ∠ BCG = ∠ ADB: V. 5. Gev. 1.: ∠ ABG = ∠ DBC: dus, wederzijds aftrekkende ∠ GBD, is ∠ ABD = ∠ GBC.

BEWIJS. Uit de gelijkvormigheid der ΔΔ ABG en DBC: vervolgens van Δ GCB en Δ ABD, en IV. 8. Gevolg 5; is Regth. DC . AB ∞ Regth. AG . BD en Regth. BC . AD ∞ Regth. CG . BD: waaruit, en uit II. 5, het besluit wordt opgemaakt.

I. AANMERKING. Dit Voorstel wordt het Voorstel van PTOLEMAE-

MAEUS genoemd, om dat PTOLEMAEUS hetzelve, heeft uitgevonden, of immers de eerste is die het voorgedragen en gebruikt heeft, om de choorden van bogen te berekenen; welke berekening wij in het VIII. Boek, XII. Voorstel zullen aantoonen.

Zie PTOLEMAEUS *Almagestum* L. *Cap.* 9.

II. AANMERKING. Indien men dit Voorstel met het voorgaande Voorstel, en met het 4. Gev. van het V. Voorstel en de 4. Aanm. op het XII. Voorstel in het V. Boek, vergelijkt, zal men zien dat er in eenen vierhoek, op dat dezelve in den cirkel beschreven zoude kunnen worden, drie dingen plaats moeten hebben: doch zij zijn zoodanig, dat zoodra eene van drieën plaats heeft, de twee andere ook plaats hebben.

I. GEVOLG.

Een vierkant kan in en om den cirkel beschreven worden.

III. AANMERKING. Men lost thans het 6, 7, 8, 9 en 10 Werkstuk van het VI. Boek op.

II. GEVOLG.

De diagonalen [BD, AC] eens vierhoeks, in den cirkel beschreven staan tot elkander, als de sommen van de regthoeken der zijden die aan derzelver uiteinden samen komen.

L. G. III. 33. *Scholie.*

BEREIDING. De zelfde als voor het Voorstel; mits BG verlengende tot in O, waar door ⌒ OC ≐ ⌒ AD: trekkende OC, nemende verder ⌒ BP ≐ ⌒ AD, en trekkende CP.

BEWIJS. △ ABD ∽ △ BGC: derhalve BD : BC ≐ AB : BG: en Rh. uit BG . BD ∞ Rh. uit BC . AB. Maar △ GCO ∽ △ DBC: derhalve BD : CO ≐ DC : OG en Rh. uit OG . BD ∞ Rh uit CO . DC: dat is Rh. uit OG . BD ≐ Rh. uit AD . DC: en gevolgelijk Rh. uit BG . BD + Rh. uit OG . BD, dat is Rh. uit BO . BD ∞ Rh. AB . BC + Rh. uit AD . DC.

Op gelijke wijze is Rh. uit PC . CA ∞ ≐ Rh. uit AB . AD + Rh. uit BC . CD.

Maar ⌒ PB + ⌒ BC ≐ ⌒ BC + ⌒ CO: d. i. ⌒ PBC ≐ ⌒ BCO: en dus PC ≐ BO: gevolgelijk Rh. uit BO . BD : Rh. uit PC . CA ≐ BD : CA: en derhalve BD : CA ≐ Rh. uit AB . BC + Rh. uit AD . DC : Rh. uit AB . AD + Rh. uit BC . CD.

III. GEVOLG.

De oppervlakte, of inhoud eens vierhoeks, in den cirkel beschreven, wordt uitgedrukt door het product van eene der diagonalen en de som des regthoeks van de zijden die aan den eenen kant, en des regthoeks der zijden die aan den anderen kant van die diagonaal staan, te samen genomen: gedivideerd door de dubbelde middellijn.

BEWIJS. *Trapezium* ABCD ∞ Δ ABC + Δ ACD ∞ (Voorstel IV. Gev. 1.)

$$\frac{AB.BC.AC + AD.DC.AC}{2BI} \infty \frac{AC(AB.BC + AD.DC)}{2BI}$$

IV. GEVOLG.

De vier zijden des vierhoeks gegeven zijnde, kan men de beide diagonalen vinden.

BEWIJS. Dat men, om te verkorten, de zijden door a, b, c, d en de diagonalen door x en y uitdrukke; dan is 1°. door dit Voorstel $xy = ac + bd$.

2°. Door Gevolg 2, $\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + ac}$: uit welke twee vergelijkingen men door de stelkunde opmaakt

$$x^2 = \frac{(ac - bd)(ab + bc)}{ab + cd} \text{ en}$$

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

L. G. p. 297.

IV. AANMERKING. CASTILLON heeft doen zien (*Mem. de l'Acad. de Berlin* 1766. p. 357) dat het *Theorema Pythagoricum*, of het XVI. Voorstel van ons II. Boek, gelijk ook het XIX, uit dit Voorstel van PTOLEMAEUS afgeleid kunnen worden.

Men stelle immers dat ABC de driehoek zij: men beschrijve om denzelven eenen cirkel, neme BD = AC, en trekke AD, DC: dan is door dit Voorstel

I. Rh. uit AB . DC + Rh. uit AD . BC ∞ Rh. uit AC . BD ∞ (in dit geval) □ op AC.

Indien nu Δ ABC regthoekig is in B, wordt AC eene middellijn (V. 7.); BD = AC wordt het ook, en daar door AB = DC, AD = BC: en het voorstel van PTOLEMAEUS wordt in dit geval

□ op AC ∞ □ op AB + □ op BC,

dat is, wordt het *Theorema Pythagoricum*, of II. 16.

II. Indien nu Δ ABC niet regthoekig is; zal echter om dat (V. 5. Gev. 1) ∠ BDC = ∠ ABD, DC // AB zijn: men trekke verder AE // BC; dan is EC = AB, BC = AE = AD; derhalve Rh. uit

uit BC . AD ∞ □ op BC: waar door het Voorstel van PTOLEMAEUS voor dit geval wordt

Rh. uit AB . DC + □ op BC ∞ □ op AC.

III. Men trekke verder AH ⊥ op DC: dan is, om dat AD = AE: DE = 2 HE. Men trekke AF ⊥ FB. Maar ∠ AED = ∠ BCD = ∠ FBA; en derhalve △ AHE ∽ △ AFB: en (IV. 10):

Rh. uit HE . AB ∞ Rh. uit BF . AE ∞ Rh. uit FB . BC ∞ Rh. uit FB . AD.

Maar, Rh. uit AB . DC ∞ Rh. uit AB en (DE + EC) ∞ Rh. uit AB . DE + Rh. uit AB . EC ∞ 2 Rh. uit AB . HE + □ op AB ∞ 2 Rh. uit FB . BC + □ op AB: waar door N°. II. wordt

IV. 2 Rh. uit FB . BC + □ op AB + □ op BC ∞ □ op AC: het geen het XIX. Voorstel van her II. Boek oplevert, indien △ ABC stomphoekig is.

Maar zoo ∠ ABC scherp is, valt AF binnen den △ ABC: en dan wordt het *facit*

□ op AB + □ op BC — 2 Rh. uit FB . FC ∞ □ op AC.

V. AANMERKING. Het blijkt dan wederom hoe men eene en de zelfde waarheid uit verschillende grondbeginsels kan afleiden. Wijsgerig echter gesproken, is het bewijs, uit het Voorstel van PAPPUS (II. 20,) ontleend, beter dan dat het welk uit het Voorstel van PTOLEMAEUS afgeleid wordt: voor dit laatstgemelde, immers, moet men nog de eigenschappen des cirkels kennen: en, wederom wijsgerig gesproken, is het bewijs van het Voorstel van PYTHAGORAS afzonderlijk, en van II. 19. insgelijks afzonderlijk, en in den trant van EUCLIDES, nog beter; vermits men in het *Euclideaansch* bewijs alles gemakkelijk en duidelijk uit de eerste grondbeginsels afleidt. Het heeft echter grootelijks zijn nut om bij alle gelegenheden, te doen opmerken, hoe naauw alle die verschillende grondbeginsels met elkander verbonden zijn, en tot de zelfde waarheden leiden.

II. AFDEELING.

OVER DE REGELMATIGE VEELHOEKEN IN EN OM DEN CIRKEL BESCHREVEN.

VIII. VOORSTEL. Fig. 141 en 142.

Wanneer een regelmatige veelhoek in den cirkel beschreven is, 1°. verdeelen de zijden den omtrek in zoo vele gelijke bogen, als er zijden in den veelhoek zijn: 2°.

2°. die zijden zijn de choorden van die bogen: 3°. het middelpunt van den cirkel is dat van den veelhoek: 4°. de radius van den cirkel is die van den veelhoek zelven: en 5°. de choorde, die twee zijden van eenen gegeven veelhoek bespant, is de zijde van een' veelhoek die de helft van het getal zijden des gegeven veelhoeks bezit, indien het getal zijden in dezen *even* is.

BEWIJS. Is uit de Bepalingen en II. 32. klaarblijkelijk.

I. AANMERKING. Ik zeg in N°. 5. dat het getal der zijden in den gegeven veelhoek *even* moet zijn, op dat de choorde, die twee zijden van denzelven bespant, de zijde zoude zijn van eenen nieuwen veelhoek. Immers, een *oneven* getal laat zich niet door 2 deelen: maar in Fig. 142, maken de drie lijnen of choorden, FD, DA, AF, die ieder twee zijden van den regelmatigen zeshoek bespannen eenen regelmatigen, d. i. gelijkzijdigen, driehoek uit.

I. GEVOLG.

De zijde EF eens regelmatigen veelhoeks, in den cirkel beschreven, is de choorde van den middelpuntshoek [FCE], of van eenen hoek die gelijk is aan $\frac{4R}{g}$ (II. Bep. 14. het 1. Gevolg).

II. GEVOLG.

De zijde van den zeshoek, in den cirkel beschreven, is gelijk aan den radius van den cirkel. (II. 14. het 2. Gevolg).

II. AANMERKING. Hier door kan men het 3. en het 15. Werkstuk van het VI. Boek oplossen

IX. VOORSTEL.

De zijden en de omtrekken van gelijkvormige regelmatige veelhoeken, in, of om, cirkels van verschillende middellijnen beschreven, staan in de zelfde rede als de middellijnen van die cirkels: doch hunne inhouden zijn in verdubbelde rede der middellijnen.

EUCL. XII. 1.

BEWIJS. Uit het 6. Voorstel: en uit II. 32. en IV. 27.

I. AANMERKING. Hierop, en op IV. 2, steunt het gebruik van die lijnen op den proportionaal-passer welke met het

 woord

woord *Pol.* of *Polygonen*, bestempeld zijn, en dienen om gemakkelijk alle *Polygonen*, of Veelhoeken, in gegeven cirkels, of ook op gegeven lijnen, te beschrijven.

Wanneer de cirkel gegeven is, is de *radius* gegeven: de *radius* nu van den cirkel, tot welken de lijnen der *Polygonen* op den proportionaal-passer behoren, is de zijde van den zeshoek op denzelven (VIII. Voorstel Gev. 1).

Wanneer de lijn gegeven is waarop de veelhoek geplaatst moet worden; moet de *radius* van den cirkel waarin die veelhoek zal staan, d. i. de *radius* van den veelhoek zelven, gevonden worden; en die wordt het door de lijn van den *zeshoek* op den proportionaal-passer; deze bepaald zijnde, beschrijft men op de gegeven zijde eenen gelijkbeenigen driehoek, waarvan de gevonden *radius* het been is: het toppunt is het middelpunt des te beschrijven cirkels.

II. AANMERKING. Het beschrijven van veelhoeken op eene lijn hangt af van derzelver beschrijving in den cirkel. Zie VI Boek, Werkstuk 18

X. VOORSTEL. Fig. 141.

Indien men uit de uiteinden [F en E] der zijden eens regelmatigen veelhoeks in den cirkel beschreven, doch waarvan het getal der zijden *oneven* is, lijnen [FB, EB] naar den top des tegenoverstaanden hoeks [ABD] trekt, zullen dezelve met de gemelde zijde eenen gelijkbeenigen driehoek [FBE] uitmaken, waarin een der hoeken [BFE of BEF] op de grondlijn tot den hoek [FBE] in den top staat, als $\frac{g-1}{2} : 1$.

TACQUET op EUCL. IV. 11. *Schol.* 1.

BEWIJS. Dat △ FBE gelijkbeenig is volgt uit V. 5. het 1. Gev.: het overige uit de beschouwing dat ∠ FBE = ½ ∠ FCE = ½ × $\frac{4L}{g}$: en zoodra de hoek FBE bekend is, zijn de hoeken BFE, FEB het ook, uit I. 15. Gev. 2.

I. AANMERKING. Het zelfde heeft ook plaats al is de veelhoek niet in den cirkel beschreven, en is dus eene algemeene eigenschap van alle de regelmatige veelhoeken wier zijden *oneven* in getal zijn.

GEVOLG.

De hoeken op de grondlijn zijn dus veelvouden van den hoek

hoek in den top; en zijn gevolgelijk tot dien hoek in den (gelijkzijdigen) driehoek . . . . = 1 : 1.
——— vijfhoek . . . . 2 : 1.
——— zevenhoek . . . . 3 : 1.
——— negenhoek . . . . 4 : 1.

II. AANMERKING. Men kan thans het 11 en 12 Werkstuk van het VI. Boek oplossen.

XI. VOORSTEL. Fig. 142.

Indien men uit het middelpunt eens cirkels eene loodlijn [C K] laat vallen op de zijde [E F] van eenen regelmatigen veelhoek in denzelven beschreven, doch wiens zijden *even* in getal [*g*] zijn, en men vervolgens die loodlijn wederzijds tot aan den omtrek [in H en I] verlengt, om er eene middellijn van te maken; zal die middellijn de zijde [E F] op welke zij valt in twee gelijke deelen [F K, K E] verdeelen: en de lijnen [F H, E H] die men uit de uiteinden van de gemelde zijde [E F] naar het eind [H] van die middellijn trekt, zullen met die zijde eenen gelijkbeenigen driehoek uitmaken, waarin de hoeken [H E F of H F E] op de grondlijn tot den hoek [E H F] in den top zijn zullen, zoo als $\frac{g-1}{2} : 1$.

TACQUET op EUCL. IV. 11. *Scholie* 1.

BEWIJS. Het zelfde als voor het voorgaande Voorstel.

GEVOLG.

De hoeken op de grondlijn zijn dan hier veelvouden van dien in den top, op deze wijze:
De eerstgemelden staan tot de laatstgemelden
voor het vierkant als $\frac{3}{2}$: 1.
— den zeshoek als $\frac{5}{2}$: 1.
— — achthoek als $\frac{7}{2}$: 1.
— — tienhoek als $\frac{9}{2}$: 1.
en zoo voorts.

AANMERKING. Het blijkt uit dit, en uit het voorgaande Voorstel, dat indien men door de Meetkunde dit algemeen vraagstuk kon oplossen, namelijk, eenen gelijkbeenigen driehoek te maken, waarvan de hoeken op de grondlijn tot dien in den top staan, als 1, 1½, 2, 2½, 3, 3½, 4 en zoo voorts, tot 1, men ook alle regelmatige veelhoeken op eene *geometrische* wijze in den cirkel zoude kunnen beschrijven: en dit vraagstuk hangt wederom, zoo als van zelf blijkt, en reeds zeer wel door PAPPUS in zijne *Collectiones Mathema-*

maticae is opgemerkt, van dit ander af, eenen cirkelboog in twee deelen, die eene bepaalde rede tot elkander hebben, te verdeelen. Dan, dit vraagstuk is, in het algemeen, in eenen *geometrischen* zin, dat is door behulp van regte lijnen en cirkels alleen, niet optelosfen.

Men kan op de gezegde wijze in den cirkel beschrijven den driehoek, den vierhoek, den vijfhoek, den zeshoek, en die veelhoeken welke uit dezen door eene herhaalde verdeeling van de bogen in twee gelijke deelen, of wel door het volgende Voorstel, gevormd kunnen worden.

Men gebruikt het middel van den gelijkbeenigen driehoek, in dit en in het voorgaande Voorstel vermeld, niet voor den driehoek, het vierkant, of den zeshoek, die men op eenvoudiger wijzen beschrijven kan; doch wel voor den vijfhoek. Zie Werkstuk 11. Boek VI.

XII. VOORSTEL. Fig. 141.

Indien men uit het stip F van den omtrek de choorde FE trekt die de zijde is van eenen veelhoek van G zijden; en de choorde FM die de zijde is van eenen veelhoek van g zijden: zal de hoek [ECM], die het verschil is der middelpuntshoeken [FCM en FCE] van de gegeven veelhoeken, gelijk zijn aan $4\,L \times \left(\frac{G-g}{Gg}\right)$.

BEWIJS. Uit II. Bep. 14. Gev. 1. is $\angle ECM = \angle FCM - \angle FCE = \frac{4L}{g} - \frac{4L}{G} = 4\,L \times \left(\frac{G-g}{Gg}\right)$.

GEVOLG.

De choorde van den boog EM zal de zijde *kunnen* zijn van eenen veelhoek van $\frac{G \times g}{G - g}$ zijden: en is het in de daad zoodra Gg door G — g deelbaar is.

Insgelijks, indien $G \times g$ geen veelvoud is van $G - g$, maar $G - g$ gelijk is aan 2, of eenige magt van 2, zal de veelhoek beschreven kunnen worden: want de boog EM zal zoo vele zijden van den veelhoek bevatten als die magt van 2 bedraagt; en dus kan men door eene herhaalde verdeling in twee deelen, welke *geometrisch* geschiedt, den boog voor iedere zijde bepalen: dat niet geschieden kan zoo $G - g = 3$, of 5, of 6 enz. is. Bij voorbeeld, zoo MF de de zijde was eens driehoeks,

hoeks, en FE die van eenen vijfhoek, zoude de boog EM twee zijden van een vijftienhoek bevatten. Men kan dus nu het 16. Werkstuk van het VI. Boek oplossen.

XIII. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien men de naastliggende zijden [DE, FE] van eenen regelmatigen veelhoek in twee gelijke deelen verdeelt, en de stippen [K en R] dier verdeeling met lijnen [KR] vereenigt; zal er 1°. een nieuwe veelhoek ontstaan, die den eerstgemelden gelijkvormig, en in denzelven beschreven is: 2°. deszelfs zijde zal tot de zijde van den gegeven veelhoek staan als de loodlijn [CK] van den gegeven veelhoek tot deszelfs radius, of tot dien van den cirkel waarin hij beschreven is: 3°. de omtrekken zijn in die zelfde rede, en 4°. de inhouden in de verdubbelde rede; of ook 5°. als de loodlijn [CQ] van den nieuwen veelhoek tot den radius [CE] van den gegeven.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit het XXXVIII. van het II. B. en zie de I. Bepaling van dit Boek.

VOOR HET II en III. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken KQE, CKE en CKQ.

VOOR HET IV. Uit het XXVII. Voorstel van het IV. Boek.

VOOR HET V. Uit de beschouwing dat die veelhoeken onderling zijn = △ CKQ: △ CKE en dus (IV. *6.*) als CQ: CE.

GEVOLG.

Het blijkt dat, indien men met de loodlijn CK des gegeven veelhoeks FEDBA, uit het zelfde middelpunt C eenen cirkel beschreef; de veelhoek, waarvan de zijde is KR, niet alleen in den gegeven veelhoek, maar ook in dien cirkel, beschreven zoude zijn, om welken de gegeven veelhoek als dan beschreven staat. Het blijkt insgelijks, dat men, altijd zoo voortgaande met cirkels te beschrijven, eene reeks van regelmatige veelhoeken zoude verkrijgen, alle van het zelfde getal zijden, en die onderling in eene bepaalde rede tot elkander zouden staan: zoo voor de zijden, als voor de inhouden.

AANMERKING. Men zoude die veelhoeken met den gegevenen te beginnen, den I, den II, den III. enz. kunnen noemen.

XIV. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien men de ſtralen [CF, CE] van eenen in den cirkel beſchreven veelhoek [FEDBAF] verlengt, tot dat zij de raaklijn [NG], getrokken uit het ſtip [I], alwaar de verlengde loodlijn [CI] den omtrek ſnijdt, ontmoeten [in N en G]; zal het ſtuk [NG], dat men op die wijze van de gemelde raaklijn afſnijdt, de zijde zijn van eenen regelmatigen en gelijkvormigen veelhoek om den cirkel beſchreven: of, indien men de aangrenzende zijden [DE, en EF] van den veelhoek in den cirkel beſchreven, in twee gelijke deelèn deelt, en uit het middelpunt [C], door de ſnijdings ſtippen [R, en K] lijnen [CRU, en CKV] trekt tot dat zij de raaklijn [VU] ontmoeten die op het ſtip [E], daar de gemelde zijden [FE en DE] ſamenkomen, getrokken is; zal het gedeelte [VU] van die raaklijn, tusſchen de gemelde lijnen begrepen, ook de zijde zijn van eenen gelijkvormigen veelhoek, om den eerstgemelden veelhoek beſchreven.

Verder, de zijde [NG of VU] van den veelhoek om den cirkel ſtaat tot de zijde [FE of IL] van den veelhoek in den cirkel, als de *radius* [CI] van den cirkel, tot de loodlijn [CR] van den veelhoek in den cirkel: de omtrekken ſtaan in de zelfde rede: en de inhouden in de zelfde reden doch verdubbeld; of wel, als de radius van den cirkel tot de loodlijn [CQ] van den veelhoek die in den gegeven veelhoek [FEDBAF], beſchreven is.

BEWIJS. VOOR HET I en II. Uit de gelijkheid der driehoeken NCI en VCE, door het 22. Voorſtel van het I. Boek.

VOOR HET III. Uit de gelijkvormige driehoeken CKE en CIG: — vervolgens uit IV. 28 en 27: eindelijk uit de beſchouwing dat de gelijkvormige veelhoeken om en in den cirkel tot elkander ſtaan als △ CIG : △ CKE = IG : KQ (IV. 6.) = CI : CQ.

I. GEVOLG.

Het blijkt dat de veelhoek NGL*amp*N, of die welke op VU om den cirkel FIELBAF beſchreven is, insgelijks beſchreven is om den veelhoek FEDBAF welke in den cirkel ſtaat, en dat, indien men uit C met den radius CG eenen cirkel beſchreef, de veelhoek om den gegeven cirkel zoude zijn de

veel-

veelhoek in dien nieuwen cirkel: en derhalve 1°. dat de omschreven veelhoek, ten opzigte van den ingeschreven, en van alle, die wederom daarin beschreven staan, in de klasse valt der veelhoeken waarvan in Voorstel XIII. Gev. gesproken is; 2°. dat het beschrijven van eenen veelhoek om eenen veelhoek het zelfde Voorstel is als het beschrijven van eenen veelhoek om eenen cirkel.

II. GEVOLG.

Het blijkt uit dit Voorstel, hoe men eenen regelmatigen en gelijkvormigen veelhoek om eenen gegeven regelmatigen veelhoek, of om eenen cirkel, beschrijven kan: en dat er geen regelmatige veelhoeken om veelhoeken, of om cirkels, beschreven kunnen worden dan die, welke men in den cirkel beschrijven kan: waardoor men het 12 Werkstuk van het VI. Boek der Werkstukken kan oplossen.

III. GEVOLG.

Zoodra de zijde eens veelhoeks, in den cirkel beschreven, gegeven is, kent men de zijde van den gelijkvormigen veelhoek die om den cirkel beschreven kan worden.

IV. GEVOLG.

De zijde van den veelhoek om den cirkel, of om eenen veelhoek, beschreven, heeft tot de zijde van dien veelhoek de zelfde rede als deze zijde tot de zijde van den veelhoek in den laatstgemelden, of in den gegeven veelhoek, beschreven: dat is (door het voorgaand en door dit Voorstel).

VU: IL [of FE] = IL [of FE]: RK; en dus

„Is de zijde van dien gegeven veelhoek middelevenredig tusschen de zijde van den veelhoek in denzelven, en de zijde van den veelhoek om denzelven beschreven; en insgelijks is het met de inhouden gelegen."

Want □ op VU: □ op FE = □ op FE: □ op RK; en dus (IV. 27).

veelhoek op VU: veelh. op FE = veelh. op FE: veelh. op RK.

V. GEVOLG.

Indien men de lijn FD trekt, zijn de △△ RKE en FDE gelijkvormig en dus is, KE: RK = FE: FD; maar KE = ½ FE: dus RK = ½ FD.

waar-

waaruit het voorgaande Gevolg dit wordt,

VU : FE = FE : ½ FD: dat is in woorden: „ de zijde van „ eenen, in den cirkel beschreven, veelhoek is middel-evenre- „ dig tusschen de zijde van den gelijkvormigen veelhoek om „ dien cirkel beschreven, en de halve zijde van eenen veelhoek, „ insgelijks in dien cirkel beschreven, doch die slechts de „ helft van het getal zijden des gegeven veelhoeks bezit."

HUYGENS de *de Circuli magnitudine*, prop. 13.

V. GEVOLG.

Uit het IV. Gevolg blijkt al verder, dat het verschil der inhouden van den regelmatigen veelhoek om den cirkel, en van den gelijkvormigen in den cirkel beschreven, tot den inhoud van den eerstgemelden veelhoek staat, in verdubbelde rede van de zijde des veelhoeks in den cirkel tot de middellijn.

Want daar veelh op VU: veelh. op FE = veelh. op FE: veelh. op RK is (III. 8.).

veelh. op VU — veelh. op FE: veelh. op VU = veelh. op FE — veelh. op RK: veelh. op FE = △ RQE: △ RCE = QE: CE (IV. 6.)

maar QE: RE = RE: CE (IV. 2.)

en RE: CE = RE: CE

dus QE: CE = $\overline{RE}^2$: $\overline{CE}^2$: (III. 10) en dus: veelh. op VU — veelh. op FE : veelh. op VU = $\overline{RE}^2$: $\overline{CE}^2$ = $\overline{FE}^2$: $\overline{TE}^2$:

VI. GEVOLG.

Derhalve is het gemelde verschil gelijk aan eenen gelijkvormigen veelhoek, die beschreven zoude worden om eenen cirkel, waarvan de zijde FE des gegeven veelhoeks de middellijn zoude zijn (IX. Voorstel).

DU FAY *Mem. de l'Acad.* 1729. p. 297.

VII. GEVOLG.

Dus is het gemelde verschil ook gelijk aan den veelhoek die gevormd wordt door de ontmoeting der lijnen welke, of de uiteinden der evenwijdige zijden van den gegeven veelhoek, zoo deszelfs zijden *even* zijn, veréénigen, of loodregt op de zijden getrokken worden, indien het getal der zijden *oneven* is (Voorgaande Gevolg en XXXV. en XXXVII. Voorstel van het II. Boek). Want, in die veelhoeken, is de loodlijn de helft

van

van de zijde des gegeven veelhoeks, en dus radius van den cirkel in die veelhoeken beschreven.

DU FAY ibid p. 299.

XV. VOORSTEL. Fig. 144.

Indien men in den cirkel eenen regelmatigen veelhoek beschrijft, waarvan het getal der zijden *even* is; de middellijn [AE] door twee tegen elkander overstaande hoeken trekt, zoo als ook uit het uiteinde [E] van die middellijn de choorde [EB] naar het einde der zijde [AB] aan die middellijn grenzende; en zoo men eindelijk de zijden [AB en AH, BC en HG enz.] die op gelijken afstand van de middellijn zijn, door regte lijnen [BH, CG, DF], die alle de middellijn regthoekig snijden, vereenigt; zal de regthoek uit de middellijn [AE] en de gemelde choorde [BE] gelijk zijn aan den regthoek uit de zijde [AB] van den veelhoek, en de som van alle de lijnen [BH, CG, DF] die de zijden vereénigen.

ARCHIMEDES, *de Sphaera et Cylindro*, pr. 22.

BEREIDING. Men trekt CH, DH, DG enz. die de middellijn in L, M, N snijden.

BEWIJS. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken, ABK, LKH, LCM, MGN, NDO, OFE, volgt de gedurige evenredigheid van BK : KA = HK : KL = CM : ML = GM : MN = DO : ON = FO : OE; en uit III. 18. die van BK : KA zoo als de som der voorgaanden tot die der volgende: en daaruit (door IV. 8. Gev. 5.) de gelijkheid der gemelde regthoeken.

I. AANMERKING. De veelhoek moet een getal zijden bezitten dat even is; want anders is de lijn AE geen middellijn, en de lijnen BH, CG, DF, zijn niet evenwijdig aan elkander, waarop de gelijkvormigheid der driehoeken rust.

II. AANMERKING. Heeft dit Voorstel plaats in het algemeen, dan heeft het ook plaats in die regelmatige veelhoeken, waarvan het getal zijden niet alleen even, maar ook eene vermenigvuldiging van vier is: en het is in dien zin, dat TACQUET dit Voorstel van ARCHIMEDES opgeeft, in zijne *Theoremata selecta ex Archimede* pr. 16: om dat het alleen dat geval is, het welk door ARCHIMEDES zelven, ter bepaling van den inhoud eens kloots, gebruikt wordt, gelijk nader in ons XII. Boek, zal getoond worden.

XVI. *VOORSTEL. Fig. 144.

Indien men in een cirkelstuk [DAF], waarvan de grondlijn [DF] regthoekig staat op de middellijn, eenen regelmatigen veelhoek beschrijft, waarvan het getal der zijden even is: en men trekt de choorde [*B E*] van het einde eener zijde [AB] die aan de middellijn grenst naar het einde der middellijn, zal de regthoek uit die choorde, en het gedeelte [AO] der middellijn tot aan de ontmoeting van de grondlijn [DOF] begrepen, gelijk zijn aan den regthoek uit eene zijde [BA] des veelhoeks, en de som van alle de lijnen [BK, CM, DO] die de zijden des veelhoeks op de zelfde wijze als in het voorgaand Voorstel veréénigen.

ARCHIMEDES, *de Sphaera et Cylindro*, pr. 23.

BEREIDING. De zelfde als in het voorgaand Voorstel.

BEWIJS. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken ABE, ABK, HKL, LCM, MGN, NDO, wordt afgeleid; AB : BE = AK : BK = LK : HK = LM : CM = MN : MG = NO : OD:

Waaruit door III. 18. AB : BE zoo als de som van alle de voorgaande tot die der volgende: en daaruit volgt (door IV. 8. Gevolg 5.) de gelijkheid der bewuste regthoeken.

AANMERKING. De beide aanmerkingen, op het voorgaand Voorstel gemaakt, gelden ook hier.

GEVOLG.

In het bewijs heeft men gezien dat
AB : BE = AK + KL + LM + MN + NO + OE (zoo men den geheelen cirkel neemt): BK + HK + CM + MG + DO + OF:

of,

AB : BE = AE : 2 [BK + CM + DO].

Dit Voorstel is door VIETA opgegeven.

III. AFDEELING.

OVER DE EIGENSCHAPPEN VAN EENIGE BEPAALDE VEELHOEKEN IN DEN CIRKEL BESCHREVEN.

XVII. VOORSTEL. Fig. 142.

De loodlijn [CX] eens gelijkzijdigen driehoeks, in den cirkel beschreven, is de helft van den *radius*: de loodlijn, uit eenen van deszelfs hoeken op de overstaande zijde nedergelaten, is anderhalfmaal de *radius*.

EUCL. XIV. 1. Cor. voor het eerste gedeelte.

BEWIJS. Voor het I. uit de beschouwing der gelijkzijdige driehoeken FCD en FED.

Voor het II. Uit het I.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 142.

Het vierkant van de zijde des gelijkzijdigen driehoeks in den cirkel beschreven is het drievoud van het vierkant op den *radius*: of ook, is gelijk aan den regthoek uit de middellijn en de loodlijn uit den top des driehoeks op de grondlijn nedergelaten.

EUCL. XIII. 12. — L. G. IV. 4. *Scholie*.

BEWIJS. $\frac{1}{4}$ □ op DF ∞ □ op DX ∞ □ op CD — □ op CX (II. 16. Gev. 2).
maar □ op CX ∞ $\frac{1}{4}$ □ op CE of CD
en dus $\frac{1}{4}$ □ op DF ∞ $\frac{3}{4}$ □ op CD, of
□ op DF ∞ 3 □ op CD. D. T. B. W. 1.
of □ op DF ∞ Regth. uit CD en 3 CD
∞ Regth. uit 2 CD en $\frac{3}{2}$ CD
maar $\frac{3}{2}$ CD = AX (XVII. Voorst.)
dus □ op DF ∞ regth. uit 2 CD en AX. D. T. B. W. 2.

AANMERKING. Zie STEDMAN *Phil. Transf.* vol. LXVI. p. 299: waarop HORSLEY zeer wel aanmerkt dat dit slechts een gevolg is van het geen in het algemeen voor *alle driehoeken* plaats heeft: dat is van het geen hier boven in Voorst IV. bewezen is: want in den gelijkzijdigen driehoek is de regthoek uit twee zijden het vierkant zelf op eene zijde.

GEVOLG.

De zijde des driehoeks is dus met betrekking tot den *radius* onmeetbaar.

XIX. VOORSTEL.

Het vierkant in den cirkel beschreven is het dubbeld van het vierkant van den *radius*, en de helft van dat op de middellijn.

I. GEVOLG.

Dus staat de zijde van het vierkant in den cirkel tot den *radius* als $\sqrt{2} : 1$.

AANMERKING. Die rede is de rede van de diagonaal tot de zijde in een vierkant: ook is de zijde van het vierkant in den cirkel beschreven, de diagonaal van dat op den radius.

L. G. IV. 3. *Scholie.*

II. GEVOLG.

Het vierkant op de middellijn is het vierkant om den cirkel, en dus ook om het ingeschreven vierkant, beschreven.

III. GEVOLG.

Indien men dan in een gegeven vierkant een vierkant beschrijft, en daarin wederom een vierkant, en altijd zoo voorts: zullen die vierkanten eene afnemende geometrische reeks $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ enz. uitmaken.

XX. VOORSTEL. Fig. 142.

Het vierkant van de loodlijn [CK] in den zeshoek, staat tot dat van den *radius*, of van de zijde van den zeshoek, als 3 tot 4.

BEWIJS. Om dat □ op CK ∞ □ op CF − □ op $\frac{1}{2}$ CF ∞ $\frac{3}{4}$ □ op CF.

GEVOLG.

De loodlijn van den zeshoek kan uitgedrukt worden (indien *r* de *radius*, of de zijde des zeshoeks is) door $\frac{1}{2} r . \sqrt{3}$, en is onmeetbaar met betrekking tot den *radius*.

XXI. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien men den *radius* [CI] van den cirkel in uiterste en mid-

middelste rede deelt in Z, is het grootste stuk CZ de zijde van den tienhoek in den cirkel beschreven.

PAPPUS *Coll. Math.* V. 47. — L. G. IV. 5.

BEREIDING Men stelle IE = CZ: men trekke CE, EZ,
Uit II. 26. is
$\angle$ CIE = $\angle$ CEI = 2 $\angle$ ICE
maar $\angle$ CIE + $\angle$ CEI + ICE = 2 L: (I. 18.)
dus 5 $\angle$ ICE = 2·L
en $\angle$ ICE $= \frac{2L}{5} = \frac{4L}{10}$
dus IE = CZ de zijde van den tienhoek.

I. GEVOLG.

Dus is de zijde van den tienhoek *onmeetbaar* met betrekking tot den *radius*.

I. AANMERKING. Indien men den *radius* door *r* aanduidt; kan de zijde van den tienhoek uitgedrukt worden door $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, gelijk blijkt uit IV. 18. Aanm. 2.

II. GEVOLG.

De loodlijn [CK] van den vijfhoek is de helft der som van den *radius* (of zijde des zeshoeks) en van de zijde des tienhoeks te samen genomen.

EUCL. XIV. 1.

BEWIJS. Zoo LF = IE = CZ de zijde des tienhoeks is, is FE de zijde des vijfhoeks, en CK de loodlijn.
Nu is CK = CZ + ZK: maar IE = CZ = ZE (II. 27); ZK = KI (I. 27. Gev. 4.) dus CK = CZ + ½ ZI = CZ + ½ (CI — CZ) = ½ CZ + ½ CI $= \frac{IE + CI}{2}$.

II. AANMERKING. De grootte dier loodlijn CK wordt uitgedrukt door $\frac{r + \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{2r + r(\sqrt{5}-1)}{4}$ $= r\frac{(2 + \sqrt{5} - 1)}{4} = r\frac{(1 + \sqrt{5})}{4}$.

III. AANMERKING. De geheele loodlijn BK, van den top des vijfhoeks op de overstaande zijde nedergelaten, is gelijk aan BC + CK, en wordt uitgedrukt door $r + r\frac{(1 + \sqrt{5})}{4} = r\frac{(4 + 1 + \sqrt{5})}{4} = r\frac{(5 + \sqrt{5})}{4}$.

III.

III. GEVOLG.

Indien men de som van den *radius*, of zijde des zeshoeks, en van de zijde des tienhoeks neemt, is de geheele lijn in uiterste en middelste rede gesneden, en het grootste deel is de *radius*.

Want uit dit Voorstel is C Z de zijde des tienhoeks, en
CI: CZ = CZ: ZI: dus
CI: CZ + CI = CZ: CZ + ZI of
CI: BZ = CZ: CI of BC
dat is CZ: BC = BC: BZ.

EUCL. XIII. 9.

IV. AANMERKING. Dit kan korter bewezen worden uit IV. 16.

XXII. VOORSTEL. Fig. 143.

Het vierkant van de zijde des vijfhoeks is gelijk aan de som der vierkanten van de zijde van den tienhoek, en van de zijde van den zeshoek, of van den *radius*.

EUCL. XIII. 10.

BEREIDING. Zij C*b* loodregt op IE, of op de zijde des tienhoeks, en dus I*b* = *b*E: Men trekke, uit I, IO, naar het stip O daar C*b* de lijn FE, zijde des vijfhoeks, snijdt: dus is IO = OE.

BEWIJS. ∠ ECO = $\frac{1}{2}$ ∠ ICE; ∠ IFE = ½ ∠ ICE (V. 5.) dus ∠ ECO = ∠ IFE: Maar ∠ IFC = 2 ∠ FCI, (om dat FI de de zijde is van den tienhoek) = ∠ FCE: dus ∠ FCE − ∠ ECO = ∠ IFC − ∠ IFE: of ∠ OCF = ∠ CFO: en dus 1°. OC = FO; 2°. de derde ∠ COF = ∠ FCE, en △ FCO ∽ △ FCE
derhalve FE: FC = FC: FO
Insgelijks △ EIO ∽ △ FIE: en dus
FE: IE = IE: OE:
gevolgelijk (IV. 8. Gev. 5.)
□ op IE + □ op FC ∞ regth. uit OE, FE + regth. uit FO, FE ∞ regth. uit FE, FE ∞ □ op FE.

AANMERKING. Het voorgaande bewijs is dat van EUCLIDES: CASTILLON heeft er een veel korter gegeven: (*Mem. de l'Acad. de Berlin* 1766. p. 358) te weten (IV. 22.)

□ op ZI + □ op CI ∞ 3 □ op CZ ∞ 3 □ op IE
en dus

□ op ZI + □ op CI + □ op IE ∞ 4 □ op IE ∞ 4 □ op KE + 4 □ op IK ∞ □ op FE + □ op ZI: en derhalve □ op CI + □ op IE ∞ □ op FE.

I. GEVOLG.

De zijde van den vijfhoek is onmeetbaar met betrekking tot den *radius*, en insgelijks tot de zijde des tienhoeks: zij wordt uitgedrukt door $r.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

BEWIJS. Uit dit Voorstel en XXI Aanm. 1. Zij die zijde V: dan is $V^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{r^2}{4}(4 + [\sqrt{5}-1]^2) = \frac{r^2}{2}(5-\sqrt{5}) = \frac{r}{2}\times r(5-\sqrt{5})$: en dus $V = r.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Eene grootheid gelijk $5-\sqrt{5}$ is het geen EUCLIDES (X. 185.) noemt *vierde apotome*; te weten het verschil $(5-\sqrt{5})$ van twee grootheden (5 en $\sqrt{5}$) die alleen in magt (5^2 en 5) en niet in lengte meetbaar, en verder zoodanig gesteld zijn, dat het verschil (20) hunner vierkanten (25 en 5) alléén in magt en niet in lengte (dat is niet $\sqrt{20}$) meetbaar is met de grootste grootheid (5). Eene lijn nu wier vierkant gelijk is aan den regthoek, uit eene meetbare lijn $\left(\frac{r}{2}\right)$ en eene *vierde apotome* ($r\,[5-\sqrt{5}]$), is het geen EUCLIDES (X. 74.) noemt *kleine irrationele*, of *kleine onmeetbare*.

II. GEVOLG.

Het vierkant van de zijde [F E] van den vijfhoek, te samen met het vierkant van de choorde [F D] die twee zijden van den vijfhoek bespant, is gelijk aan vijf malen het vierkant van de zijde des zeshoeks, of van den *radius*.

BEWIJS. □ op FB + □ op FI = □ op BI = 4 □ op CI, maar □ op FE = □ op FI + □ op CI: dus □ op FB + □ op FE + □ op FI = 4 □ op CI + □ op FI + □ op CI; of □ op FB + □ op FE = 5 □ op CI.

EUCL. XIV. 2. *Lemma*.

III. GEVOLG. Fig. 145.

Indien men op de middellijn AB, uit het middelpunt C, de loodlijn CD trekt; vervolgens den *radius* CB in twee gelijke

ke deelen deelt in E; DE trekt, en uit E met den *radius* ED den boog DF beschrijft; zal de choorde FD de zijde van den vijfhoek, en het stuk FC die van den tienhoek zijn in den cirkel beschreven.

BEWIJS. Regth. uit BF, FC, + □ op CE ∞ □ op FE ∞ □ op DE (II. 6.)
maar □ op DE ∞ □ op DC + □ op CE (II. 16)
dus regth. uit BF, FC ∞ □ op DC ∞ □ op BC
dus BF : BC = BC : FC (IV. 8. Gev. 6.) en
BF — BC : BC = BC — FC : FC (III. 8. N°. 3.)
of FC : BC of AC = AF : FC
of AC : FC = FC : AF;
en dus is de *radius* AC in uiterste en middelste rede gesneden: gevolgelijk is FC de zijde van den tienhoek (XXI. Voorstel): en dus, daar □ op FC + □ op CD ∞ □ op FD, is FD de zijde van den vijfhoek (door dit Voorstel).

II. AANMERKING. Dit Gevolg levert die gemakkelijke wijze op om eenen vijfhoek en eenen tienhoek in den cirkel te beschrijven, welke, PTOLEMAEUS heeft voorgesteld. *Almagestum Lib.* I. *Cap.* 9. Zie Werkstukken VI. 11. Oplossing 2.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 143.

De inhoud van eenen vijfhoek in den cirkel beschreven, is gelijk aan den regthoek begrepen onder vijf zesde gedeelten van de choorde die twee zijden van den vijfhoek bespant, en anderhalf maal den *radius*.

EUCL. XIV. 4. *Lemma*: en zie bij CLAVIUS in het XIV. Boek, het 8. Voorstel.

BEWIJS. Daar △ FED gelijkbeenig is, is △ FCE ∞ Regth. uit $\frac{1}{2}$ CE en FS ∞ Regth. uit $\frac{3}{2}$ CE en $\frac{1}{3}$ FS ∞ Regth. uit $\frac{3}{2}$ CE en $\frac{1}{6}$ FD: en dus is 5 △ FCE ∞ vijfhoek FEDBAF ∞ 5 Regth. uit $\frac{3}{2}$ CE en $\frac{1}{6}$ FD ∞ Regth. uit $1\frac{1}{2}$ CE en $\frac{5}{6}$ FD.

IV. AFDEELING.

OVER DE EIGENSCHAPPEN DER VOLGENDE VEELHOEKEN MET BETREKKING TOT DE VOORGAANDE (*).

XXIV. VOORSTEL. Fig. 143.

Wanneer men de bogen, welke de zijden eens regelmatigen veelhoeks, in den cirkel beschreven, bespannen, in twee gelijke deelen deelt; zullen de choorden van die bogen eenen nieuwen regelmatigen veelhoek uitmaken die tweemaal zoo veel zijden zal hebben als de gegeven veelhoek: 2°. Iedere zijde [IE] van dien nieuwen, of *volgenden*, veelhoek staat tot de helft [KE] van de zijde des eersten, of *voorgaanden*, veelhoeks, in onderdubbelde rede van de middellijn [BI] tot het gedeelte [BK] van dezelve door de zijde des voorgaanden veelhoeks afgesneden: 3°. De omtrekken der beide veelhoeken staan tot elkander in de zelfde rede: 4°. De inhoud van den nieuwen, of *volgenden*, veelhoek staat tot dien van den eersten, of *voorgaanden*, als de *radius* [CI] van den cirkel tot de loodlijn [CK] van den eersten veelhoek; of 5°. zoo als de zijde FE van dien voorgaanden veelhoek tot de loodlijn [FS] uit het uiteinde [F] van deze zijde [FE] op den *radius* [CE] getrokken; of eindelijk 6°. in onderdubbelde rede van de middellijn [TE] tot het stuk TS van dezelve middellijn.

BEWIJS. Het eerste gedeelte spreekt van zelf.

VOOR HET II. en III. Indien de zijde FE in twee gelijke deelen in K verdeeld, en de middellijn IKB uit K op dezelve regthoekig getrokken is, uit V. 6. en uit de gelijkvormigheid der ΔΔ IKE en IBE en KBE (IV. 2.).

VOOR HET IV. Uit de beschouwing, dat zoo *g* het getal van zijden in den eersten veelhoek is, die veelhoek gelijk is aan 2 g × Δ KCE, en de volgende veelhoek aan 2 g × Δ ICE: welke driehoeken tot elkander staan = CK : CI: en dus

(*) Zie de IIIe Bepaling, bl. 235.

en dus ſtaat de *volgende* veelhoek tot den *voorgaanden* als CI : CK.

VOOR HET V. en VI. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken FSE en CEK, is CK: CE of CI = FS : EF = $\sqrt{ST}.\sqrt{TE}$: (IV. 15. het 3. Gev.); en dus de *volgende* veelhoek tot den *voorgaanden* als FE: FS = $\sqrt{TE}$: $\sqrt{TS}$.

AANMERKING. Het laatſte gedeelte is het ſchoon *Theorema* door den Heer HENNERT in het V. deel der *Verhandelingen van de Haarlemſche Maatſchappij* bl. 250. gegeven; wij hebben het hier op eene eenvoudiger wijze bewezen. De Heer HENNERT gebruikt andere woorden; namelijk voor FS hoekmaat, of *ſinus*, van den ∠ FCE of middelpuntshoek: voor FE, of dubbelde KE, dubbelde hoekmaat van den halven middelpuntshoek: voor ST verkeerde hoekmaat (*ſinus verſus*) van ∠ TCF, of ſupplement van den middelpuntshoek FCE: welke benamingen wij in het VIII. Boek zullen uitleggen.

I. GEVOLG.

De omtrek eens regelmatigen veelhoeks in den cirkel beſchreven is kleiner dan de omtrek des regelmatigen veelhoeks, insgelijks in den cirkel beſchreven, doch die een dubbeld getal zijden heeft.

II. GEVOLG.

De inhoud eens regelmatigen veelhoeks in den cirkel beſchreven is kleiner dan die van den regelmatigen veelhoek, insgelijks in den zelfden cirkel beſchreven, doch die een dubbeld getal zijden heeft.

III. GEVOLG.

Daar de veelhoek op FE: veelhoek op IE = CK: CI; en CK: CI = CK: CE = FT: TE; zoo is een veelhoek in den cirkel beſchreven, tot den veelhoek, insgelijks in den cirkel beſchreven, doch die een dubbeld getal zijden heeft, als de choorde van het ſupplement des boogs door de zijde des eerstgemelden veelhoeks beſpannen, tot de middellijn.

VIETA, Oper. p. 398.

IV. GEVOLG.

Waaruit wederom volgt, dat zoo men eenen veelhoek heeft in

in den cirkel beschreven, en men door verdeeling der bogen in twee gelijke deelen eenen tweeden veelhoek beschrijft, die dus een dubbeld getal zijden heeft, vervolgens eenen derden, die wederom een dubbeld getal zijden heeft, en dan eenen vierden enz., de eerste veelhoek zal staan tot den laatsten (stel den *n*sten) als de samengestelde rede van alle de choorden der supplement-bogen, tot de magt $n-1$ van de middellijn.

Dit is een Voorstel van VIETA (*Oper.* p. 399), het welk tot het vinden van den inhoud des cirkels zeer nuttig kan zijn.

V. GEVOLG.

Door het vierde gedeelte van dit Voorstel kan men den inhoud eens veelhoeks, door middel van eenen veelhoek, die maar de helft van het getal zijden heeft, dat is, den inhoud van eenen *volgenden* door middel van eenen *voorgaanden* veelhoek, berekenen: en daar men als dan getallen moet gebruiken, zal men op het geen wij in het 9. Voorstel van het IV. Boek, de 5. Aanm. daarop gezegd hebben, moeten letten. Die uitdrukkingen dan gebruikende, is het getal waar door de inhoud van den voorgaanden veelhoek uitgedrukt wordt $=$ $2\,g \times \triangle\, CKE = g \times CK \times KE$: en dus is Volgende veelhoek *tot* $g \times CK \times KE = CI : CK$; en

volgende veelhoek $= \dfrac{g \times CK \times KE \times CI}{CK} =$

$$\frac{g \times FE \times CI}{2} = (\text{zoo } CI = 1) = \frac{g \times FE}{2}$$

waaruit dit uitmuntend voorstel van LUDOLF VAN CEULEN (in zijn Boek over den cirkel, en ook te vinden bij SNELLIUS prop. 3.) volgt:

„ Indien men de zijde eens veelhoeks in den cirkel be-
„ schreven, wiens *radius* gelijk aan de eenheid gesteld wordt,
„ door het halve getal der zijden multipliceert, verkrijgt men
„ den inhoud van den veelhoek die een dubbeld getal zijden
„ heeft, en in den zelfden cirkel beschreven is."

Zie hier over L. G. IV. 13.

VI. GEVOLG.

Daar de volgende veelhoek $= \dfrac{g \times FE \times CI}{2}$ is, is een veelhoek gelijk aan eenen driehoek wiens hoogte de *radius* en wiens grondlijn de omtrek is eens veelhoeks die maar half zoo veel zijden heeft als de gegeven veelhoek.

Dit is een zeer gewigtig Voorstel, door HUYGENS, in het bewijs van zijne 7 propositie *de vera Circuli magnitudine*, gegeven.

VII. GEVOLG.

Dus is de inhoud van den zeshoek tot die van den driehoek (Fig. 142.) als CF: CX = 2 : 1 (VIII. Voorstel, Gevolg 2.): dat is de zeshoek is het dubbeld van den driehoek. Deze is de 5. propositie van SNELLIUS.

VIII. GEVOLG.

Dus is de inhoud van den twaalfhoek gelijk aan de helft van zesmaal de zijde van den zeshoek gemultipliceerd door den *radius*; of, gelijk aan drie malen het vierkant van den *radius* (VIII. Voorstel het 2. Gev.): of ook gelijk aan het vierkant van de zijde des gelijkzijdigen driehoeks (XVIII. Voorstel).

Het eerste is de 6. propositie bij SNELLIUS, waarover men HENNERT ter aangehaalde plaatse kan nazien: en het tweede is zijne 4. propositie.

IX. GEVOLG.

Waaruit, en uit het XIX. Voorstel, wederom volgt: dat de inhoud van den twaalfhoek tot het vierkant in den cirkel beschreven, staat als 3: 2 en tot het vierkant op den diameter als 3: 4.

XXV. VOORSTEL. Fig. 141.

Het vierkant van de zijde [FE] eens veelhoeks in den cirkel beschreven, staat tot den middelpunts-driehoek [FCI] van den veelhoek in den zelfden cirkel beschreven, doch die een dubbeld getal zijden heeft, als de halve zijde [KE] des eerstgemelden veelhoeks, tot het achtste gedeelte van den *radius*.

BEWIJS. △ CIE: △ CEK = CI: CK (IV. 6.) dus
△ CIE: ½ regth. uit CK, KE = CI: CK of
△ CIE: ½ KE = CI: 1
en dus △ CIE: □ op KE = CI: 2 KE (III. 10 het 2. Gev.)
gevolgelijk
□ op FE: △ CIE = KE: ⅛ CI.

AANMERKING. Dit is de fraaije propositie van den Heer HENNERT ter aangehaalde plaatse bl. 245, doch hier veel korter bewezen. Gemelde Heer gebruikt voor KE de uitdruk-

drukking *finus van den halven middelpunts-hoek*: welke uitdrukking wij in het VIII. Boek verklaren zullen.

GEVOLG.

△ CIE: □ op CI = ½ KE: CI:

dat is:

De middelpunts driehoek van eenen veelhoek ftaat tot het vierkant van den *radius*, als het vierde gedeelte van de zijde eens veelhoeks die maar het halve getal zijden bezit, tot den *radius*.

HENNERT p: 255.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien een regelmatige veelhoek [EFABDE] in eenen cirkel befchreven is; zal de zijde [IE] eens regelmatigen veelhoeks [EIF*t*A, enz.] die insgelijks in den cirkel befchreven is, doch een dubbeld getal zijden heeft, middel-evenredig zijn tusfchen den *radius* en het verfchil [QE] van de middellijn [TE] met de choorde [FT] van het fupplement [TA*t*F] des boogs [FIE] die de zijde van den eerstgemelden veelhoek befpant.

BEREIDING. 1°. Men trekt uit C, C*b* ⊥ op IE: welke de lijn KE in O fnijdt.
2°. Door I en *O* de lijn IP op CE:
3°. Uit T met den *radius* TF den boog FQ. zoo dat TQ = TF: en dus QE = TE − TQ = TE − TF.

BEWIJS. Uit de bereiding, en uit I. 27. Gev. 5. volgt 1°. IO = OE: 2°. in △ CIO en in △ CEO, ∠ CIO = ∠ CEO: waaruit 3°. in △△ KOI en OPE, KO = OP, en ∠ OPE = ∠ OKI = L: dus is IP ⊥ op CE: en dus 4°. in △ CKO en △ COP, CK = CP: gevolgelijk eindelijk: 5°. uit △ TFE ∽ △ KCE, CK = ½ TF: en dus CP = ½ TF.

Dit gefteld zijnde is, uit △ TEI ∽ △ IPE, TE: IE = IE: PE: en dus (IV. 8. Gev. 5.)

□ op IE ∞ Regth. uit TE en PE
∞ Regth uit TE en [CE − CP]
∞ Regth. uit TE en [CE − ½ TF]
∞ Regth. uit TE en $\frac{[2\ CE - TF]}{2}$
∞ Regth. uit ½ TE en [TE − TF]
∞ Regth. uit CE en QE.

I. AANMERKING. Men vindt dit Voorftel bij SNELLIUS prop.

1: en reeds bij PTOLEMAEUS (*Almagestum Lib.* I. *Cap.* 9.) doch op deze wijze uitgedrukt,

$TE : IE = IE : PE$: maar $PE = \frac{1}{2}[TE - TF] = \frac{1}{2} QE$.

GEVOLG.

Daar dan □ op IE ∞ Regth. uit $\frac{TE}{2}$ en $[TE - TF]$

en □ op TI ∞ □ op TE — □ op IE (II. 16. Gev. 1.)
is □ op TI ∞ Rh. uit TE, TE — Rh. uit $\frac{TE}{2}$ en $[TE - TF]$

∞ Regth. uit $\frac{TE}{2}$ en $[2\,TE - TE + TF]$

∞ Regth. uit $\frac{TE}{2}$ en $[TE + TF]$

Dit is het vermaard Voorstel door SNELLIUS gevonden, en waarvan het nut tot het vinden van den inhoud der veelhoeken zoo aanmerkelijk is: namelijk

„ Het vierkant op de choorde van het supplement des „ boogs door de zijde van eenen veelhoek bespannen, is „ gelijk aan den regthoek uit den *radius* en de som van „ de middellijn met de choorde van het supplement des „ boogs, die bespannen wordt door de zijde des veelhoeks „ welke slechts het halve getal zijden heeft."

II. AANMERKING. Dit Voorstel brengt zeer veel toe om gemakkelijk den omtrek van veelhoeken te vinden, waarvan het getal der zijden bestendig dubbeld genomen wordt: want een veelhoek, bijv. een zeshoek, of een vierkant, gegeven zijnde, berekent men eerst door dit Voorstel de zijde van den veelhoek die eens zoo veel zijden heeft: dan, door dit Gevolg, de choorde van den supplementboog, dan wederom door het Voorstel de zijde van den volgenden veelhoek, en zoo voorts: welke berekeningen alle in eene bestendige orde volgen; zoo als bij SNELLIUS te zien is, en insgelijks bij MONTUCLA *Hist. de la Quadrature du Cercle* p. 52.

XXVII. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien men uit het middelpunt [C] des cirkels loodlijnen [CI, CL] nederlaat, op de aan elkander liggende zij-

zijden [NG, G*a*] van eenen regelmatigen veelhoek [NG*a* enz.] om den cirkel beschreven, en men trekt eenen *radius* [C E G] naar den hoek [G] welke de gemelde zijden onderling maken; zoo men eindelijk de hoeken [I C G, G C L] welke die straal met de gemelde loodlijnen wederzijds maakt, in twee gelijke deelen deelt, door lijnen C X, C Y, die tot de zijden [N G, G *a*] des veelhoeks [in X en Y] verlengd worden, zal het volgende plaats hebben:

1°. De lijn X Y, die de gemelde snijdings-stippen veréénigt, zal de zijde zijn van eenen nieuwen veelhoek om den cirkel beschreven, doch waarvan de zijden het dubbeld in getal zullen zijn.

2°. Iedere zijde X Y van dien nieuwen veelhoek staat tot de zijde van den gegeven veelhoek, als de *radius* [C E] van den cirkel tot de som van den *radius* des cirkels, én den *radius* [C G] des gegeven veelhoeks:

3°. De omtrekken der beide veelhoeken, van den nieuwen en van den gegeven, staan tot elkander, als de middellijn van den cirkel tot de som van den *radius* des cirkels en van den *radius* des eersten veelhoeks:

4°. De inhouden staan in de zelfde rede.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit de gelijkheid der △△ C I X en C Y L, volgt C X = C Y, I X = L Y, en dus X G = G Y: waaruit (I. 27. het 5. Gevolg) volgt C E ⊥ op X Y: en dan uit △ I C X = △ X C E, C E = C I: dus raakt het stip E den cirkel, en is I X = X E: insgelijks E Y = L Y.

VOOR HET II. Uit IV. 12: op den △ V C E toegepast en dan uit de samentelling der reden, door III. 8. N°. 1.

VOOR HET III. Uit de beschouwing dat, zoo de omtrek van den gegeven veelhoek is *g* × I G: die van den nieuwen zijn zal 2 *g* × I X of 2 *g* × X E.

VOOR HET IV. Uit de beschouwing dat de inhouden zijn in samengestelde rede van de omtrekken en de loodlijnen (IV. 29.) en dat hier de loodlijn voor beide de veelhoeken de zelfde is, namelijk de *radius* van den cirkel.

I. GEVOLG.

De zijde eens veelhoeks, om den cirkel beschreven, is kleiner dan de zijde van eenen veelhoek insgelijks om den zelfden cirkel beschreven, doch die slechts half zoo veel zijden heeft.

II. GEVOLG.

De omtrek of de inhoud van den eerstgemelden, is ook kleiner dan de omtrek of de inhoud van den laatsgemelden.

III. GEVOLG.

De zijde van eenen veelhoek om den cirkel beschreven, staat tot de zijde van den veelhoek in den cirkel beschreven, doch waarvan het getal zijden maar half zoo groot is, als de *radius* van den cirkel tot de som van den *radius* des cirkels en de loodlijn des laatstgemelden veelhoeks,

BEWIJS. Door ons Voorstel is

$$\begin{aligned} IX : IG &= CI : CI + CG = CK : CK + CE : \text{maar} \\ IG : KE &= \qquad\qquad\qquad\; CI : CK \end{aligned}$$

dus (III. 10.)

$$IX : KE = CI : CK + CE = XY : FE$$

Zie ook hier over L. G. IV. 14.

IV. GEVOLG.

Dus is de zijde van den zeshoek om den cirkel tot de zijde des driehoeks in den cirkel, als $r : \frac{1}{2}r + r = 2 : 3$. (XVII. Voorstel).

SNELLIUS prop. 7.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 143.

Een veelhoek in den cirkel beschreven is middel-evenredig tusschen eenen veelhoek in den cirkel, en eenen veelhoek om den cirkel, doch die beiden slechts het halve getal zijden van den gegeven veelhoek bezitten: en de veelhoek om den cirkel is *harmonisch* middel-evenredig tusschen den gelijkvormigen veelhoek in den zelfden cirkel beschreven, en den veelhoek om den cirkel beschreven, doch die slechts het halve getal zijden bezit.

SNELLIUS prop. 9. voor het I. gedeelte.

SAURIN, *Mem. de l'Acad.* 1723. p. 10. voor het II. gedeelte.

VOOR HET I. GEDEELTE. BEREIDING. Zoo IE de zijde is van den veelhoek in den cirkel, zijn FE en NG de zijden van de veelhoeken in en om den cirkel, die slechts het halve getal zijden hebben, en dus zijn die drie veelhoeken als

$$2\ \triangle ICE : \triangle FCE : \triangle NCG = \triangle ICE : \triangle KCE : \triangle ICG$$

BE-

BEWIJS. △ KCE : △ ICE = KQ : IP
= CK : CI
= CE : CG
△ ICE : △ ICG = KE : IG = CE : CG:
dus
△ KCE : △ ICE = △ ICE : △ ICG of
veelh. op FE : veelh. op IE = veelh. op IE : veelh. op NG.

VOOR HET II GEDEELTE: BEREIDING. Zoo NG en FE de zijden zijn van gelijkvormige veelhoeken om en in den cirkel, zal IL = FD de zijde zijn van genen veelhoek in den cirkel, die het halve getal zijden heeft: en dus indien men CL tot aan de raaklijn NIH trekt, is IH de halve zijde van den veelhoek om den cirkel, welke het halve getal zijden bezit, en dus zijn de veelhoeken op NG, FE, en het dubbeld van IH, als de △△ NCG, FCE, en ICH; of als

Het stuk ICLG, dat ∞ △ NCG is, tot △ ICL, die ∞ △ FCE is, en △ ICH.

Daar nu volgens de 23 Bepaling van het III. Boek drie grootheden *harmonisch* evenredig zijn, wanneer de eerste staat tot de derde als het verschil tusschen de twee eerste tot het verschil tusschen de twee laatste, moet men bewijzen dat,
△ ICL : △ ICH = stuk ICLG — △ ICL : △ ICH — stuk ICLG.
of
△ ICL : △ ICH = △ ILG : △ GLH.

BEWIJS. △ ICL : △ ICH = CL : CH = CI : CH:
△ ILG : △ GLH = IG : GH = CI : CH (IV. 12.)
dus
△ ICL : △ ICH = △ ILG : △ GLH: en dus veelhoek op NG *harmonisch* middel-evenredig tusschen veelhoek op FE, en veelhoek op het dubbeld van IH.

AANMERKING. Dus is, bij voorbeeld, volgens het I. gedeelte van dit Voorstel, de zeshoek in den cirkel middel-evenredig tusschen den driehoek in, en den driehoek om den cirkel: en de zeshoek om den cirkel is *harmonisch* middel evenredig tusschen den zeshoek in den cirkel, en den driehoek om den cirkel.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien men in een cirkelstuk [FIELD] eenen gelijkbeenigen driehoek [FED] beschrijft, en wederom eenen gelijkbeenigen driehoek [FIE, ELD] in ieder der cirkelstukken die door de zijden [FE, ED] van den eerstgemelden driehoek [FED]

[F E D] gemaakt worden; zal deze driehoek [F E D] kleiner zijn dan het viervoud der beide andere driehoeken [F I E, E L D] te samen genomen.

HUYGENS de *Circuli Magn.* pr. 1.

BEREIDING. Men trekke IL, en dan EC loodregt op IL: waaruit volgt, FE = ED = IL: en △ IEL = △ ELD = △ FIE.

BEWIJS. □ op FE: □ op LE = ES: EP (V. 15. Gev.)
Maar FI = IE, en FI + IE > FE (I. 19.)
dus FE < 2 IE:
dus □ op FE: □ op IE < 4: 1: dus
ES: EP < 4: 1.
Insgelijks FD: IL of FE < 2: 1.
dus ES × FD: EP × IL < 8: 1.
Maar △ FED: △ IEL = ES . FD: EP . IL (IV. 8.)
dus △ FED: △ IEL < 8: 1. of
△ FED < 8 △ IEL: en dus
△ FED < 4 (△ FIE + △ ELD).

XXX. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien men in een cirkelstuk [I E L] dat kleiner is dan een halve cirkel, eenen gelijkbeenigen driehoek [I E L] beschrijft, en voorts op de zelfde grondlijn [I L] eenen gelijkbeenigen driehoek [I G L] wiens beenen [I G, L G] raaklijnen zijn van gelijke cirkelbogen [I E, L E]: zal de raaklijn [X E Y] die door den top E des eerstgemelden driehoeks [I E L] getrokken wordt, van den laatstgemelden driehoek [I G L] eenen driehoek [X G Y] afsnijden, die grooter is dan de helft van den eerstgemelden [I E L].

HUYGENS de *vera Circuli Magn.* pr. 2.

BEREIDING. Men trekke door G en E de lijn GEC, die dus op IL loodregt valt (I. 27. het 5. Gevolg).

BEWIJS. △ IGL: △ IEL = GP: EP (IV. 7.)
= IG: IX (IV. 2.)
△ XGY: △ IGL = $GX^2 : IG^2$ (IV. 11.)
dus △ XGY: △ IEL = GX^2 : IX . IG
Maar GX > IX, en > ½ IG: (XXVII. Voorst. Gev. 1.)
dus GX^2 > ½ IX . IG: en dus
△ XGY > ½ △ IEL.

V.

V. AFDEELING.

OVER DE VEELHOEKEN DIE DOOR HET TREKKEN VAN DIAGONALEN IN EN UIT ANDERE VEELHOEKEN GEVORMD WORDEN.

XXXI. VOORSTEL. Fig. 161.

In alle veelhoeken kan men zoo vele *diagonalen*, of lijnen die van eenen hoek naar de andere hoeken gaan, trekken, als er eenheden zijn in het getal $\frac{g \times (g - 3)}{2}$; indien g het getal der zijden uitdrukt.

LEXEL, *Novi Commentarii Petropol.* T. XIX. p. 231.

BEWIJS. Er zijn g hoeken in de figuur: dus, indien men A niet mede rekent, $g - 1$: gevolgelijk kan men uit A, naar de andere hoeken $g - 1$ lijnen AB, AD, AE, AF enz. trekken: uit den tweeden hoek B, kunnen $g - 2$ dergelijke en *van de vorige verschillende* lijnen getrokken worden: namelijk BD, BE, BF enz.: want men telt nu de lijn BA, reeds uit A naar B getrokken, niet mede.

Uit den derden hoek zullen er $g - 3$ dergelijke lijnen DE, DF enz. getrokken worden: en zóo voorts, tot dat men aan den hoek, die op éénen na de laatste is, komt, waaruit er maar ééne getrokken zal worden: dus is de som van alle de lijnen, $\overline{g - 1} + \overline{g - 2} + \overline{g - 3} + \overline{g - 4}$ — — — 1, dat is de som van eene arithmetische reeks, die $g - 1$ leden heeft, en daarom (III. 25.) gelijk aan $\frac{(g - 1 + 1) \times \overline{g - 1}}{2} = \frac{g \times \overline{g - 1}}{2}$: maar onder deze lijnen zijn de g zijden van de figuur begrepen: de overige alleen, en niet deze, zijn diagonalen: dus is het getal der diagonalen $\frac{g \times \overline{g - 1}}{2} - g = \frac{g\,(g - 3)}{2}$.

I. GEVOLG.

Men kan dus *eerste*, *tweede*, *derde* diagonalen enz. noemen, de diagonalen die van iederen hoek [A] naar den tweeden [D], of naar den derden [E], of naar den vierden [F] volgenden hoek gaan.

II. GEVOLG.

Indien dan de veelhoek regelmatig is, en dus in eenen cirkel be-

beschreven is, of zijn kan; zal de hoek welke iedere zijde AB van den veelhoek met de *eerste*, *tweede*, *derde*, *enz.* diagonaal, die uit het uiterste van die zijde getrokken wordt, een hoek zijn in den omtrek, die op den boog rust, welke door de zijde des veelhoeks als choorde bespannen wordt, of op eenen dubbelden, drievoudigen, viervoudigen boog, enz. rust: en dus zal die hoek gelijk zijn aan *een*, of aan *twee*, of aan *drie* enz. halve middelpunts hoeken; dat is, de m^e diagonaal zal met de zijde uit wier uitersten zij getrokken wordt, eenen hoek maken $= \frac{m \times 2L}{g}$ (II. Bep. 14. het 1. Gevolg).

Die hoek zal gevolgelijk regt zijn wanneer $\frac{2m}{g} = 1$: of $m = \frac{g}{2}$.

III. GEVOLG.

Doch de hoeken, welke twee achteréénvolgende diagonalen [AD en AE bij voorbeeld] onderling maken, zijn altijd halve middelpunts-hoeken, en dus ieder $= \frac{2L}{g}$: gevolgelijk, daar de hoek dien twee zijden onderling maken $= \frac{\overline{g-2} \times 2L}{g}$ is, (II. Bep. 14. het 1. Gev.) zal de hoek, dien de m^e diagonaal uit eenen hoek getrokken, maakt met de n^e diagonaal uit den zelfden hoek getrokken, doch altijd van den anderen kant afgerekend, gelijk zijn aan $\frac{[g-2-(n+m)]\,2L}{g} = \frac{[g-n+m+2]\,2L}{g}$ en dus zullen die hoeken regt zijn, wanneer $2g - 2n - 2m - 4 = g$, of $\frac{g-4}{2} = n + m$.

IV. GEVOLG.

Indien men door de letter n uitdrukt de *hoeveelste* diagonaal eene diagonaal is; zal die n^e diagonaal met de zijde van den veelhoek uit welke men begint te tellen, en waaruit zij getrokken is, $\overline{n+1}$ zijden van den veelhoek, als choorde, aan den eenen kant bespannen, de eerste diagonaal namelijk twee, de tweede drie zijden, enz. en dus aan den anderen kant $g - (n+1)$ zijden.

V.

V. GEVOLG.

Zoo dan g een *even* getal is, en $g - \overline{n + 1} = n + 1$ of $g = 2n + 2$: of $\frac{g - 2}{2} = n$, zal die n^e diagonaal door het middelpunt gaan, en men, zal tusschen de zijde van waar men telt, en het middelpunt, geen diagonaal van hoogeren rang kunnen trekken: en alle de n^e diagonalen, indien n bestendig $= \frac{g - 2}{2}$, zullen elkander in het middelpunt C ontmoeten.

Maar zoo $n < \frac{g - 2}{2}$ (g altijd een even getal zijnde) zal men nog, alvorens tot het middelpunt te komen, diagonalen van eenen hoogeren rang kunnen trekken: en die van den rang n zullen elkander buiten het middelpunt ontmoeten, en dus door hare ontmoeting verscheide veelhoeken vormen. Eindelijk zal dan het getal $\frac{g - 2}{2} - 1$ of $\frac{g - 4}{2}$ aanduiden, welke de diagonalen van den hoogsten rang zijn, die elkander buiten het middelpunt snijden.

VI. GEVOLG.

Maar zoo g een *oneven* getal is, kan er geen diagonaal door het middelpunt gaan (II. 36.), en dus ook niet de n^e diagonaal, die namelijk welke aan den eenen kant $\overline{n + 1}$ en aan den anderen $g - \overline{n + 1}$ zijden bespant: zoo dan n de hoogste diagonaal is die men trekken kan, zal dezelve $\overline{n + 1}$ zijden bespannen, de volgende zal aan den anderen kant ook $\overline{n + 1}$ zijden bespannen: en er is nog eene zijde tusschen de twee diagonalen: dus is het getal zijden, of $g = \overline{n + 1} + \overline{n + 1} + 1 = 2n + 3$: gevolgelijk is $n = \frac{g - 3}{2}$ de hoogste diagonaal die men tusschen eene zijde en het middelpunt trekken kan, indien het getal g der zijden *oneven* is.

XXXII. VOORSTEL. Fig. 79, 80 en 161.

Alle de diagonalen, die men in eenen regelmatigen veelhoek trekken kan, zullen, 1°. door hunne onderlinge ontmoetingen binnen denzelven, zoo vele gelijkvormige veelhoeken vormen als

als er eenheden zijn in het getal $\frac{g-3}{2}$ zoo het getal g der zijden oneven is; en in het getal $\frac{g-4}{2}$ zoo het getal der zijden even is.

2°. Die veelhoeken zijn alle om het middelpunt des gegeven veelhoeks regelmatig geplaatst: doch de eerste omgekeerd ten opzigte van den gegeven; de tweede regt; de derde omgekeerd enz.: zoo dat de lijn die door den top van eenen der hoeken en het middelpunt getrokken wordt, beurtelings of door de toppen der tegenovergestelde hoeken gaat, of loodregt door de aan elkander evenwijdige zijden van de gevormde veelhoeken, zoo het getal der zijden even is; en bestendig door den top, en loodregt door het midden der tegenoverstaande zijde van iederen veelhoek gaat, zoo het getal der zijden oneven is.

3°. Eindelijk, die veelhoeken worden gevormd, de eerste door de ontmoeting van alle de eerste diagonalen, de tweede door de ontmoeting van alle de tweede, de derde door de ontmoeting van alle de derde diagonalen, enz. die uit iederen hoek getrokken worden.

VOORBEELDEN: Fig. 80. In den zeshoek is $\frac{g-4}{2} = 1$, en er wordt een zeshoek UPQRST binnen den gegeven zeshoek ABDEFG gevormd.

Fig. 79. Voor den vijfhoek is $\frac{g-3}{2} = 1$: en er wordt een vijfhoek ONvxy binnen den vijfhoek GBEHK gevormd.

Fig. 161. Voor den tienhoek is $\frac{g-4}{2} = 3$: en er worden binnen den tienhoek ABDEFHIKLG drie tienhoeken gevormd: namelijk, PQRSTVXYZU: *abcdefghik*: *lmno pqrstu*.

Verder, in Fig. 161. gaat de middellijn BCI door de toppen *c* en *h* des tweeden veelhoeks: doch bestendig loodregt door de zijden PQ en XV des eersten, en de zijden *mn* en *sr* des derden. Doch die zelfde middellijn gaat door den top B en de zijde KH van den vijfhoek GBEHK: en door de zijde ON en den top *x* van den vijfhoek ONvxy: even als in Fig. 80.

BEWIJS I. Er kunnen zoo vele rangen van diagonalen zijn als er een-

eenheden zijn in het getal $\frac{g-3}{2}$ of $\frac{g-4}{2}$, naar mate dat het getal van zijden oneven of even is (XXXI. Voorstel, 5 en 6 Gev.).

Maar, alle de diagonalen van iederen rang maken eenen veelhoek uit, van zoo vele zijden als er diagonalen van den zelfden rang zijn in den gegeven veelhoek; dat is, van zoo vele zijden als er in den gegeven veelhoek zijn:

Dus zullen er $\frac{g-3}{2}$ of $\frac{g-4}{2}$ veelhoeken geboren worden, naar mate *g oneven* of *even* is

Die veelhoeken zijn regelmatig: want het is klaarblijkelijk dat (Fig. 80. 161.) △ ABQ = △ QDE: en △ ABP = △ DRE: en dus dat PQ = QR; ∠ PQR = ∠ ABD: enz. voor de hoeken en zijden van alle de driehoeken.

II. Daar (Fig. 80.) △ BQD gelijkbeenig is, valt het stip Q op de loodlijn die uit het midden L der zijde BD getrokken wordt, en door het middelpunt gaat: dus ∠ PQC = ∠ CQR: en △ PCQ = △ QCR: dus PC = CQ = CR: of C is het middelpunt van dien veelhoek: en dus ook voor alle anderen: waaruit het overige van de tweede stelling volgt.

III. Het derde is van zelf blijkbaar.

I. GEVOLG.

Indien het getal der zijden van den gegeven veelhoek *oneven* is, dienen alle de diagonalen tot de vorming van de nieuwe veelhoeken; doch zoo het *even* is, zijn alle de diagonalen welke door het middelpunt gaan daartoe onnuttig: en deze zijn altijd $\frac{g}{2}$ in getal. Dus zijn in Fig. 80. drie diagonalen AE, BF, DG onnuttig: in den tienhoek van Fig. 161. zijn er vijf, AH, BI, DK, EL, FG.

II. GEVOLG.

Het valt niet moeijelijk de grootte der zijden en loodlijnen van alle die veelhoeken, zoo wel onderling, als met betrekking tot den gegeven veelhoek te bepalen: mits men hier aanneme het geen wij in het VIII. Boek over de *finussen* zullen zeggen.

Namelijk (Fig. 161.) zoo de zijden *even* in getal zijn, is de loodlijn Cz de *finus* des hoeks EGF, die de helft is van den middelpuntshoek ECF

De loodlijn Cα is de *finus* van den hoek DGF = $\frac{2}{2}$ middelpuntshoeken; de loodlijn Cβ is de *finus* van den hoek BGF die gelijk is aan $\frac{3}{2}$ middelpuntshoeken: en de loodlijn Cγ is de *cofinus* van den hoek GCγ, die gelijk is aan $\frac{1}{2}$ middelpuntshoek.

Indien men dan den *binnensten* veelhoek den *eersten* noemt,

en alle de anderen vervolgens, iederen in zijnen rang, den II, den III, enz. heeft men deze evenredigheid:

Loodlijn van den I, tot loodlijn van den II, tot loodlijn van den III, tot loodlijn van den IV, enz. — — — — tot loodlijn van den gegeven veelhoek, = *sinus* ½ middelpuntshoek: *sinus* $\frac{2}{2}$ middelpuntshoeken: *sinus* $\frac{3}{2}$ middelpuntshoeken: *sinus* $\frac{4}{2}$ middelpuntshoeken: enz. — — — — — — — — tot *cosinus* ½ middelpuntshoek.

Doch, zoo het getal der zijden *oneven* is, is ∠EGF = ½ ∠EGH = ½ ∠ECH = ¼ middelpuntshoek: vervolgens ∠BGF = 3 ∠EGF = $\frac{3}{2}$ ∠ECH = ¾ middelpuntshoek: enz. steeds met ½ middelpuntshoek opklimmende: en dus is

Loodlijn I veelhoek, tot loodlijn II veelhoek, tot loodlijn III veelh. enz. — — — — — — tot loodlijn van den gegeven veelhoek = *sinus* ¼ middelpuntshoek: *sinus* ¾ middelpuntshoek: *sinus* $\frac{5}{4}$ middelpuntshoek: enz. — — — tot *cosinus* ¼ middelpuntshoek.

De zijden of omtrekken staan in de zelfde rede (IX. Voorst. en IV. 28).

III. GEVOLG.

Indien het getal der zijden *even* is, wordt de *binnenste* veelhoek, die namelijk welke het digtst bij het middelpunt is, door diagonalen van den rang $\frac{g-4}{2}$ gevormd (XXXI. Voorst. 5. Gev.): die diagonaal maakt dus op de zijde, uit welke zij getrokken is, eenen hoek $= \frac{(g-4)\,2\,L}{2\,g} = \frac{g-4}{g}\,L$, en dus, daar twee naastliggende zijden [AB, AG] eens veelhoeks onderling eenen hoek maken $= \frac{(g-2)\,2\,L}{g}$ (II. Bep. 14. met 1. Gev.) zal die diagonaal met de tweede van die beide zijden, [met AG] eenen hoek maken $= \frac{(g-2)\,2\,L}{g} - \frac{(g-4)}{g}\,L$ $= L$: gevolgelijk zijn de diagonalen, welke den binnensten veelhoek vormen, juist die gene welke loodregt staan op de zijden waarop zij getrokken worden: die dus de aan elkander evenwijdige zijden vereenigen: deze binnenste veelhoek is dan die van welken wij in het XXXV. Voorstel van het II. Boek en in het XIV. (het 7. Gevolg), van dit Boek, na den Heer DU FAY, gesproken hebben, en die het verschil is tusschen den regelmatigen veelhoek om, en den regelmatigen veelhoek in den cirkel beschreven.

Dit zelfde blijkt ook uit het geen wij in het voorgaande gevolg gezegd hebben; want de loodlijn van dien binnensten veelhoek is gelijk aan *sinus* ½ middelpuntshoek: dus gelijk aan de halve choorde van den middelpuntshoek; dat is gelijk aan de halve zijde van den gegeven veelhoek.

XXXIII. VOORSTEL. Fig. 80, 161.

Indien het getal der zijden van eenen regelmatigen veelhoek *even* is, en men de twee naastliggende zijden door diagonalen, en dus door diagonalen van den eersten rang, vereenigt, zullen er twee gelijke en gelijkvormige veelhoeken geboren worden, wier zijden half zoo veel in getal zijn als de zijden in den gegeven veelhoek.

VOORBEELDEN. In Fig. 80. worden twee gelijkzijdige driehoeken ADF, BEG: en in den tienhoek van Fig. 161, worden twee vijfhoeken ADFILA, en GBEHKG gevormd.

BEWIJS. Indien men eenigen hoek B voor den eersten aanneemt, zullen de diagonalen getrokken van den eersten hoek B naar den derden E, van den derden E naar den vijfden H enz. tot dat men weder op den eersten te rug komt, eenen regelmatigen veelhoek uitmaken, die het halve getal zijden hebben zal.

Indien men diagonalen trekt van den tweeden hoek D naar den vierden F, van den vierden F naar den zesden I enz.: zal er wederom een gelijke en gelijkvormige veelhoek ontstaan.

Maar de diagonalen van den derden hoek E naar den vijfden H, van den vijfden naar den zevenden enz. behoren reeds tot den eersten veelhoek: en die van den vierden hoek naar den zesden, van den zesden naar den achtsten enz behoren reeds tot den tweeden veelhoek: dus kunnen er maar twee dergelijke veelhoeken geboren worden.

I. AANMERKING. Het blijkt van zelf waarom wij in het Voorstel zeggen *indien het getal van zijden even is*: want in eenen veelhoek, die een oneven getal zijden bezit, kan men door het trekken van diagonalen van den eersten rang geen nieuwen veelhoek doen geboren worden.

I. GEVOLG.

De zijden van die beide veelhoeken liggen in de zelfde rigting als de zijden van den eersten innerlijken veelhoek, PQRSTVXYZU, waarvan wij in het XXXII. Voorstel gesproken hebben: doch beurtlings; de eerste namelijk, de derde, de vijfde, van deze laatstgemelde zijden, of PQ, RS, TV enz. zullen tot den eersten, doch de tweede, vierde, zesde enz., of QR, ST, VX enz. tot den tweeden veelhoek behoren.

II. GEVOLG.

De zijden van die beide veelhoeken zijn dus slechts verlengingen van de zijden des innerlijken veelhoeks; zoo dat derzelver hoeken beurtelings gevormd worden door de onderlinge ontmoeting van de verlengde *even* zijden des innerlijken veelhoeks, en van de verlengde *oneven* zijden des zelven.

III. GEVOLG.

Men zal, door de verlenging der zijden, alle de innerlijke veelhoeken, ontstaan op de wijze in het XXXII. Voorstel gemeld, ieder in twee regelmatige veelhoeken veranderen, die de helft van het getal zijden zullen hebben van den gegeven veelhoek: en daar de zijden dier nieuwe veelhoeken de verlengingen zijn der zijden van de innerlijke veelhoeken uit welken zij gevormd worden, zijn zij ook deelen van de tweede diagonalen voor de veelhoeken uit den tweeden innerlijken veelhoek gevormd: van de derde diagonalen voor de veelhoeken uit den derden innerlijken veelhoek gevormd en zoo voorts.

IV. GEVOLG.

De hoek, welken de m^e diagonaal met de eerste uit het zelfde stip getrokken maakt, is (XXXI. Voorst. 2 Gev.) $= \overline{m-1} \times \frac{2\,L}{g}$, en dus zal die hoek regt zijn, wanneer $\frac{\overline{m-1} \times 2}{g} = 1$: of $m = \frac{g+2}{2}$ is: maar de eerste diagonaal is hier de zijde van den nieuwen veelhoek, en dus wanneer $m = \frac{g+2}{2}$, is, is die m^e diagonaal de loodlijn uit het einde der zijde van den nieuwen veelhoek op dezelve getrokken.

V. GEVOLG.

Indien dan het getal der zijden van eenen veelhoek wel *even*, doch deszelfs helft oneven is, (zoo als voor den tienhoek) zal de nieuwe veelhoek (bij v. de vijfhoek G B E H K). een oneven getal zijden bezitten: en de gemelde m^e diagonaal van den eersten veelhoek zal, zoo $m = \frac{g+2}{2}$ (voor den tienhoek de zesde G I) de loodlijn zijn die op de zijde van den nieuwen veelhoek opgerigt, den innerlijken gelijkvormigen veelhoek (δξβλφ) waarvan wij hier boven in het XXXV. Voorst.

Voorstel van het II. Boek, en in het 7. Gevolg van het XIV van dit Boek, na den Heer DU FAY, gesproken hebben, helpt uitmaken, en welke veelhoek het verschil is tusschen den veelhoek van een *oneven* getal zijden om den cirkel, en den gelijkvormigen veelhoek binnen den cirkel beschreven (Voorstel XIV. Gevolg 5, 6, 7.); doch daar er $\overline{g-3}$ diagonalen uit eenen hoek kunnen getrokken worden, zullen nog $g-3-\left(\frac{g+2}{2}\right)$ dat is $\frac{g-8}{2}$ diagonalen overig blijven: en dus, van den anderen kant beginnende te tellen, zoo als wij tot nu toe gedaan hebben, is de gemelde diagonaal de $\frac{g-8}{2}+1$ of de $\left(\frac{g-6}{2}\right)^e$: En dus indien men een veelhoek van een oneven getal zijden heeft, denzelven vooronderstelt in eenen cirkel beschreven, en uit denzelven, door verdeeling der bogen in twee gelijke deelen, eenen veelhoek van een dubbeld getal zijden vormt, zullen de $\overline{\left(\frac{g-6}{2}\right)}^e$ diagonalen van dezen nieuwen veelhoek, door hare ontmoetingen, eenen gelijkvormigen veelhoek vormen, waarvan de zijden, door hare verlenging, zoo als in dit Voorstel gezegd is, twee veelhoeken zullen uitmaken, die aan den eersten gegeven gelijkvormig zijn zullen, aan elkander gelijk, en bovendien gelijk aan het verschil dat er is tusschen den gegeven veelhoek en den gelijkvormigen om den cirkel beschreven, zoo als wij hier boven in navolging van Heer DU FAY gezegd hebben.

II AANMERKING. Men ziet hieruit hoe het Voorstel van den Heer DU FAY voor de oneven veelhoeken indedaad maar een gevolg is van zijn Voorstel voor de even veelhoeken; en dat het juist daarvan afhangt dat er binnen den gegeven oneven veelhoek niet slechts een, zoo als voor de even veelhoeken, maar twee veelhoeken gevormd worden, die aan het vereischte voldoen. Men zoude zelfs de beide voorstellen met de zelfde woorden kunnen uitdrukken: want de lijnen, welke de evenwijdige zijden vereenigen van veelhoeken, die een even getal zijden bezitten, zijn loodregt op die zijden: en dus is het algemeen Voorstel dit: „ indien men uit ieder der hoeken van eenen regelmatigen „ veelhoek loodlijnen op de zijden trekt, zullen die lood- „ lijnen door hare onderlinge ontmoeting eenen nieuwen „ regelmatigen en met den gegeven gelijkvormigen veelhoek „ vormen, zoo het getal der zijden in den gegeven *even* „ is: doch zij zullen twee gelijke en gelijkvormige vor- „ men, zoo het getal dier zijden *oneven* is."

III. AANMERKING. Het spreekt van zelf dat ieder van die nieuwe veelhoeken weder door diagonalen verdeeld kan worden.

XXXIV. VOORSTEL.

Indien men de zijden eens regelmatigen veelhoeks wederzijds verlengt, en de stippen, in welke die verlengde zijden elkander ontmoeten, door lijnen vereenigt; zullen deze lijnen zoo vele regelmatige, met den gegeven gelijkvormige, en om het zelfde middelpunt beschreven, veelhoeken uitmaken, als er eenheden begrepen zijn in het getal $\frac{g-4}{2}$, zoo de zijden van den gegeven veelhoek *even*, of in het getal $\frac{g-3}{2}$, zoo zij *oneven* in getal zijn.

VOORBEELDEN. Uit den vijfhoek ONvxy Fig. 79. komen de stippen CBEHK, die de punten van eenen vijfhoek maken. Uit den zeshoek UPQRST, fig 80. komen door de verlenging der zijden UP en QR, PQ en RS, QR en ST, RS en TU, TS en UP, UT en PQ, de stippen B, D, E, F, G, A die een nieuwen zeshoek uitmaken: in fig. 162 komen er uit den gegeven tienhoek, *emnopqrstu*, drie tienhoeken: namelijk door verlenging der zijden *em* en *no*, *mn* en *op*, *no* en *pq* enz. altijd eene zijde tusschen beiden latende, de tienhoek *aNbvcxdyeo*: door verlenging der zijden *em* en *op*, *nm* en *pq*, *no* en *qr* enz. altijd twee zijden tusschen beiden latende, de tienhoek MSTVUXPYRQ: eindelijk door verlenging der zijden *mn* en *qr*, *no* en *rs*, *op* en *st* enz., altijd drie zijden tusschen beiden latende, de tienhoek EFHIKLGABD.

BEWIJS I. De twee over elkander staande zijden van eenen regelmatigen veelhoek, welke evenwijdig aan elkander zijn, zijn door een getal $\frac{g-2}{2}$ zijden van elkander verwijderd: doch deze, hoe ook verlengd zijnde, kunnen elkander nimmer ontmoeten: dus zal een derzelve maar $\frac{g-2}{2}-2$ dat is $\frac{g-4}{2}$, verlengde zijden kunnen ontmoeten, en er zullen dus maar $\frac{g-4}{2}$ veelhoeken gevormd worden

II. Indien men in eenen veelhoek, waarvan de zijden *oneven* in getal zijn, eene zijde neemt, zijn er tusschen dezelve en den overstaanden top $\frac{g-1}{2}$ zijden begrepen, en dus zal die zijde, verlengd zijnde, $\frac{g-1}{2}-1$ of $\frac{g-3}{2}$ verlengde zijden, wederzijds, ont-

ontmoeten: en gevolgelijk door die ontmoeting de toppen van even zoo vele veelhoeken vormen, die alle regelmatig zullen zijn, en om het zelfde middelpunt beschreven.

I. AANMERKING. De uiterlijke veelhoeken, dus door samenstelling uit den gegeven veelhoek geboren, zijn, op den gegeven en den laatsten na, niet de zelfde welke uit dezen, door het trekken van diagonalen, gevormd worden op de wijze in het XXXIII. Voorstel aangewezen: dus zijn in fig. 162 en 161, de veelhoeken *emnopqrstu* en ABDEFHIKLG de zelfde: de beide overige tienhoeken zijn verschillende; doch in den tweeden, *aNbvcxgyeO*, komen de stippen *N*, *v*, *x*, *y*, *O*, overeen met de stippen welke door de zelfde letters uitgedrukt worden in Fig. 161. en het valt ook niet moeijelijk te onderscheiden welke lijnen het zijn, in de figuur 161, die de stippen, in de figuur 162 door Q, R, S, T, U uitgedrukt, en den derden tienhoek uitmakende, doen geboren worden; doch om dit duidelijker te maken hebben wij de hoeken, welke door de ontmoeting dier lijnen gevormd worden door grovere stippen aangewezen.

II. AANMERKING. Indien men de stippen, daar de verlengde zijden elkander ontmoeten, niet door lijnen vereenigt, zullen die stippen de kruinen zijn van regelmatige sterachtige figuren, om den gegeven veelhoek beschreven, en waarvan de verlengde zijden des veelhoeks de zijden zijn.

ZEVENDE BOEK.

OVER DEN OMTREK, EN DEN INHOUD VAN DEN CIRKEL.

I. AFDEELING.

OVER DE LIMIETEN DER GROOTHEDEN EN DER REDEN.

VOORBERIGT.

Ik vind het noodig, alvorens tot het hoofdonderwerp van dit Boek over te gaan, en hetzelve uit streng wiskundige grondbeginsels afteleiden, iets over die grondbeginsels zelve, namelijk over de leer der *Limieten*, of *Grenspalen*, van veranderlijke grootheden te zeggen: al ware het slechts om de verkeerde begrippen, en alleszins onnaauwkeurige bewijzen, door sommige nieuwere wiskundigen voorgedragen, tegen te gaan. NEWTON heeft reeds over de *Limieten*, onder den naam van *rationes primae et ultimae*, in de eerste afdeeling des eersten boeks zijner *Principia* gehandeld MACLAURIN heeft die zelfde stoffe, in den trant der Ouden, vooral van ARCHIMEDES, uitmuntend uitgelegd in de Inleiding van zijne *Treatise on Fluxions:* waarin hij door ROBERT SIMSON is gevolgd; van wien men, in zijne *Opera Posthuma*, eene Verhandeling deswegens aantreft onder den titel van *de Limitibus quantitatum et rationum fragmentum.* Men kan ook raadplegen het geen daar over gezegd is geworden door LA CHAPELLE *Institutions de géometrie*, *Tome* II. §. 433 seqq. en door D'ALEMBERT, zoo wel in de *Encyclopedie*, op het woord *Limite*, als in de *Mélanges de Philosophie*, *Tome* V. p. 239. Maar niemand onder de latere Schrijvers heeft over deze stoffe vollediger en naauwkeuriger geschreven dan L'HUILIER, in zijne *Exposition des principes des Calculs supérieurs*, *Chap.* I: en naderhand in zijne *Principiorum Calculi differentialis et Integralis expositio.* Ik zal uit die Schrijvers het weinige dat onmiddelijk tot mijn bestek behoort ontleenen, en in eene geregelde orde voordragen. Voorbeelden zullen hier wel het meeste afdoen om een duidelijk begrip van *Limieten* te bekomen.

I. BEPALING.

Indien eenige grootheid [A], door vermeerdering, of

door vermindering, aan eene andere grootheid [L] hoe langer hoe nader komt, zonder echter dezelve immer te kunnen overtreffen of evenaren; wordt die tweede grootheid [L] de *Limiet* van de eerstgemelde [A] genoemd; en wel de *Limiet* in *grootte* zoo de grootheid [A] aan de Limiet [L] bij *vermeerdering*, doch de *Limiet* in *kleinheid*, zoo zij aan dezelve bij *vermindering* hoe langer hoe nader bijkomt.

I. GEVOLG.

Daar de grootheid A, door bestendige vermeerdering of vermindering, aan de grootheid L, dat is aan hare *Limiet*, altijd nader en nader komt; volgt het, dat zij zoodanig vermeerderd of verminderd kan worden, dat zij van hare *Limiet* minder verschillen zal dan eenige mogelijke gegeven grootheid bedraagt, hoe klein die ook zijn moge.

VOORBEELDEN.

I. VOORBEELD. Fig. 121. De *raaklijn* AT, is de *limiet* in *kleinheid* van alle de *snijlijnen* AH, AE, enz.: die uit het zelfde stip A tot den hollen omtrek van den cirkel getrokken kunnen worden, en de *limiet* in *grootte* van alle de lijnen AR, AS, enz., die slechts tot aan den bolsen omtrek komen.

AANMERKING. Men zoude, doch in eenen *oneigenlijken zin*, kunnen zeggen, dat de middellijn de *limiet* is in *grootte* van alle de choorden, indien niet de middellijn zelve in den *eigenlijken zin* tot de choorden behoorde; en dus eene grootheid is, die door eene *choorde*, *choorde blijvende*, kan geëvenaard worden: het geen in het denkbeeld van *limiet* niet begrepen is, of begrepen kan worden: daar, in tegendeel, in ons voorbeeld, de snijlijnen, zoo lang zij snijlijnen zijn, de raaklijn AT niet kunnen evenaren.

II. VOORBEELD. De breuk $\frac{1}{3}$ is de *limiet* in grootte van de breuk 0,333333333 zoo ver men wil uitgestrekt.

III. VOORBEELD. De geometrische middelevenredige is de *limiet* in kleinheid van de arithmetische middelevenredige, tusschen twee grootheden (III. 21.).

IV. VOORBEELD. Het getal 1 is de *limiet* in grootte van deze geometrische reeks

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ enz. zoo ver men wil, of, gelijk ſommigen ſpreken, in het *oneindige*, uitgeſtrekt.

V. VOORBEELD. Het getal $\frac{4}{3}$ of $1\frac{1}{3}$ is de *limiet* in grootte van deze geometriſche reeks, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ enz. zoo ver men wil, of, gelijk velen zich wel uitdrukken, in het *oneindige*, uitgeſtrekt. Men vergelijke hier mede III. 18. Gev. 1. Aanm. 2.

I. AANMERKING. In het algemeen, de uitdrukking (III. 18. Gev. 1.) $S = \frac{A(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{A q^n}{q - 1} - \frac{A}{q - 1} = \frac{A q^n}{q - 1} + \frac{A}{1 - q}$ is de ware ſom van een getal n leden eener geometriſche reeks, A, Aq, Aq^2, Aq^3 — — Aq^{n-1}; doch $S = \frac{A}{1-q}$, of $S = \frac{A^2}{A - B}$, is de *limiet* van de geheele afnemende reeks, zoo ver men wil uitgeſtrekt: en van hier de uitdrukking van ſommigen, dat $\frac{A}{1-q}$, of $\frac{A^2}{A-B}$, de ſom is van een *oneindig* getal leden van eene geometriſche afnemende reeks: deze uitdrukking $\frac{A}{1-q}$ wordt 1, indien, gelijk in voorbeeld IV, $A = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$: en $\frac{4}{3}$, indien, gelijk in voorbeeld V, $A = 1$, $q = \frac{1}{4}$.

II. AANMERKING. Deze uitdrukking $S = \frac{A^2}{A-B}$ voor de ſom van een *oneindig* aantal leden eener geometriſche reeks, geeft $S : A = A : A - B$: waaruit dit voorſtel volgt, dat ik ergens in de nagelaten handſchriften van HUYGENS gevonden heb, „zoo grootheden in eene gedurige „afnemende geometriſche reeks ſtaan, is de grootſte „van alle, met alle de overigen in het *oneindige*, tot „de grootſte, als de grootſte, tot de overmaat van „de grootſte boven de volgende.”

III.

III. AANMERKING. Deze *limiet* $S = \frac{A}{1-q}$ komt ook wel onder de gedaante van dit voorstel voor. „ Als van eene „ gegeven grootheid wordt genomen het $\frac{1}{q}$ gedeelte, van „ dit stuk wederom het $\frac{1}{q}$ gedeelte, en zoo vervolgens, „ telkens het $\frac{1}{q}$ gedeelte van het laatstgenomen stuk, „ zullen alle deze $\frac{1}{q}$ gedeelten te famen gelijk zijn aan „ het $\frac{1}{q-1}$ gedeelte van die gegeven grootheid. Zie FLORYN, *Grondbeginsels der hoogere Meetkunde*, §. 77.

IV. AANMERKING. Indien men de *limiet* $S = \frac{A}{1-q}$ toepast op het V. Voorbeeld, en het alles te famen vergelijkt met het geen gezegd is in het I. Gevolg van het XVIII. Voorstel des derden Boeks, Aanm. 2. zal het blijken, hoe deze leer met het Voorstel van ARCHIMEDES, aldaar vermeld, overeenkomt.

II. BEPALING.

Wanneer de rede tusschen twee grootheden aan de bestendige rede, die er tusschen twee andere grootheden is, bij vermeerdering of vermindering, nader en nader bijkomt, wordt de laatstgemelde rede de *limiet*, in *grootte* of in *kleinheid*, van de eerstgemelde rede genoemd.

VOORBEELDEN. De rede van $\sqrt{2} : 1$ is de limiet in grootte van alle de getallen waardoor men de rede, die de diagonaal van een vierkant tot deszelfs zijde heeft, kan uitdrukken.

De rede van $2 : \sqrt{3}$ is de limiet in grootte van de getallen waardoor men de rede van de zijde eens gelijkzijdigen driehoeks tot deszelfs loodlijn kan uitdrukken.

De rede van $\sqrt{3} : 1$ is de limiet van de rede die de zijde des gelijkzijdigen driehoeks, in den cirkel beschreven,

ven, heeft tot den radius van den cirkel, indien men die rede in getallen uitdrukt.

I. VOORSTEL.

Zoo er twee grootheden zijn, A en B, en men van de grootste, de helft, of meer dan de helft, aftrekt; en van het overschot wederom de helft, of meer dan de helft; en zoo voorts, altijd op de zelfde wijze; zal er eindelijk eene grootheid overschieten die kleiner zijn zal dan de tweede gegeven grootheid B, hoe klein deze ook zij.

EUCL. X. 1: of bij KOENIG *Lemma* voor XII. 2.: en eenigermate bij TACQUET *Lemma* 2. na VI. 11.

BEREIDING. Fig. 146. Zij AB de grootste, F de kleinste der gegeven grootheden: men neme van F, een zoodanig veelvoud GM, dat het zelve grooter worde dan de gegevene AB maar eenmaal minder genomen, kleiner zoude zijn dan deze. Men snijde van AB af AC, d. i. de helft, of meer dan de helft; van het overschot CB, de helft, of meer dan de helft, CD; van het overschot DB, de helft of meer dan de helft, DE: en herhale dit zoo vele malen als F in GM begrepen is: dat is in deze figuur vier malen.

BEWIJS. Om dat $GM > AB$, $GI < \frac{1}{2} GM$ en $AC =$ of $> \frac{1}{2} AB$: is $GM - GI > AB - AC$: d. i. $IM > BC$. Om dat $IM > BC$, $IK < \frac{1}{2} IM$ en $CD =$ of $> \frac{1}{2} CB$ is $IM - IK > BC - CD$: d. i. $KM > DB$. Om dat $KM > BD$, $KL < \frac{1}{2} KM$ en $DE =$ of $> \frac{1}{2} DB$ is $KM - KL > DB - DE$: d. is $LM > EB$. Maar $LM = F$: dus $EB < F$, hoe klein ook F zijn moge.

GEVOLG.

Men kan dan geen grootheid zoo klein geven, of het overschot zal eindelijk nog geringer worden.

II. VOORSTEL.

Wanneer twee grootheden gegeven zijn, waarvan de eene [L] bestendig, de andere [A] veranderlijk is, doch, bij vermeerdering of bij vermindering, nader en nader bij de eerstgemelde grootheid [L] komen, en er dus minder

van

van verschillen kan dan eenige te geven grootheid bedraagt: zal de rede van gelijkheid de *limiet* zijn, in grootte of in kleinheid, van de rede dier beide grootheden: en omgekeerd.

L'HUILIER §. 2. — TACQUET *Theor. sel. ex* ARCHIMEDE pr. 1, 2.

BEWIJS. Zoo men het tegendeel stelt, zij L = A ± B: dan is het verschil tusschen de beide grootheden gelijk aan eene bepaalde grootheid, het geen tegen de onderstelling strijdt, welke stelt, dat het gemelde verschil kleiner is dan eenige grootheid die gegeven kan worden.

I. AANMERKING. Dit zal door eene nadere uitlegging der voorbeelden van de I. Bepaling opgehelderd worden.

II. AANMERKING. Van daar de uitdrukking van sommigen, dat eene grootheid in hare *limiet eindigt*.

III. VOORSTEL.

Zoo ééne en de zelfde grootheid [L] de *limiet* is, het zij in grootte, het zij in kleinheid, van andere grootheden, b. v. [A en B] is de rede van gelijkheid de *limiet* der rede van deze grootheden.

BEWIJS. De rede van A : L is eindelijk die van gelijkheid of eindelijk A : L = 1 : 1 (II. Voorstel); en eveneens B : L = 1 : 1; dus eindelijk A : B = 1 : 1 of de rede van A : B komt hoe langer hoe nader aan de rede van gelijkheid.

AANMERKING. Van daar de uitdrukking van sommigen, dat de *laatste rede* dier grootheden eene rede van gelijkheid is.

I. VOORBEELD. De *limiet* van de rede der beide reeksen, $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$ enz. en $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ enz. beide zoo ver men wil vervolgd, is die van gelijkheid.

II. VOORBEELD. Fig. 147. Indien de lijnen AB, BC, regthoekig op elkander staande, met de kromme lijn AC eene figuur uitmaken; en men de grondlijn BC in zoo vele gelijke deelen BD, DE, EF enz. als men wil verdeelt, om dus door middel der lijnen MD, EN enz., AM, SLN enz. de regthoeken AMDB, SLDB, DLNE, RKED enz. te maken: zal men door het getal der deelen BD, DE, enz. te vermeerderen, en dus hunne grootte te verminderen, de kromlijnige figuur ABCA tot limiet van de uit-

uitwendige [BAMLNKOIPTCH] en van de inwendige [BSLRKQIUCB] hebben: en de *limiet* der rede van deze figuren zal dus eene rede van gelijkheid zijn.

NEWTON *Lem.* 2, 3.

BEWIJS. De overmaat der uitwendige figuur AMLNKO enz. boven de kromlijnige BAC is de som van alle de driehoeken AML, LNK, KOI enz. De overmaat der kromlijnige figuur boven de inwendige SLRKQIUH enz. is de som van alle de driehoeken ASL, LRK, KQI enz.: welke driehoeken, en dus welke sommen, kleiner en kleiner worden naar mate de deelen BD, DE enz. kleiner genomen worden: waaruit het voorstel volgt; te weten dat de uitwendige en de inwendige figuur nader en nader komen aan de kromlijnige figuur die hare limiet is, en dus nader en nader aan elkander.

AANMERKING. Het zelfde heeft plaats, al wordt de kromme lijn AC in eene regte lijn [Fig. 148.] AC veranderd, en dus al heeft men eenen regtlijnigen driehoek ACB: welk voorstel van een zeer groot nut in de Natuurkunde is. Er is een bewijs van de voornaamste eigenschappen der versnellende beweging, en dus van die der vallende ligchamen, dat daarop steunt: zie 's GRAVESANDE *Physica* §. 373. — MUSSCHENBROEK §. 186. — KEHL *Inleiding tot de ware Wis- en Sterrekunde.* XI. *Les*, *Theor.* XVII.

IV. VOORSTEL.

Zoo twee grootheden beiden de *limieten* zijn van eene derde, is hare rede die van gelijkheid; dat is, zij zijn gelijk.

BEWIJS. Uit het III. Voorstel.

LA CHAPELLE, §. 433.

BEWIJS. Dat A en B beiden de *limiet* zijn van C: zoo A niet gelijk B, zij A = B + D: daar nu B de *limiet* is van C, zal C nader aan B kunnen komen, dan eenige gegeven grootheid: dus zal het verschil tusschen C en B + D, ten minsten zijn D: maar door de *assumtie* is B + D = A: dus zal C altijd, ten minsten de grootheid D, van A verschillen, dat tegenstrijdig is met het denkbeeld van *limiet*, en A is door de onderstelling *limiet* van C. Het is dus onmogelijk dat A en B niet gelijk zijn aan elkander.

AANMERKING. Men zal hier onder een voorbeeld van dit geval aantreffen.

V. VOORSTEL.

Zoo twee grootheden A en B, beide in hare vermeerdering, of beide in hare vermindering, altijd de zelfde rede [$a:b$] tot elkander behouden, zal ook die rede de rede harer *limieten* [L en l] zijn.

TACQUET *Porisma* n. XII. 2. — MACLAURIN p. VI. — L'HUILIER §. 3.

BEWIJS. Zij $A:B = a:b$: zoo nu niet $L:l = a:b$, is
$L:l$ of $>$ of $< a:b$:
zij $L:l > a:b$:
en dus $L - X : l = a:b = A:B$.

Zoo nu L en l de limieten in grootte zijn van A en B: is B $< l$: dus moest ook A altijd kleiner zijn dan $L - X$; dus minder tot L naderen dan eene gegeven grootheid X, dat tegen het denkbeeld van eene *limiet* strijdt; dus is niet $L:l > a:b$.

Zij $L:l < a:b$: dus
$L:l - X = a:b = A:B$:

Maar A is $<$ L:, dus moest B ook altijd kleiner zijn dan $l - X$; dat insgelijks tegen het denkbeeld van eene *limiet* strijdt:

dus is noch $L:l > a:b$
noch $L:l < a:b$
dus is $L:l = a:b$.

Zoo L en l de limieten in kleinheid zijn, is de redeneering de zelfde: men stelt voor het eerste geval,
zoo $L:l > a:b$,
$L:l + X \; a:b$:
en voor het tweede, zoo $L:l < a:b$,
$L + X : l = a:b$.
de ongerijmdheid blijft de zelfde.

VOORBEELDEN.

1. Fig. 67. In alle driehoeken ACB, waarin de lijn CH de tegenoverstaande zijde in twee gelijke deelen deelt, is altijd, hoe ook de driehoek moge zijn (II. 22. Gev.):

$$\frac{\square \text{ op } AC + \square \text{ op } CB}{2} - \square \text{ op } CH = \tfrac{1}{4} \square \text{ op } AB =$$
$$\square \text{ op } AH = \square \text{ op } HB.$$

Maar de lijn AB is de limiet in kleinheid van de som der

der zijden AC en CB (I. 19): want hoe dichter C bij de lijn AB valt, hoe nader AC + CB aan AB komt; zonder immer AB te kunnen evenaren: en gevolgelijk, wat voor de zijden AC en CB geldt, geldt ook voor derzelver limiet, dat is voor de lijn AB. Indien men dan onderstelt dat C ergens in D valt, en ■ in H, moet volgens dit voorstel ook het zelfde voor de lijn AB plaats hebben: namelijk

$$\frac{\square \text{ op } AD + \square \text{ op } DB}{2} - \square \text{ op } DH = \square \text{ op } AH$$

nu kan men regtstreeks bewijzen, dat dit zoo is: want, uit II. 3. Gev. 2: en II. 3. is

$\square$ op AD = $\square$ op AH − $\square$ op DH − 2 regth. uit AD, DH.

en $\square$ op DB = $\square$ op AH + $\square$ op DH + 2 regth. uit AH, DH

en dus $\square$ op AD + $\square$ op DB = 2 $\square$ op AH + 2 regth. uit DH, DH.

dat is

$$\square \text{ op } AH = \frac{\square \text{op } AD + \square \text{ op } DB}{2} - \square \text{op } DH$$

Men kan de zaak op de zelfde wijze aantoonen indien de $\triangle$ ACB stomp is, en dus het stip D buiten AB valt.

II. Fig. 121. In den cirkel heeft altijd voor de snijlijnen deze rede plaats (V. 17.): regth. uit AE, AR = regth. uit AH, AS: en gevolgelijk heeft dit ook voor de limieten der snijlijnen, dat is (I. Bep. I. Voorbeeld) voor de raaklijnen, plaats: en dus
$\square$ op AT = $\square$ op AU, of AT = AU, dat men reeds uit andere grondbeginselen weten kan. (uit V. 11. Gev. 4. en V. 20. Gev. 2.)

III. Fig. 149. De raaklijn in eenig stip B, dat bestendig is, is de limiet van alle de snijlijnen die door dat stip gaan. Laat men door het middelpunt C de middellijn FCEA trekken, die de snijlijn DBA in A ontmoet: laten BRM en DNI en KCG loodregt op de middellijn staan: en BQ evenwijdig zijn aan EF. Dan is bestendig, uit de gelijkvormige driehoeken BOD en ARB, voor alle de snijlijnen door B getrokken, DO:OB = RB:

RB : RA, en dus is de limiet in kleinheid van DO tot de limiet in kleinheid van OB = RB : RA en die rede zal ons aanduiden waar A vallen moet, op dat ABD eene raaklijn in B zijn zoude.

Immers is DO : OB = OQ : IO (V. 12. Gev. 1.); en dus is de rede der limieten van OQ en IO die der limieten van DO en OB: maar de limiet van OQ is BQ = 2 BP = 2 RC (V. 9.): de limiet van IO is MB = 2 RB: dus is de rede van RC : RB die der limieten van DO, en OB, dus die van RB en RA: gevolgelijk zal ABD raaklijn zijn indien RC : RB = RB : RA, dat is, indien RB middel-evenredige tusschen RC en RA is: het geen ook, buiten alle kennis van limieten, onmiddellijk volgt uit het geen wij bewezen hebben, (V. 4.) dat, zoo ABD raaklijn is, de ∠ ABC = L is: en dus (IV. 15 Gev. 1.) RC : RB = RB : RA.

AANMERKING. Wij zullen, in de volgende Voorstellen, nog vele voorbeelden, bijbrengen: doch dit zij genoeg om de juistheid van het denkbeeld van limiet te bevestigen.

GEVOLG.

Zoo twee grootheden A en B, beiden veranderlijk, bestendig de zelfde rede blijven behouden tot twee bestendige grootheden [A : B = $a : b$], welke vermeerdering of vermindering zij ook ondergaan: zullen derzelver *limieten* [L en l] in de zelfde rede [van $a : b$] staan.

L'HUILIER §. 4. — MACLAURIN p. XI. — TACQUET *selecta ex* ARCHIMEDE pr. 1 en 2.

VI. VOORSTEL.

Zoo twee reden van veranderlijke grootheden [A en B, L en M] altijd gelijk blijven, welke verandering in vermeerdering of vermindering die grootheden mogen ondergaan, [dat is, zoo bestendig A : B = L : M]: zijn de reden harer *limieten* [a en b, l en m] ook gelijk, [dat is, $a : b = l : m$].

L'HUILIER §. 5.

BEWIJS. Daar de rede van $a : b$ de limiet is van de rede A : B is zij het ook van de rede L : M. Maar de rede van $l : m$ is de limiet van de rede van L : M: dus zijn $a : b$ en $l : m$ de limieten van eene en de zelfde rede L : M dus

zijn de reden van *a* : *b* en van *l* : *m* gelijk door het IV. Voorstel.

VII. VOORSTEL.

De *limiet* van eene rede, uit twee of meerdere grootheden [A : B en G : D] famengesteld, is de famengestelde rede der *limieten* [*a* : *b* en *g* : *d*] van die grootheden [A, B, G, D].

LA CHAPELLE §. 434. — L'HUILIER §. 6.

BEWIJS. Indien A : B voor limiet heeft *a* : *b* : en G : D voor limiet heeft *g* : *d*, komt *a* : *b* nader aan A : B dan eenige gegeven grootheid kan bedragen: en insgelijks *g* : *d* nader aan G : D dan eenige grootheid kan bedragen: dus zal ook $\frac{a}{b} \times \frac{g}{d}$ nader aan $\frac{A}{B} \times \frac{G}{D}$ komen, dan eenige gegeven grootheid, dat is, zal er de *limiet* van zijn.

II. AFDEELING.

OVER DEN OMTREK EN DEN INHOUD VAN DEN CIRKEL.

VIII. VOORSTEL.

De omtrek van den cirkel is grooter dan die van eenigen veelhoek in den cirkel, en kleiner dan die van eenigen veelhoek om den cirkel befchreven: en insgelijks is het met den inhoud gelegen.

ARCHIMEDES *de Sphaera et Cylindro* I. 1, 2.

BEWIJS. Fig. 148. Voor den omtrek van den veelhoek *in* blijkt het van zelf, vermits iedere boog FIE grooter is dan de regte lijn FE die denzelven tot choorde dient.

Voor den omtrek van den veelhoek *om*, befluit ARCHIMEDES zijn voorftel hier uit, dat de fom der lijnen IG en GL te famen grooter is dan de boog IEL: en hij leidt zulks hier uit af, dat die lijnen, den cirkelboog bevatten welke de zelfde uiteinden I en L heeft als zij.

Voor den inhoud, blijkt de zaak uit de enkele befchouwing der figuur.

IX.

IX. VOORSTEL. Fig. 143.

De omtrek van den cirkel is de *limiet in grootte* der omtrekken van alle de veelhoeken die in den cirkel, en de *limiet in kleinheid* der omtrekken van alle de veelhoeken die om den cirkel beschreven worden: en de *radius* is de limiet der loodlijnen van alle de veelhoeken in den cirkel.

TACQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE pr. 5.

BEWIJS. Uit XXIV. en XXVII. van het VI. Boek, en de 1. Bepaling van dit Boek.

AANMERKING. Hieruit blijkt in welken zin men te verstaan hebbe, dat de *cirkel een veelhoek is van een oneindig getal zijden:* doch eene dergelijke uitdrukking is niet naauwkeurig.

GEVOLG.

De omtrek van eenigen veelhoek *in*, en die van den gelijkvormigen veelhoek *om* den cirkel, naderen dus elkander, en dien van den cirkel, hoe langer hoe meer: verschillen eindelijk onderling minder, dan eene gegeven grootheid, hoe klein ook deze zij: en hunne *laatste rede* is die van gelijkheid (Voorst. III.).

X. VOORSTEL.

De omtrekken van twee ongelijke cirkels staan tot elkander als hunne middellijnen, en dus als hunne stralen.

TACQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE pr. 7. — St. VI. 22. — L. G. IV. 116

BEWIJS. Uit het IX. Voorstel van het VI. en het IV. en VII. van dit Boek.

1. AANMERKING. Dit Bewijs is uit de leer der *limieten* getrokken: men kan het zelfde Voorstel aldus in den trant der Ouden bewijzen: en wel uit het ongerijmde.

Men stelle twee cirkels wier omtrekken door O, en *o* wier diameters, of middellijnen, door D, en *d* uitgedrukt worden. Ik zeg dat $D : d = O : o$ zoo neen: zij $D : d = O : C$ zoo dat $C < o$: en dus $C = o - g$.

Men beschrijve in den cirkel wiens omtrek is *o* eenen veelhoek wiens omtrek *p* grooter zij dan C, doch kleiner dan *o*; en in den cirkel wiens omtrek is O, eenen gelijkvormigen veelhoek wiens omtrek is P; dan is (VI. 9.) $D : d = P : p$, maar bij *assumtie* $D : d = O : C$: dus $P : p = O : C$: maar $p > C$ door bereiding, der-

derhalve (III. 4) P > O dat onmogelijk is; want de omtrek des veelhoeks *in*, is kleiner dan die van den cirkel: dus is niet C < *o*.

Zij 2°. D : *d* = O : C zoo dat C > *o*. Men beschrijve dan om den veelhoek wiens omtrek is *o* eenen veelhoek wiens omtrek *p* < C hoewel > *o*: en om den anderen cirkel eenen gelijkvormigen veelhoek wiens omtrek is P: dan is P : *p* = D : *d*: maar D : *d* = O : C dus P : *p* = O : C: maar *p* < C door de *assumtie*, dus P < O (III. 4) dat onmogelijk is, om dat de omtrek des veelhoeks *om*, altijd grooter is dan die des cirkels; dus is C niet > *o*.

Daar dan C noch > *o* noch < *o*, is C = *o*: en D : *d* = O : *o*.

I. GEVOLG.

Alle cirkels zijn gelijkvormige figuren.

II. AANMERKING. Wij hebben in de 1. Bep. van het IV. Boek gezegd wat wij door gelijkvormige figuren verstaan: doch die bepaling is niet op den cirkel toepasselijk, ten minsten niet regtstreeks: wij oordeelen dat men een kenmerk van die gelijkvormigheid in de bestendige rede van den straal tot den omtrek stellen kan: daar die bestendige rede een onmiddelijk gevolg is van de gelijkvormigheid der veelhoeken.

III. AANMERKING. EUCLIDES heeft de gelijkvormigheid der cirkels stilzwijgend vooronderstelt.

II. GEVOLG.

Gelijkvormige bogen van twee ongelijke cirkels zullen die zijn, welke de zelfde rede tot hunne omtrekken, en dus tot hunne halve middellijnen, hebben.

I. G. IV. II. Con.

III. GEVOLG.

En insgelijks zullen gelijkvormige cirkelstukken die zijn, welke uit bogen bestaan die onderling zijn als de omtrekken of middellijnen der geheele cirkels, en wier choorden dus ook de zelfde rede hebben.

XI. VOORSTEL.

Er kan eene regte lijn zijn die gelijk is aan den omtrek van eenen gegeven cirkel.

BEWIJS. De omtrek van den cirkel, is grooter dan die van den zeshoek *in*: en dus (VI. 8. Gev. 2.) grooter dan zesmaal den *radius*, of driemaal de diameter

Indièn men dan in den gegeven cirkel eenen zeshoek beschrijft, en eenen anderen zeshoek om den zelven, en twee regte lijnen trekt, waarvan de eene gelijk is aan den omtrek van den zeshoek *in*, de andere aan dien van den zeshoek *om*: zal de eerstgemelde korter, de andere langer zijn dan de omtrek des cirkels. Er is derhalve tusschen de zelve eenige lijn welke aan den omtrek gelijk is.

AANMERKING. Wij zullen hier onder (Voorstel XIX.) die lijn nader bepalen.

XII. VOORSTEL. Fig. 151.

Een gelijkbeenige driehoek [F I E] in een cirkelstuk [F I E] beschreven dat kleiner is dan de halve cirkel, is grooter dan de helft van het zelve segment.

BEWIJS. Men trekke uit den top I van den driehoek de raaklijn W I M, en rigte op E F de ⊥⊥ F W, E M. Dan is △ F I E ∞ ½ ▭ F W M E: maar ▭ F W M E > segment F I E; derhalven △ F I E > ½ segment F I E.

AANMERKING. Waarom hier van een' gelijkbeenigen driehoek gesproken wordt blijkt uit VI. Bep. 1. Aanm.

XIII. VOORSTEL.

De inhoud van den cirkel is de *limiet in grootte* der inhouden van alle de veelhoeken *in*, en de *limiet in kleinheid* van alle de veelhoeken *om* denzelven beschreven.

BEWIJS. Het blijkt genoegsaam uit de beschouwing van de Figuur 143.

GEVOLG.

De gelijkvormige veelhoeken, in en om den cirkel beschreven, komen elkander hoe langer hoe nader bij, en hunne laatste rede is de rede van gelijkheid.

BEWIJS. Zie ook het IX. Voorstel, Gev. van dit Boek.

XIV. VOORSTEL.

De inhoud van den cirkel is gelijk aan dien van eenen drie-

driehoek, waarvan de grondlijn de omtrek is des cirkels en de loodlijn deszelfs *radius*

ARCHIMEDES *Circuli dimensio* pr. 1. — St. VI. 28. — TACQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE pr. 4, 5. — L. C. IV. 12.

I. BEWIJS *uit de leer der limieten.* Men stelle eenen dergelijken driehoek: dan is dezelve de limiet van de veelhoeken, zoo wel in als om den cirkel beschreven (II. 39 en uit dit Boek Voorstel VIII. en IX.): doch de cirkel is ook de limiet dier veelhoeken (door het XIII. Voorstel) waaruit het besluit volgt door het IV. Voorstel.

I. AANMERKING. ARCHIMEDES heeft dit Voorstel uitmuntend bewezen (*de Circuli dimensione* pr. 1.): en MACLAURIN heeft het zelve zeer wel uitgelegd, *Traité des Fluxions.* p. IX. Het zal niet ongepast zijn, het bewijs van ARCHIMEDES hier bij te voegen.

II. BEWIJS *in den trant van* ARCHIMEDES Fig. 150. Zij TV gelijk aan den omtrek, en TS gelijk aan den *radius* van den gegeven cirkel: dan is de △ TSV ∞ inhoud ⊙. Zoo neen, is de cirkel grooter, of kleiner, dan de driehoek.

Zij 1°. de cirkel grooter dan de driehoek. Men beschrijve in denzelven eenen regelmatigen veelhoek die, hoewel kleiner dan de cirkel, echter grooter is dan de bewuste driehoek TVS.

De omtrek van den veelhoek is kleiner dan die van den cirkel, en dus dan TV; zij dezelve T*t*: de loodlijn van den veelhoek is kleiner dan de *radius* en dus dan TS; zij de zelve T*e*: die veelhoek zal gelijk zijn aan △ T*te*: en dus kleiner dan △ TSV, daar men echter denzelven grooter dan die driehoek gesteld heeft: het geen tegenstrijdig, en dus onmogelijk, is.

2°. Zij de cirkel kleiner dan de △ TSV. Men beschrijve om den cirkel eenen veelhoek, die wel grooter dan de cirkel, echter kleiner zij dan △ TSV. Dan is de omtrek van den veelhoek grooter dan die van den cirkel, en dus dan de lijn TV; zij dezelve gelijk aan T*r*: de loodlijn van den omschreven veelhoek is gelijk aan den *radius* en dus aan TS: men trekke S*r*: dan is de inhoud van den veelhoek gelijk aan △ TS*r* en > △ TSV: daar men echter denzelven kleiner gesteld had, dat wederom tegenstrijdig is. De inhoud des cirkels is dus noch grooter noch kleiner dan die des △ TSV; dezelve is derhalve daaraan gelijk.

I. GEVOLG.

Indien men den inhoud van den cirkel door getallen wil uitdrukken, en men let op het geen wij in het IV. Boek, IX. Voorstel, 6 Gevolg, gezegd hebben, volgt het, indien men in het algemeen π (*) stelt voor den omtrek als de

(*) Ik heb de grieksche letter π gebruikt in plaats van de letter O, om

de middellijn voor de eenheid wordt aangenomen, of voor den halven omtrek als de *radius* = 1 gesteld wordt: verder *r* voor den *radius* en *d* voor de diameter, of middellijn, eens bepaalden cirkels; zal de inhoud van dien bepaalden cirkel uitgedrukt worden door $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$.

St. VI. 23. Gev. 2.

II. GEVOLG.

De inhoud van den cirkel staat tot dien van het vierkant in den cirkel beschreven, als de halve omtrek tot de middellijn (VI. 19. het 1 Gevolg): en tot dien van het vierkant om den cirkel beschreven, of tot het vierkant op de middellijn, als het vierde deel van den omtrek tot de middellijn (VI. 19. Gevolg 2)

TACQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE pr. 5. Cor. 2.

III. GEVOLG.

Indien een cirkel en een regelmatige veelhoek gelijke omtrekken bezitten, zal de inhoud des cirkels grooter zijn dan die des veelhoeks: door dit Voorstel, Voorstel IX. en door IV. 31.

L. G. IV. *Appendix prop.* 10.

XV. VOORSTEL.

De inhoud van eenen *Sector* is gelijk aan een' driehoek waarvan de grondlijn gelijk is aan den boog van den *Sector*, en de hoogte aan den *radius*.

St. VI. 24. Gev. — L. G. IV. Cor. 1.

BEWIJS. Uit de beschouwing dat de omtrek van den boog de limiet is van de som der grondlijnen van de gelijkbeenige driehoeken in den *Sector* beschreven, en de *radius* de limiet van de loodlijn in iederen driehoek.

I. AANMERKING. Dus, zoo B de boog van den *Sector* is, wordt de inhoud van den *Sector* uitgedrukt door $\frac{B \times r}{2}$.

GE-

om den omtrek aan te duiden als de diameter één is, om dat die letter daartoe door de Wiskundigen algemeen, en bijna uitsluitend, gebruikt wordt.

GEVOLG.

De inhouden van gelijkvormige *sectors* van verschillende cirkels, staan tot elkander als de vierkanten der stralen.

L. G. IV. 11. Cor.

II. AANMERKING. Men kan altijd een vierkant beschrijven wiens inhoud gelijk is aan den inhoud van een' gegeven driehoek: zie het XX. Werkstuk van het II. Boek. Men zoude dus een vierkant kunnen maken dat gelijk zoude zijn aan den inhoud van den cirkel, indien men eene regte lijn trekken kon die gelijk is aan den omtrek. Indien men dit doen kon, zoude het gewigtig vraagstuk van de *Quadratuur*, of inhoudsvinding, des cirkels, *geometrisch* opgelost zijn. Doch tot nu toe heeft men geen middel gevonden om zulks *geometrisch* te verrigten: ik zie echter geen onmogelijkheid dat men dit niet in het vervolg zoude kunnen volbrengen, en zulks te meer, daar men reeds, zoo als wij in het XVII. Voorstel bewijzen zullen, den inhoud van verscheiden figuren uit cirkelbogen bestaande gevonden heeft. Ik ben derhalven, met HENNERT en anderen, van gevoelen, dat de *Quadratuur* van den cirkel, hoe wel nog niet gevonden, niet onmogelijk is in eenen geometrischen zin.

Ik zeg in eenen *geometrischen zin*: geheel anders is het indien men het vraagstuk in eenen *arithmetrischen* zin opvat; dat is indien men van getallen spreekt die den inhoud, of den omtrek van den cirkel met betrekking tot het vierkant van de middellijn, of tot de middellijn, juist uitdrukken. Ik twijfel of deze wel immer *meetbaar* kunnen zijn; zie de Aanmerking op het XVIII. Voorstel.

XVI. VOORSTEL.

De inhouden van ongelijke cirkels hebben tot elkander de zelfde rede als de vierkanten hunner middellijnen.

EUCL. XII. 2 en TACQUET op die plaats: Cor. 2. — St. VI. 27. L. G. IV. 11.

BEWIJS. Uit het 1. Gev. van het XIV. Voorstel.

AANMERKING. Het bewijs is op de leer der *limieten* gegrond. Het geen EUCLIDES gegeven heeft, is uit het ongerijmde afgeleid, en loopt op dezen zin Fig. 151.

Zoo niet ⊙ ABCD : ⊙ EFGHE = $\overline{BD}^2 : \overline{FH}^2$; zij ⊙ ABCD : eene ruimte S = $\overline{BD}^2 : \overline{FH}^2$: zoo dat S < ⊙ EFGHE. Men beschrijve een □ FGHE in den ⊙: dit is de helft van het omschreven vierkant: en derhalve is □ FEGH > ½ ⊙ FEHG.

en

en de overmaat des cirkels boven het vierkant is de som der segmenten FIE, ENH enz. Indien men nu in de segmenten de gelijkbeenige △△ FIE, ENH, HLG enz. stelt, dat is, een veelhoek van een dubbeld getal zijden beschrijft; is ieder dier driehoeken FIE, ENH enz. grooter dan de helft van het segment waarin hij staat (Voorstel XII.): en indien men voor de segmenten op FI, IE enz. op de zelfde wijze voortgaat, zal er eindelijk (Voorst. I.) eene ruimte over blijven kleiner dan eene gegeven grootheid, en derhalve dan het verschil van den cirkel ⊙ EFGH met de ruimte S. Zij FIENH enz. de veelhoek bij welken zulks plaats heeft; en men beschrijve in den cirkel ABCD eenen gelijkvormigen veelhoek: dan is veelh. ABCDA: veelh. IFKGLHNE = $\overline{BD}^2$; $\overline{FH}^2$ = ⊙ ABCD: S. Maar veelh. IFKGLHNE > S, door de bereiding: dus veelh. ABCDA > ⊙ ABCD: dat onmogelijk is. Dus is het valsch dat S < ⊙ EFGHE. 2°. Zij dan S > ⊙ EFGH, en zij S: ⊙ ABCD = $\overline{FH}^2$: $\overline{BD}^2$. Dan is S: ⊙ ABCD = ⊙ EFGHE: eene ruimte < ⊙ ABCD: en derhalve $\overline{FH}^2$: $\overline{BD}^2$ = ⊙ EFGHE: ruimte < ⊙ ABCD, dat tegen het eerste strijdt.

Derhalve is niet $\overline{BD}^2$: $\overline{FH}^2$ = ⊙ ABCD: ruimte of > of < ⊙ EFGHE: derhalve is $\overline{BD}^2$: $\overline{FH}^2$ = ⊙ ABCD, ⊙ EFGHE.

I. GEVOLG.

Men kent dan de onderlinge rede van twee cirkels wier middellijnen bekend zijn: en men kan dus cirkels maken die eene bepaalde rede tot elkander hebben, het geen in de Aanmerking op het 6 Werkstuk des IV. Boeks wordt uitgelegd.

Zie TACQUET op EUCL. XII. 2. het 4. Gev.

II. GEVOLG.

Indien men cirkels beschrijft op de schuinsche en op de beide regthoekzijden van een' regthoekigen driehoek, is de som der beide cirkels op de regthoekszijden gelijk aan den cirkel op de schuinsche zijde (IV. 26.) en men kan dus eenen cirkel maken die gelijk zal zijn aan een gegeven getal cirkels, volgens de 2. Aanmerking op het VIII. Werkstuk van het IV. Boek.

St. VI. pr. 30.

XVII. VOORSTEL. Fig. 152.

Indien men op de schuinsche en op de beide regthoekszij-

den eens regthoekigen driehoeks halve cirkels trekt, naar den zelfden kant, die dus den halven cirkel op de schuinsche zijde snijden, zullen de beide *maantjes*, F en G, te samen gelijken inhoud hebben als die gegeven driehoek.

BEWIJS. Uit het II. Gevolg.

TACQUET Cor. 10. op EUCLIDES XII. 2.

I. AANMERKING. De beide *maantjes* zijn gelijk indien de driehoek ADB gelijkbeenig is: anderszins staan zij tot elkander als de driehoeken ADC en DCB.

II. AANMERKING. Zie daar een voorbeeld van eene ruimte binnen cirkelbogen bevat, wier inhoud volmaakt bekend is. Deze *maantjes* worden genoemd naar derzelver uitvinder, HIPPOCRATES van CHIOS, die 420 jaren voor onze tijdrekening leefde. Er zijn eene menigte van dergelijke *Manen* wier inhoud men volmaakt kan vinden.

III. AANMERKING. Er zijn ook andere figuren, gelijk die welke ARCHIMEDES *Arbelon* noemt, die hier eene bijzondere melding verdienen. Zij Fig. 153. op AD de halve cirkel ABD beschreven: zij deszelfs middellijn AD in twee deelen naar willekeur gesneden in E, en dat op AE, en ED, de halve cirkels AFE en EGD getrokken worden. Dan wordt de figuur AFEGDBA door ARCHIMEDES *Arbelon* genoemd: deszelfs inhoud nu is gelijk aan dien van den cirkel op BE.

Immers daar BE middel-evenredig tusschen AE en ED (V. 13) is □ op BE ∞ Rh. uit AE.ED: en derhalve ∴ □ op BE + Rh. uit AE.ED + □ op AE + □ op ED ∞ 2 Rh. op AE.ED + □ + AE + □ ED ∞ (II. 4.) □ op AD; d. i. 2 □ op BE + □ op AE + □ op ED ∞ □ op AD: derhalve 2 ⊙ op BE + ⊙ op AE + ⊙ op ED ∞ ⊙ op AD en ⊙ op BE + ½ ⊙ op AE + ½ ⊙ op ED ∞ ½ ⊙ op AD en dus ⊙ op BE ∞ ½ ⊙ op AD − ½ ⊙ op AE − ½ ⊙ op ED ∞ *Arbelon* AFEGDBA. Zie ARCHIMEDES *Lemma* IV. en over eene andere soortgelijke figuur genoemd *Salinon*, *Lemma* XIV: mitsgaders over den *Arbelon*, PAPPUS *Coll. Mathem.* IV. pr. 16, 17, 18.

Indien men Fig. 153*a*. den omtrek eens cirkels in 6 deelen AB, BD, DF, FE, EG, GA verdeelt: de choorden AB, BD (die zijden zijn van een ingeschreven zeshoek, en uit G en F de bogen A*o*C en D*p*C die elkander in C ontmoeten, trekt, en eindelijk AC en

CD;

CD: zal de figuur AmBnDpCoA, ook *Arbelon* genoemd kunnen worden: zij wordt gevormd door cirkelbogen, die ieder het zesde gedeelte zijn van den omtrek: en uit het beschouwen der figuur blijkt duidelijk dat hare inhoud gelijk is aan dien van de ruit ABDCA. Zie over *Manen*, en figuren van dezen aard KRAFFT *Geometria Sublimior* § 165. en vele volgende.

III. AFDEELING.

OVER DE REDE VAN DEN OMTREK DES CIRKELS TOT DE MIDDELLIJN.

XVIII. VOORSTEL.

De rede van den omtrek des cirkels tot deszelfs middellijn kan, in getallen, uit de beschouwing der veelhoeken niet dan *ten naasten bij* bepaald worden: die rede, aldus bepaald, is onmeetbaar; en de rede van den inhoud des cirkels tot het vierkant der middellijn is het, in den zelfden zin, insgelijks.

BEWIJS. De omtrek des cirkels is de limiet van de omtrekken der veelhoeken *in* en *om* den cirkel beschreven: en dus, hoe vele zijden men ook in een' veelhoek veronderstelle, is de omtrek des cirkels altijd grooter dan die des veelhoeks indien de veelhoek *in* den cirkel, en altijd kleiner indien de veelhoek *om* den cirkel beschreven is: zoo dat, daar de omtrek des cirkels tusschen in valt, men niet weten kan hoe veel de cirkel grooter is dan de eerstgemelde veelhoek, en hoe veel kleiner dan de laatstgemelde.

Men kan dus alleen, in plaats van den omtrek des cirkels, den omtrek van eenen veelhoek nemen, welke minder van dien des cirkels afwijkt naar mate de veelhoek meer zijden heeft.

Verder, de rede zelve van den omtrek des veelhoeks tot de middellijn is altijd onmeetbaar, (uitgenomen voor den zeshoek) en men kent alleenlijk, zoo nabij men begeert, de palen tusschen welke die rede valt: dus, welken veelhoek men ook neme om deszelfs omtrek voor dien des cirkels te gebruiken, is deze altijd onmeetbaar met betrekking tot de middellijn.

En dat de inhoud des cirkels gelijk is aan eenen driehoek waarvan de hoogte de *radius*, en dus meetbaar, is: de grond-

grondlijn de omtrek, en dus op de gezegde wijze ten opzigte van den *radius* onmeetbaar, zal ook de inhoud van dien driehoek, en dus die van den cirkel, onmeetbaar zijn met betrekking tot het vierkant op de middellijn.

AANMERKING. Men vraagt of men nimmer voor den omtrek des cirkels een getal zal kunnen vinden dat meetbaar is met de middellijn? Ik kan niet ontveinzen zeer genegen te zijn om te denken dat zulks niet mogelijk is. En derhalve de oplossing van de *Quadratuur* des cirkels in eenen arithmetischen zin voor onmogelijk te houden.

XIX. VOORSTEL.

De rede van den omtrek eens cirkels tot zijne middellijn is kleiner dan van $3\frac{10}{70}$ tot 1, en grooter dan $3\frac{10}{71}$ tot 1: of, wat op het zelfde uitkomt, kleiner dan 22:7 en grooter dan 223:71 volgens ARCHIMEDES.

Die rede is naauwkeuriger als 3,14159265 36:1 volgens LUDOLF VAN CEULEN: en de rede van 355:113, onder den naam van METIUS opgegeven, is bijna even naauwkeurig.

L. G. IV. 12. *Schol.*

I. AANMERKING. *Handelwijze van* ARCHIMEDES Die Wiskunstenaar berekende den omtrek van eenen zes-en-negentig-hoek om den cirkel, en dien van eenen zes en negentig-hoek binnen den cirkel beschreven: de omtrek des cirkels is kleiner dan de eerstgemelde, en grooter dan de laatstgemelde.

BEREIDING. Voor den 96- hoek om den cirkel beschreven. Fig. 163.

Zij BI de zijde van eenen twaalfhoek in den cirkel beschreven: en zij LBD loodregt op de middellijn in B, en dus eene raaklijn: men trekke CIL. Laat HC den hoek ICB in tweeën gelijk deelen: insgelijks GC den hoek HCB: FC den hoek GCB: EC den hoek FCB: dan is ∠ ECB de middelpuntshoek van eenen 192-hoek: en dus, indien ∠ BCD = ∠ ECB, is ∠ ECD de middelpuntshoek van eenen 96-hoek: en dus is BD de zijde van een 96-hoek om den cirkel beschreven. Daar wij nu de grootte van de zijden dier veelhoeken moeten bepalen, en dus dezelve door getallen uitdrukken, zullen wij het geen wij in het 2. Gevolg op het IX. Voorstel van het IV. Boek,

en

en in het 1. Gev. van het XXIV. Voorstel van het zelfde Boek gezegd hebben in acht nemen: en, in plaats van de vierkanten op lijnen, de tweede magten der getallen welke die lijnen uitdrukken gebruiken, en, in plaats van de zijden waarop een gegeven vierkant gesteld zoude kunnen worden, de vierkants wortel van het getal dat den inhoud van dit vierkant uitdrukt. ARCHIMEDES is ook op die wijze te werk gegaan.

BEWIJS. Uit VI. 27. N°. 2. is

1°. $BL : BH = CL + CB : CB$
2°. $BH : BG = CH + CB : CB$
3°. $BG : BF = CG + CB : CB$
4°. $BF : BE = CF + CB : CB$

of, bij verplaatsing:

1°. $CL + CB : BL = CB : BH$
2°. $CH + CB : BH = CB : BG$
3°. $CG + CB : BG = CB : BF$
4°. $CF + CB : BF = CB : BE$.

Maar, $IM = \frac{1}{2} IK$ (V. 9.)
en $IK = CI$ (VI. 8. het 2. Gev.)
dus $IM = \frac{1}{2} CI$: en daar
$BL : CL = IM : CI$ (IV. 2)
is $BL = \frac{1}{2} CL$. (III. 4.).

Waaruit volgt, dat zoo BL bekend is, CL het ook is: en uit II. 16. ook CB, en omgekeerd: men kan dus in N°. 1. BH vinden, dus ook CH (II. 16): en dan in N°. 2. BG, in N°. 3. BF, in N°. 4. BE.

1°. ARCHIMEDES stelde $BL = 153$: dus $CL = 306$: dus $\overline{CB}^2 = \overline{306}^2 - \overline{153}^2 = 70227$: dus $\overline{CB}^2 > 70225$: en $CB > \sqrt{70225}$ of > 265:

Hieruit volgt in N°. 1.

$CL + CB : BL > 571 : 153$: en dus ook
$CB : HB > 571 : 153$ of $> 8 \times 571 : 8 \times 153$
of $> 4568 : 1224$.

Zoo dan $HB = 1224$ is $CB > 4568$.

2°. Dus $\overline{CH}^2 > \overline{1224}^2 + \overline{4568}^2$ of > 22364800
dus > 22363441 of $> \overline{4729}^2$: dus
$CH > 4729$: en dus in N°. 2.
$CB : BG > 9297 : 1224$: en dus, indien $BG = 1224$ is $CB > 9297$.

3°.

3°. Dus is $\overline{GC}^2 > \overline{9297}^2 + \overline{1224}^2$ of
> 87932385 dus > 87928129 of $> \overline{9377}^2$
dus is, N°. 3, $GC > 9377$: en
$CB : BF > 18674 : 1224$ of
$> \frac{18674}{2} : \frac{1224}{2}$ of $> 9337 : 612$

en dus indien $BF = 612$: is $CB > 9337$.

4°. Dus is $\overline{CF}^2 > \overline{612}^2 + \overline{9337}^2$ of
> 87554113: dus > 87553449 of $> \overline{9357}^2$:
dus $CF > 9357$: en dus in N°. 4.
$CB : BE > 9347 : 306$.
dus $2\,CB : 2\,EB$ of $ED > 9347 : 306$
en dus, zoo $ED = 306$, is $2\,CB$, of de middellijn, > 9347.

Maar $96 \times ED = 29376 =$ omtrek van den veelhoek.

Dus omtrek van den veelhoek: middellijn < 29367: 9347 of $< \frac{29376}{9347} : 1$ of $< 3\frac{1335}{9347} : 1$.

Maar $\frac{1335}{9347} < \frac{1}{7}$: en omtrek van den cirkel kleiner dan die van den veelhoek: dus

Omtrek van den cirkel tot de middellijn $< 3\frac{1}{7} : 1$ of $22 : 7$.

BEREIDING voor den 96-hoek in den cirkel beschreven. Fig. 164.

Zij BL de zijde van eenen zeshoek in den cirkel beschreven: laat AH den boog BL in twee gelijke deelen deelen: insgelijks AG den boog BH, AF den boog BG, AE den boog BF; dus is BE de choorde van een 96-hoek.

BEWIJS. Uit IV. 12. is
$AL : AB = KL : BK$: dus (III. 8. N°. 1.)
$AL + AB : AB = KL + BK$ of $BL : BK$;
of
$AL + AB : BL = AB : BK$:
Maar $\triangle BHK \sim \triangle AHB$: dus
$AB : BK = AH : BH$: en

1°.

1°. $AL + AB : BL = AH : BH$.
op de zelfde wijze is
2°. $AH + AB : BH = AG : BG$
3°. $AG + AB : GB = AF : FB$:
4°. $AF + AB : FB = AE : EB$.

Zoodra nu LB gegeven is, is $AB = 2\,LB$ bekend, en omgekeerd: AL wordt daaruit gevonden (II. 16. het 1. Gev.) en dus verkrijgt men eindelijk de waardij van EB.

Stel dan 1°. $LB = 780$: dus $AB = 1560$: $\overline{LA}^2 = \overline{1560}^2 - \overline{780}^2 = 1825200 \prec 1825201$ of $\prec \overline{1351}^2$; dus $LA \prec 1351$.
dus in N° 1. $AH : BH \prec 2911 : 780$ of $\prec 291100 : 78000$.

Indien dan $BH = 78000$ is $AH \prec 291100$; dus $\overline{AB}^2 \prec \overline{291100}^2 + \overline{78000}^2$ of $\prec 90823210000$ of $\prec 90826890625$ of $\prec \overline{301375}^2$
dus $AB \prec 301375$.

2°. Dus is in N°. 2. $AG : BG \prec 592475 : 78000$, of multipliceerende beide de getallen door 11 en ze divideerende door 325 is $AG : BG \prec 20053 : 2640$.

Zoo dan $BG = 2640$ is $AG < 20053$: dus $\overline{AB}^2 < \overline{2640}^2 + \overline{20053}^2 < 409092409 < 409131529$ of $< \overline{20227}^2$:
dus $AB < 20227$:

Dus is in N°. 3. $AF : BF < 40280 : 2640$ of multipliceerende door 3, en divideerende door 20; $AF : BF < 6042 : 396$.

3°. Zoo dan $BF = 396$: is $AF < 6042$ dus $\overline{AB}^2 < \overline{396}^2 + \overline{6042}^2 < 36662580 < 36663025$ of $< \overline{6055}^2$.

Gevolgelijk is $AB < 6055$: en in N°. 4. is $AE : BE < 12097 : 396$ of $< 24194 : 792$.

4°. Indien dan $BE = 792$ is $AE < 24194$: dus $\overline{AB}^2 < \overline{792}^2 + \overline{24194}^2$ of < 585976900 of < 585978849 of $< \overline{24207}^2$.

Gevolgelijk $AB < 24207$.

Men heeft dan

$BE : AB > 792 : 24207$: of, divideerende door 3,
$BE : AB > 264 : 8069$.
en $96 \times BE$ of de omtrek van den veelhoek: $AB > 96 \times 264$ of $25344 : 8069$ of $> \frac{25344}{8069} : 1$ of $> 3 \frac{1137}{8069} : 1$. Maar $\frac{1137}{8069}$ is $> \frac{10}{71}$, en de omtrek van den cirkel is nog grooter dan die van den veelhoek: dus is omtrek van den cirkel tot de middellijn $> 3 \frac{10}{71} : 1$ of $> 223 : 71$.

II. AANMERKING. De rede van $22 : 7$, hoe wel iets te groot, is echter in de praktijk voor de meeste gevallen voldoende.

III. AANMERKING. ARCHIMEDES is eenigzins anders te werk gegaan dan de nieuwe Wiskunstenaars die hem gevolgd zijn: hij heeft niet de zijden van den 12-hoek, van den 24-hoek, van den 48-hoek, van den 96-hoek, berekend voor eene gegeven middellijn: maar hij heeft enkel gezocht naar de rede welke de zijde van ieder dier veelhoeken tot de middellijn hebben moet: en daar die rede onmeetbaar is, heeft hij voor den veelhoek om den cirkel, die grooter is dan de cirkel; altijd eene rede genomen die iets grooter is, en voor den veelhoek in den cirkel, die kleiner is dan de cirkel, eene rede die iets kleiner is dan de ware rede van de zijde van den veelhoek om of in den cirkel, tot de middellijn. Zijne berekening steunt gevolgelijk niet op getallen die slechts ten naasten bij naauwkeurig zijn, maar op ware getallen. Zie hier over MONTUCLA *Histoire de la Quadrature du cercle*, p. 31—36. LAGNY, *Mem. de l'Academie* 1723. p. 55.

IV. AANMERKING. LUDOLF VAN CEULEN heeft eenen anderen weg ingeslagen: hij berekende met behulp van het 5. Gevolg van ons XXIV., en van het XXV. Voorstel van ons VI. Boek, de zijden van vele veelhoeken in en om den cirkel beschreven: Hij trok ten dien einde de wortels uit onmeetbare getallen met veel naauwkeurigheid, en tot een groot getal van decimalen. Hij vindt dus in zijn Boek *over den cirkel*, alwaar men het geheel beloop van zijne berekening zien kan, dat, indien men de middellijn gelijk aan 1 stelt, en eenen veelhoek van 32212254720 zijden gebruikt, de omtrek des cirkels grooter is dan

3,14159265358979323846

en kleiner dan

3,14159265358979323847.

Na-

Naderhand nog naauwkeuriger te werk gaande, vindt hij in zijne *Fundamenta Arithmetices et Geometriae*, dat, indien men de middellijn des cirkels 1 ſtelt, de omtrek des cirkels grooter is dan

3.141,592,653,589,793,238,462,643,383,279,50

en kleiner dan

3.141,592,653,589,793,238,462,643,383,279,51

V. AANMERKING. De rede van ARCHIMEDES 22 : 7 tot eene decimale breuk gebragt, geeft 3.142857: dus is zij te groot: en wel bijna $\frac{1264}{1,000,000}$ of bijna $\frac{1}{800}$ gedeelte.

Zie over die handelwijzen L. G. IV. 14.

VI. AANMERKING. De rede van 355 : 113 welke onder den naam van METIUS bekend ſtaat, is zeer naauwkeurig: want, indien men dezelve tot eene decimale breuk brengt, geeft zij, 3,14159292: dat niet eens $\frac{3}{10,000,000}$ deelen te groot is; zij wordt boven dien in geheele getallen uitgedrukt, die des te gemakkelijker in het geheugen geprent worden, dat, indien men de drie eerſte oneven getallen 1, 3, 5, ieder twee malen naast elkander ſtelt, 113355, de drie eerſte cijfers de middellijn, de drie laatſte den omtrek uitdrukken.

Zie hier over MONTUCLA ter aangehaalde plaatſe, en TACQUET *ſelecta ex* ARCHIMEDE, pr. 6. p. 275 et 276. en hier onder in de 4 Aanmerking op het XXVI. Voorſtel eene nog veel naauwkeuriger uitdrukking.

VII. AANMERKING. De gemelde rede van 113 : 355 om de rede van de middellijn des cirkels tot den omtrek uittedrukken, is gevonden door ADRIAAN ANTHONISSE, Burgemeester der ſtad Alkmaar, vader van ADRIAAN ADRIAANSE, bijgenaamd METIUS, Hoogleeraar te Franeker: welke in zijn werk *Geometria Practica*, (*Partis prioris Cap.* 10.) die uitvinding aan zijnen vader toekent, en er bijvoegt „ dat de zelve, in het boekje dat hij tegen de *Qua-* „ *dratuur van* SIMON VAN EIK (*) geſchreven heeft, door bewij- „ zen

(*) METIUS, in het latijn ſchrijvende, noemt hem A QUERCU: misſchien was de naam DU CHESNE: immers LIPENIUS haalt in zijne *Bibliotheca Philoſophica* aan, SIMON DU CHESNE, *de la Quadrature du Cercle*, *Delft* 1584 in 4°. Die zelfde titel ſtaat onder N°. 626. in 4°. op den Catalogus der Bibliotheek van wijlen den Raadpenſionaris BLEYSWYK. Het Boekje van ADRIAAN ANTHONISSE wordt in geen der veelvuldige Catalogusſen genoemd die ik geraadpleegd heb: het geen mij doet twijfelen of het wel gedrukt is geweest.

„ zen heeft aangetoond dat de rede van den omtrek tot de mid„ dellijn kleiner is dan $3\frac{17}{120}$, en grooter dan $3\frac{15}{106}$, tusschen wel„ ke de middel rede is $3\frac{16}{113}$ of $\frac{355}{113}$:" Elders (*Geom. Pract. P. II. Cap.*) zegt METIUS „ dat zijn vader dit gevonden heeft door „ bewijzen in den trant van ARCHIMEDES." Ik heb het werkje van ADRIAAN ANTHONISSE nimmer aangetroffen; ik kan derhalven over de bewijzen daarin vervat niet oordeelen. Maar het valt niet moeijelijk de gemelde rede, (*nu dat men ze kent*) uit die van ARCHIMEDES afteleiden.

Immers daar de rede van 22 : 7 te groot is, zal die van 16 × 22 : 16 × 7, of van 352 : 112 ook te groot zijn : en indien men bij dezelve getallen voegt die in de zelfde rede staan, t. w. $3\frac{1}{7}$ en 1, zal de rede van $355\frac{1}{7}$: 113 te groot zijn : en dus zal die van 355 : 113 nader bij komen.

De rede van $3\frac{10}{71}$ of van 223 : 71 is te klein: dus is die van 16 malen 223 : 16 × 71 of van 3568 : 1136 ook te klein : van beide, getallen aftrekkende die in de zelfde rede staan, te weten $18\frac{60}{71}$ en 6, zal het overige, of de rede van $3549\frac{11}{71}$: 1130 ook te klein zijn : en derhalve er iets bijvoegende, zal 3550 : 1130 of 355 : 113 nader aan de waarheid komen.

Voor het overige, wanneer men de rede, door LUDOLF VAN CEULEN berekend, zelfs maar tot zes decimalen aanneemt, valt het niet moeijelijk de rede van ARCHIMEDES en die, welke den naam van METIUS draagt, daaruit afteleiden: en tevens te doen zien dat de tweede naauwkeuriger is dan de eerste : doch dat beide minder naauwkeurig zijn dan die van LUDOLF.

De rede is 3.141593 of $3\frac{141593}{1,000.000}$: 1, welke wordt $3\frac{1}{7.0624}$: 1 ; en dus kleiner dan $3\frac{1}{7}$ die derhalve te groot is.

De breuk 0.0624 of $\frac{624}{10000}$, wederom herleid zijnde geeft $\frac{1}{16.02}$; en derhalve is de geheele rede van LUDOLF $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16.02}}$, of, ten naasten bij, $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$: het geen geeft $3 + \frac{16}{113}$: of $\frac{355}{113}$.

Men kan over dergelijke herleidingen van breuken, ook op dit onderwerp, nazien de *Algebra* van WALLIS, *Cap.* XI. *Opp. Mathem.* T. 2. p. 49.

VIII. AANMERKING. Wij zullen in het 3. Gevolg op het XXV. Voorstel van het VIII. Boek toonen, hoe veel het berekenen van den omtrek des cirkels door het gebruik van de *Sinus-Tafels* verkort wordt: doch men lette wel, dat, daar het lastige van dit werk alleen hierin bestaat, dat men de zijden van verscheiden veelhoeken, zoo wel in als om den cir-

cirkel beſchreven, berekenen moet, en daar *Sinusſen* en *Tangenten* de halve zijden van dergelijke veelhoeken zijn; men in het berekenen van de *Sinus-Tafels* juist dat lastige werk reeds verrigt heeft: en gevolgelijk dat de verkorting meer ſchijnbaar dan wezenlijk is.

IX. AANMERKING. SNELLIUS, doch vooral na hem HUYGENS, hebben vele verkortingen gebruikt: zij hebben namelijk nieuwe eigenſchappen gevonden van veelhoeken, in of om den cirkel beſchreven, waar door zij in ſtaat gebragt zijn, met behulp van veelhoeken uit een gering getal zijden beſtaande, de zelfde naauwkeurigheid te erlangen, welke LUDOLF, door het gebruik van veelhoeken uit een groot getal zijden beſtaande, verkregen had. Hunne bewerkingen waren op de volgende Voorſtellen gegrond.

XX. VOORSTEL. Fig. 165.

Een cirkelſtuk, kleiner dan de halve cirkel, is grooter dan vier derde gedeelten van den gelijkbeenigen driehoek die op de choorde van dat ſtuk, in hetzelve, beſchreven is.

HUYGENS pr. 3.

BEREIDING. Men beſchrijve op de beenen, FE en ED, de gelijkbeenige driehoeken FIE, ELD: die dus onderling gelijk zijn: vervolgens wederom op FI, IE, EL, LD, de driehoeken F*m*I, I*n*E, E*o*L, L*p*D, alle onderling gelijk: en zoo voorts wederom andere driehoeken op de zijden dier driehoeken.

BEWIJS. Door VI. 29. is

$\triangle FED < 4(\triangle FIE + \triangle ELD)$: of

$\triangle FIE + \triangle ELD > \frac{1}{4} \triangle FED$.

Insgelijks zijn de $\triangle\triangle$ op FI en IE, EL en LD beſchreven te ſamen $> \frac{1}{4}(\triangle FIE + \triangle ELD)$ en dus $> \frac{1}{16} \triangle FED$:

Het zelfde heeft plaats voor alle de driehoeken die men op F*m*, *m*I, I*n*, enz. beſchrijven kan.

Dus is de ſom van alle die driehoeken $> \triangle FED + \frac{1}{4} \triangle FED + \frac{1}{16} \triangle FED + \frac{1}{64} \triangle FED$ enz. of $> \triangle FED\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ enz.)

Dus is de *limiet* van de ſom van alle die driehoeken grooter dan de limiet van $\triangle FED \times (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ enz.) dat is, dan $\frac{4}{3} \triangle FED$ (s. Voorbeeld, I. Aanm. op de I. Bepaling van dit Boek).

Maar het cirkelſtuk FIELD is de *limiet* van de ſom van alle die driehoeken: dus is het cirkelſtuk $> \frac{4}{3} \triangle FED$.

XXI. VOORSTEL. Fig. 165.

Een cirkelstuk [IEL] dat kleiner is dan een halve cirkel, is kleiner dan twee derde gedeelten van den gelijkbeenigen driehoek [IGL], op de choorde van dat cirkelstuk door de raaklijnen aan de uiteinden van den boog gevormd.

HUYGENS pr. 4.

BEREIDING. Men trekke door E de raaklijn XEY.

Men beschrijve op IE, EL, de gelijkbeenige driehoeken I*n*E, E*o*L: en trekke door de kruinen *n* en *o* de raaklijnen *qnr*, *sot*: men beschrijve wederom op I*n*, *n*E, E*o*, *o*L, dergelijke driehoeken, en altoos zoo voorts.

BEWIJS. $\triangle$ XGY + $\triangle$ X*qr* + $\triangle$ *st* enz. $>$ ½ $\triangle$ IEL + ½ $\triangle$ I*n*E + ½ $\triangle$ E*o*L enz. (VI. 30).

Dus ook $>$ ½ ($\triangle$ IEL + $\triangle$ I*n*E + $\triangle$ E*o*L enz.)
De limiet van de eerste som is dus ook grooter dan de limiet van de helft van de tweede som: dat is: de ruimte tusschen de lijnen IG, GL, en den cirkelboog I*n*E*o*L begrepen, is grooter dan de halve inhoud van het cirkelstuk I*n*E*o*LI: en dus is de gemelde ruimte te samen met het gemelde cirkelstuk, dat is de geheele $\triangle$ IGL $>$ 1 ½ cirkelstuk I*n*E*o*LI.

of

Cirkelstuk I*n*E*o*LI $<$ $\frac{2}{3}$ $\triangle$ IGL.

AANMERKING. Het valt in het oog waarom men hier een cirkelstuk neemt dat kleiner is dan een halve cirkel: want indien I*n*E*o*L een halve cirkel was, zouden de lijnen IG, GL evenwijdig aan elkander zijn, en geen driehoek uitmaken.

XXII. VOORSTEL. Fig. 143.

De inhoud van een' cirkel is grooter dan die van eenen regelmatigen veelhoek van een even getal zijden in denzelven beschreven, te samen met een derde gedeelte van de overmaat van dien veelhoek boven dien van eenen veelhoek in den zelfden cirkel beschreven, doch die maar de helft van het getal zijden van den eerstgemelden beheist.

HUYGENS pr. 8.

BEREIDING. Zij FIELD*d*BTA*t*F de regelmatige veelhoek in den cirkel beschreven, waarvan de zijden 2.*g* in getal zijn, en men noeme deszelfs inhoud kortheidshalve V.

Zij FEDBAF de andere veelhoek, die maar half zoo veel zijden als de eerstgemelde bezit: men noeme deszelfs inhoud kortheidshalve *v*.

De overmaat van den eerstgemelden veelhoek boven den laatstgemelden is dus gelijk aan het getal *g* van driehoeken allen gelijk aan $\triangle$ FIE: dus $V - v = g \times \triangle$ FIE: en $V = v + g \times \triangle$ FIE.

BEWIJS. De inhoud van den cirkel is $=$ y + fegm. FIE + fegm. ELD + fegm Dd B enz. $=$ y + g × fegm. FIE.
Maar fegment FIE > $\frac{4}{3}$ Δ FIE (XX. Voorft.) dus
Inhoud van den cirkel > $y + \frac{4}{3}\ g \times \Delta$ FIE
of > $y + g \times \Delta$ FIE + $\frac{1}{3}\ g \times \Delta$ FIE
of > $V + \frac{1}{3}(V - y)$.

AANMERKING. Men ziet hoe veel naauwkeuriger dit Voorftel de getallen, waar door men den inhoud van den cirkel kan uitdrukken, beperkt: volgens de manier van ARCHIMEDES weet men alleen dat de inhoud van den cirkel grooter is dan die van eenen 96-hoek in denzelven befchreven: doch door dit Voorftel weet men bovendien dat hij grooter is dan die van eenen 96-hoek te famen met $\frac{1}{3}$ van het verfchil tusfchen den 96-hoek en den 48-hoek.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 165.

De inhoud van een' cirkel is kleiner dan twee derde gedeelten eens veelhoeks van een even getal zijden om den cirkel befchreven, te famen met het derde gedeelte van den gelijkvormigen veelhoek in denzelven befchreven.

HUYGENS pr. 6.

BEWIJS. Cirkelftuk InEoLI < $\frac{2}{3}$ Δ IGL: (XXI. Voorftel) gevolgelijk.
Cirkelftuk InEoLI + Δ ICL < $\frac{2}{3}$ Δ IGL + Δ ICL of *Sector* ICLEI < $\frac{2}{3}$ ftuk CIGL + $\frac{1}{3}$ Δ ICL:
en dus:
g × *Sector* ICLEI < $\frac{2}{3}$ × g ftuk CIGL + $\frac{1}{3}\ g$ × Δ ICL:
Inhoud van den cirkel < $\frac{2}{3}$ veelhoek om den cirkel + $\frac{1}{3}$ veelhoek in den cirkel.

I. AANMERKING. Door de manier van ARCHIMEDES weet men flechts dat de cirkel kleiner is dan de 96-hoek om denzelven befchreven: thans weet men dat hij kleiner is dan twee derde gedeelten van dien veelhoek en $\frac{1}{3}$ van den 96 hoek in den cirkel; waar door de afwijking van de waarheid nader beperkt wordt.

II. AANMERKING. Daar men door het XXIV. Voorftel van het VI. Boek, en deszelfs V. en VI. Gevolg zeer gemakkelijk den inhoud eens veelhoeks in den cirkel vinden kan, en dan door het XIV. dien van den veelhoek om den cirkel, ziet men hoe gemakkelijk men door dit Voorftel den inhoud van den cirkel kan bepalen. Door middel van een' twaalf-

 hoek

hoek verkrijgt men reeds eene zeer aanmerkelijke naauwkeurigheid.

GEVOLG.

De inhoud van eenen *Sector* CIELC is ook kleiner dan twee derde gedeelten van het *trapezium* [CIGLC] gevormd door twee stralen en twee raaklijnen op de uiteinden van den boog des Sectors getogen: te famen met een derde gedeelte van den middelpunts driehoek ICL.

HUYGENS pr. 6.

XXIV. VOORSTEL. Fig. 165 en 166.

De omtrek van den cirkel is grooter dan de omtrek eens regelmatigen veelhoeks van een even getal zijden, in denzelven befchreven, te famen met het derde gedeelte van het verfchil tusfchen dien omtrek en den omtrek van den veelhoek die maar de helft van dat getal zijden bezit.

HUYGENS pr. 7.

BEREIDING. Men ftelle dat FD de zijde is van eenen veelhoek: dat FE, ED, de zijden zijn eens veelhoeks van een dubbeld getal zijden: en FI, IE, EL, LD, de zijden van eenen veelhoek die wederom een dubbeld getal zijden heeft:

Zij Fig. 166. gh gelijk aan den omtrek van den veelhoek op FD (*): zij gi gelijk aan den omtrek van den veelhoek op FE: en $ik = \frac{1}{3} hi = \frac{1}{3}(gi - gh)$. Eindelijk zij de loodlijn Nz gelijk aan den *radius* van den cirkel: men trekke Ng, Nh, Ni, Nk en men noeme π den omtrek van den cirkel.

BEWIJS. $\Delta\ gNi =$ veelhoek op FI ⎫ VI. 24. Gev. 6.
$\Delta\ gNh =$ veelhoek op FE ⎭

en dus $\Delta\ iNk = \frac{1}{3}(\Delta\ gNi - \Delta\ gNh) = \frac{1}{3}$ (veelh. op FI — veelh. op FE).

Gevolgelijk inhoud van den cirkel $> \Delta\ gNi + \Delta\ Nik$ (XXII. Voorft.). of

$\pi \times \frac{Nz}{2} > gi \times \frac{Nz}{2} + ki \times \frac{Nz}{2}$ en dus

$\pi > gi + ki$ of $> gi + \frac{1}{3}(gi - gh)$.

I. GEVOLG.

Zij P de omtrek eens veelhoeks, en p die van den voorgaanden, d. i. van dien welke maar het halve getal zijden heeft, zoo is

π

(*) De figuur 166 is uit gebrek van plaats op eene kleiner fchaal dan de figuur 165 geteekend: doch dit doet niets ter zake.

$\pi > P + \frac{P-p}{3}$: of $> \frac{4}{3}P - \frac{p}{3}$: dat is in woorden:

„ De omtrek van den cirkel is grooter dan vier derde ge- „ deelten des omtreks van een' veelhoek in dien cirkel be- „ schreven, die een even getal zijden heeft, min het derde „ gedeelte van den omtrek eens veelhoeks die maar het halve „ getal zijden heeft."

HUYGENS pr. 7. Cor.

I AANMERKING. De zijde van den zeshoek is de *radius*: dus is het derde gedeelte zijns omtreks gelijk aan de middellijn: en dus zijn 16 zijden van den twaalfhoek min de middellijn kleiner dan de omtrek van den cirkel: doch het verschil is zeer gering. De zijde nu van een' twaalfhoek wordt zeer gemakkelijk berekend door VI. 24. het 8. Gev. Men ziet dan dat men hier naauwkeuriger te werk gaat dan door de manier van ARCHIMEDES, door welke men slechts weet dat de omtrek van den cirkel grooter is dan die des veelhoeks in den cirkel beschreven.

II. GEVOLG.

Het blijkt uit het bewijs en uit het XXII. Voorstel, dat het geen voor den geheelen cirkel plaats heeft, ook voor iederen boog plaats heeft: gevolgelijk „ is een boog altijd grooter „ dan de vier derde gedeelten van zijne choorde min het „ derde gedeelte van de helft der choorde van eenen dubbel- „ den boog: of grooter dan de choorde, te samen met een „ derde gedeelte van het verschil tusschen de choorde, en „ de halve choorde van eenen dubbelden boog."

II. AANMERKING. HUYGENS gebruikt het woord *sinus* van den boog in plaats van de *helft der choorde van eenen dubbelden* boog. Wij zullen in het XV. Voorstel van het VIII. Boek zien dat dit op het zelfde uitkomt.

III. GEVOLG. Fig. 166 *a*.

Hieruit volgt eene zeer gemakkelijke manier om eene regte lijn, die ten naasten bij gelijk is aan een' gegeven cirkelboog, geometrisch te vinden; mits die boog kleiner zij dan het vierde gedeelte van den omtrek.

Zij ACB de boog, deel denzelven in twee gelijke deelen in C: trek AC, CB: verder CE loodregt: zij FG = AB: FI = AC + CB; IK = $\frac{1}{3}$ GI: dan zal FK ten naasten bij de gezochte lijn zijn. Want boog CB > CB + $\frac{1}{3}$ (CB—EB) dus boog ACB > AC + CB + $\frac{1}{3}$ (AC + CB—AB), of

 boog

boog ACB > FI + $\frac{1}{3}$ (FI − FG) of > FI + $\frac{1}{3}$ GI of > FI + IK of grooter dan FK.

HUYGENS pr. 12.

III. AANMERKING. Naarmate de gegeven boog kleiner is, komt de lijn FK nader aan denzelven: daarom hebben wij eenen boog vereischt kleiner dan een vierde gedeelte van den omtrek: doch indien de gegeven boog grooter was, zoude men denzelven in 2, 4, 8, of meerdere deelen verdeelen, dat geometrisch geschieden kan: men neme dan FK gelijk aan een der deelen: en dan het dubbeld, of viervoud, of achtvoud van FK.

XXV. VOORSTEL. Fig. 167.

Indien men uit het uiteinde [B] van de middellijn [BG] eene snijlijn [BK] trekt, die den cirkel snijdt, en tot aan de raaklijn [GKE] komt, welke op het ander eind [G] van de middellijn getogen is; zal de boog [CG], tusschen de eerstgemelde lijn BC en de middellijn [BG] begrepen, kleiner zijn dan twee derde gedeelten van het stuk [GK], dat door de gemelde snijlijn [BK] van de raaklijn [GKE] wordt afgesneden, te samen met het derde gedeelte van de loodlijn [CH] uit het einde des boog op des middellijn [BG] nedergelaten.

HUYGENS pr. 8.

BEREIDING. Zij CI eene raaklijn aan C: trek AI en CG.

BEWIJS. Stuk ACIG = 2 △ ACI: = △ waarvan AC de grondlijn en 2 CI de hoogte: of 2 CI de grondlijn en AC of AG de hoogte: maar CI = GI (V. 11. Gev. 4: of 20. Gev. 2.).

Dus, indien men uit I met den radius GI eenen cirkel beschreef, zoude dezelve door C en G gaan, doch ook door K. Immers is hoek BCG = regt (V. 7.) dus ook GCK: en dus moet de halve cirkel door K gaan: dus ook KI = IG = CI en KG = 2 KI.

Gevolgelijk stuk ACIG = △ waarvan AG de grondlijn en GK de hoogte is.

Maar van △ ACG is AG de grondlijn en CH de hoogte: en dus is △ ACG = △ waarvan CH de hoogte en AG de grondlijn is.

Eindelijk Sector CAG = △ waarvan boog CG de grondlijn en AG de hoogte is (XV. Voorstel) of AG de grondlijn en boog CG de hoogte.

Derhalve, Sector CAG : Trap. ACIG : △ ACG = boog CG : GK : CH. (IV. 6.)

Maar *Sector* CAG < $\frac{2}{3}$ stuk ACIG + $\frac{1}{3}$ △ ACG: (XXIII. Voorst. Gev.)

dus boog CG < $\frac{2}{3}$ GK + $\frac{1}{3}$ CH.

XXVI.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 167.

De omtrek van den cirkel is kleiner dan twee derde gedeelten van den omtrek eens regelmatigen veelhoeks in den cirkel beſchreven, te ſamen met een derde gedeelte van den omtrek eens gelijkvormigen veelhoeks, om den cirkel beſchreven.

HUYGENS pr. 9.

BEREIDING. Zij CH de halve zijde des veelhoeks in, en dus ACE trekkende, zij EG de halve zijde des veelhoeks om den cirkel beſchreven.

Men trekke BC tot in K verlengd.

Men ſtelle $LH = HG$: dus $BL = (BG - LG) = 2\,(AG - HG) = 2\,AH$.

BEWIJS.

$EG : CH = AG : AH$ (IV. 2.)

dus $EG + CH : CH = AG + AH : AH$ (III 8.)

Maar $CH : KG = BH : BG$ (IV. 2)

dus $EG + CH : KG = (AG + AH) \times BH : AH \times BG$ (III. 10.)

of $EG + CH : KG = BH \times BH : AH \times BG$.

dus

$EG + CH : 2 \cdot KG = BH \times BH : 2\,AH \times BG$

$= \square$ op BH : *regth.* uit BL, BG.

Maar $\square$ op BH = *regth.* uit BH, BL + *regth.* uit BH, LH: en *regth.* uit BL, BG = *regth.* uit BL, BH + *regth.* uit BL, HG.

Maar regth. uit BH, LH > *regth.* uit BL, HG:

dus: $\square$ op BH > uit BL, BG.

en $EG + CH > 2\,KG$.

en $\frac{EG + CH}{3} > \frac{2\,KG}{3}$.

en $\frac{EG + 2\,CH}{3} > \frac{2\,KG + CH}{3}$.

Maar boog $CG < \frac{2}{3}\,KG + \frac{1}{3}\,CH$ (XXV. Voorſt.)

dus boog $CG < \frac{2}{3}\,CH + \frac{1}{3}\,EG$.

en dus ook de geheele omtrek des cirkels $< \frac{2}{3}$ omtrek des veelhoeks op het dubbeld van $CH + \frac{1}{3}$ omtrek des veelhoeks op het dubbeld van EG

I. AANMERKING. Volgens de manier van ARCHIMEDES vindt men alleen dat de omtrek des cirkels kleiner is dan de omtrek des veelhoeks om den cirkel beſchreven: doch nu vindt men dat de omtrek des cirkels kleiner is dan eene grootheid, welke zelve kleiner is dan de gemelde omtrek des veelhoeks. En dus komt men tot grootere naauwkeurigheid.

GEVOLG.

Dan boog CG < $\frac{2}{3}$ CH + $\frac{1}{3}$ EG: „ is ieder boog, die „ kleiner is dan een vierde van den omtrek, kleiner dan twee „ derde gedeelte van de halve choorde van den dubbelden „ boog, te famen met een derde van de raaklijn EG."

II. AANMERKING. SNELLIUS en HUYGENS gebruikten het woord *finus* in plaats van halve choorde van den dubbelden boog: de rede hier van zullen wij in het XIV. Voorftel van het VIII. Boek uitleggen.

III. AANMERKING. Deze zijn de Voorftellen, eerst door SNELLIUS opgegeven, doch niet ten vollen bewezen; HUYGENS ondernam en volbragt dien taak. Hier door kan men, met veel minder omflag, de zelfde naauwkeurigheid erlangen, die LUDOLF door eenen zeer grooten arbeid verkregen heeft. HUYGENS is naderhand verder gegaan, met twee andere Voorftellen te geven, die het werk nog merkelijk verkorten, doch die niet tot de eenvoudige grondbeginfels der Meetkunde behooren, en welke wij gevolgelijk hier niet kunnen bijvoegen.

IV. AANMERKING. Na de tijden van LUDOLF en SNELLIUS, en eenige jaren na dat HUYGENS zijn werk *de circuli magnitudine*, hadt uitgegeven, heeft men middelen gevonden om de rede van den omtrek tot de middellijn, met meerdere *decimalen*, en dus naauwkeuriger, uitgedrukken, door *reekfen*, waarvan de leden verfchillende magten zijn van *finusfen* of *tangenten* van *bogen*, over welke lijnen wij in het volgende VIII. Boek zullen handelen, en in het Aanhangfel zullen wij eenige van die reekfen opgeven, om den *finus*, *cofinus*, *tangent* uit de waarde van den boog op te maken: en, wederkerig, om de waarde van den boog, en dus ook van den geheelen omtrek, op te maken uit de gegeven grootte van *finus*, *cofinus* of *tangent*.

Wij zullen hier enkel aanmerken dat LAGNY (*Mem. de l'Acad. des Sciences* 1719. p. 144.) de eerste geweest is, welke door *formules* van dien aard de rede van den omtrek tot de middellijn, (die hier gelijk aan de *eenheid* gefteld wordt) door het volgende getal uit, 127 *decimalen* beftaande, heeft uitgedrukt: welk getal naderhand door vele Schrijvers, en ook door EULER (*Introductio in Analyfin Infinitor*. §. 126.) is overgenomen geworden: te weten

3. 141, 592, 653, 589, 793, 238, 462, 643, 383, 279, 502, 884, 197, 169, 399, 375, 105, 820, 974, 944, 592, 307, 816, 406, 286, 208, 998, 628, 034, 825, 342, 117, 067,

067, 982, 148, 086, 513, 272 (*), 306, 647, 093, 844.6.

Indien de laatste cijffer 6 een 7 ware, zou de rede te groot genomen worden: nu is ze wat te klein.

Maar men zal van de overgroote naauwkeurigheid dezer uitdrukking kunnen oordeelen, indien men in acht neemt, dat, zoo men alleen de 21 eerste cijfferletters van deze breuk gebruikt, van welke 21 letters deze (462) de drie laatste zijn, en men voor de laatste in plaats van 2 een 3 stelde, het verschil op eenen cirkel, die zoo groot is als de omtrek des geheelen aardkloots, nog niet het 28,000,000,000 gedeelte van een' zandkorrel zoude bedragen indien men rekent dat twee honderd zandkorreltjes, naast elkander op eene regte lijn gelegen, de lengte van eenen duim uitmaken. Zie KLINKENBERG *Verh. van de Haarlemsche Maatschappij*, III. Deel, p. 156.

V. AANMERKING. Daar men nu de palen, tusschen welke de rede van den omtrek tot de middellijn begrepen is, met eene vrij groote naauwkeurigheid kent, zullen ook alle *reden*, die men opgeeft, en die men niet anders bewijst dan met aantetoonen, dat zij binnen die zelfde palen vallen, ook aangenomen kunnen worden; en op dit grondbeginsel (geheel verschillende van dat waarop de manier rust om eene lijn gelijk aan eenen boog te maken, die wij in het 3 Gevolg van het XXIV. Voorstel hebben opgegeven) rusten vele manieren, die men voorgesteld heeft om eene lijn gelijk aan eenen cirkelboog te trekken, of een vierkant gelijk aan den inhoud van eenen cirkel te maken. Uit alle zullen wij de volgende, die eenen grooten graad van naauwkeurigheid bezitten, opgeven.

I. OPLOSSING. Men deelt eene lijn in uiterste en middelste rede: het kleinste stuk staat tot de geheele lijn, als de middellijn van den cirkel tot vijf zesde gedeelten van den omtrek.

VIETA, *Operum* p. 392.

BEWIJS. Men neemt uit IV. 18. Aanm. 2. de waarde van het kleinste stuk K eener lijn L in uiterste en middelste rede gesneden: te weten $\frac{L(3 - \sqrt{5})}{2}$. Men trekt den wortel uit 5: deze is 2.2366: derhalve $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{0.7634}{2} = 0.3817$: gevolgelijk staat K : L =

(*) Zoo staat in alle de boeken, ook bij LAGNY. Onlangs heeft men aangekondigd dat die 7 in deze stede een 8 moet zijn.

= diameter: $\frac{5}{6}$ omtrek = 0.3817 : 1. waaruit $\frac{5}{6}$ omtrek gevonden wordt 2.6196: daar bij $\frac{1}{2}$: komt 3.1435, dat vrijwel met de rede door LUDOLF opgegeven overeenkomt.

II. OPLOSSING. Voeg bij de helft van den *radius* eene lijn, wier vierkant gelijk is aan de som der vierkanten van den *radius* en van de helft der zijde van den achthoek in den cirkel beschreven. De geheele lijn is het vierde gedeelte van den omtrek des cirkels (*).

CONSTRUCTIE. Fig. 151. Trek door het middelpunt twee *radii* CH, CE, die eenen regten hoek maken. Trek de choorde HE: deel den boog HNE in twee gelijke deelen in N: trek NE, die de zijde is van den achthoek. Neem CT = $\frac{1}{2}$ NE: trek ET verlengd: neem op de verlenging TU = $\frac{1}{2}$ CE: de lijn ETU is gelijk aan het vierde gedeelte des omtreks.

BEWIJS. De halve zijde van den achthoek wordt door berekening gemakkelijk gevonden te zijn 0.3827 als de *radius* = 1 is Het vierkant daar van is 0.14646: daar bij gevoegd 1 het vierkant van den *radius*, komt 1.14664: daar uit getrokken den wortel komt 1.0708: daar bij gevoegd de halve *radius*, komt 1.5708 voor het vierde gedeelte des omtreks als de *radius* 1 is: derhalve 0.7854 als de diameter 1 is: dit viermalen geeft voor den omtrek 3.1416, dat weinig met de rekening van LUDOLF verschilt.

III. OPLOSSING. Zij BCD [Fig. 169.] een halve cirkel, en BC een vierde deel; laat de regte hoek BAC, in drie deelen gesneden worden, waarvan ∠ BAE een is; het geen geometrisch geschied.

Trek DL en BI ⊥ ⊥ op BD: verleng AE tot in I: trek IM loodregt op DL: neem DL = 3 AB: trek IL: deze lijn is zeer ten naasten bij gelijk aan den halven omtrek.

BEWIJS. Trek EF ⊥ op BD: stel den *radius* BA = 1: FE is de halve choorde van een' hoek die = $\frac{2}{3}$ L is: dus (II. 16. het 1. Gev.) FA = $\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} . \sqrt{3}$.

Maar AF : FE = AB : BI: dus

BI = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = DM: dus ML = $3 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ en

IL

(*) Ik heb die oplossing in de nagelatene papieren van HUYGENS gevonden, alwaar zij dus luidt.

Si ad rectam, quae potest duo quadrata simul, quadratum radii et quadratum sinus Arcus 22°. 30'; addatur in rectum semissis radii: composita recta aequalis erit peripheriae quadrantis. HUYGENS hadt bij die woorden met zijne eigen hand geschreven „ *reçeu de M. l'Ambassadeur Chanut.*" Die Heer was gezant van Frankrijk te Stokholm, ten tijde van het overlijden van CARTESIUS aldaar.

$$IL = \sqrt{4 + (3 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})^2} = \sqrt{4 + 9 - 6\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{39}{3} - \frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{120}{9} - \frac{18\sqrt{3}}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$$; het geen ontwikkeld voor IL geeft 3.14153, dat dus zeer wel overeenkomt.

KOCHANSI *Acta Lipsiensia* 1685. p. 399.

IV. OPLOSSING. Fig. 154. Zij AB de halve middellijn van den cirkel. Deel dezelve in acht gelijke deelen; trek CB ⊥ op AB = $\frac{7}{8}$ AB: Trek CA; neem AD = $\frac{4}{8}$ AB = $\frac{1}{2}$ AB: Trek uit D, DE ⊥ op AB, verder CE en uit D, DF // CE.

Ik zeg dat 3 AB + AF de halve omtrek is van den cirkel.

BEWIJS. AC : AD = AB : AE
AC : AD = AE : AF
derhalve AB : AE = AE : AF
en $\overline{AE}^2 = AB \cdot AF$.
maar $\overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 : AB \cdot AF$

derhalve $AF = \frac{AB \cdot \overline{AD}^2}{\overline{AC}^2}$

Maar $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (7^2 + 8^2)\frac{\overline{AB}^2}{8^2}$;

en $\overline{AD}^2 = \frac{4^2}{8^2} \cdot \overline{AB}^2$; derhalve

$$AF = \frac{4^2 \times AB}{7^2 + 8^2} = \frac{16 \cdot AB}{49 + 64} = \frac{16 \cdot AB}{113}$$

gevolgelijk: $3\,AB + AF = 3\,AB + \frac{16 \cdot AB}{113} = \frac{355}{113}$ indien AB = 1 gesteld wordt.

Maar, naar de rede van METIUS, is de omtrek des cirkels = $\frac{355}{113}$, gevolgelijk is 3 AB + AF de halve omtrek des cirkels, indien AB de halve middellijn is. Derhalve moet er bij drie maal de middellijn twee malen AF gevoegd worden om den geheelen omtrek te bekomen.

Deze schoone oplossing, die voor geene der voorgaande behoeft te wijken, is mij vóór jaren door den beroemden Wiskonstenaar DE GELDER mede gedeeld.

VI. AANMERKING In alle deze oplossingen wordt niets gesteld dan dat, wel is waar slechts ten naasten bij, maar echter door regte lijn en cir-

cirkel verrigt kan worden. Doch er is zekere kromme lijn, genoemd *Quadratrix* van DINOSTRATES, waardoor eene regte lijn volkomen gelijk aan eenen cirkel boog, dus ook aan een vierde des geheelen omtreks van den cirkel, en daar door ook eene gelijk aan den geheelen omtrek, kan gevonden worden. Doch die *Quadratrix* behoort tot de zoogenoemden *Mechanische* lijnen (*). Men kan over dezelve nazien PAPPUS *Collect. Mathematicae* IV. 25, 26, 27, 28, en ook bij onze Nederlandsche Schrijvers, het schoone Werk van den Heer FLORYN, *Grondbeginsels der hoogere Meetkunde*, II. Boek, III. Hoofdstuk: en aldaar, voor de toepassing op het vinden eener regte lijn gelijk aan het vierde des omtreks, prop. 4. Gev. 1. Over die lijn, zoo wel in zich zelve, als met betrekking tot de *Quadratuur* des cirkels, is zeer breedvoerig gehandeld door CLAVIUS, in een *appendix*, of *epilogus*, op het VI. Boek van EUCLIDES, en in zijne *Geometria practica*, *Lib.* VII. *Appendix*.

XXVII. VOORSTEL.

De inhoud van den cirkel staat tot het vierkant op de diameter als 11 : 14, indien men de rede, door ARCHIMEDES gegeven, gebruikt.

St. VI. 23. Bijvoegsel.

BEWIJS. Uit het 2. Gevolg van het XIII. Voorstel.

I. AANMERKING. Indien men de rede door LUDOLF gegeven wil gebruiken, staat de inhoud van den cirkel tot het vierkant op de middellijn, als 0,7853981634 : 1 dat is als 10.9955742876 : 14 : het geen maar zeer weinig van 11 : 14 verschilt.

II. AANMERKING. Indien de halve middellijn 1, en dus de geheele middellijn 2 gesteld wordt: zal de inhoud van den cirkel 3,1415926536, en dus bijna 3,14160 bedragen.

III. AANMERKING. Indien men het grondbeginsel gebruikt dat wij

(*) PAPPUS zegt dat DINOSTRATES (die 370 jaren voor onze tijdrekening leefde) en NICOMEDES, welke drie eeuwen later leefde, de *quadratrix* tot de quadratuur van den cirkel gebruikt hebben. Er was ook bij de Ouden (zie PROCLUS *Comment. in* I. *Lib Euclid. prop.* 9. p. 155.) eene *quadratrix* van HIPPIAS (die 70 jaren vóór DINOSTRATES bloeide) bekend. MONTUCLA gist, met rede, dat zij de zelfde kromme lijn zijn, oorspronkelijk tot het verdeelen eens cirkel-boogs in zoo vele deelen men wil uitgedacht, maar waarin DINOSTRATES de eerste is die de toepassing tot de quadratuur des cirkels opgemerkt heeft. (*Hist. des Mathem* I. 181).

wij op de 5. Aanmerking op het XXVI. Voorstel gegeven hebben; verkrijgt men het volgende

XXVIII. VOORSTEL.

Indien eene lijn in uiterste en middelste rede is gesneden, staat de geheele lijn te samen met het kleinste stuk tot de dubbelde lijn, als de wortel uit anderhalf maal het quadraat van den *radius*, tot het vierkant dat gelijk is aan den inhoud van den cirkel.

VIETA p. 393.

BEWIJS. Men stelt de lijn zelve gelijk aan een: men berekent het kleinste stuk: en men vindt dat de gemelde evenredigheid ten naasten bij dat geen oplevert, dat uit de rede van LUDOLF volgt.

AANMERKING. Dit Voorstel geeft de volgende *constructie* van een vierkant wiens inhoud gelijk is aan dien van den cirkel. Fig. 168.

Laten BC, DE twee diameters zijn die zich regthoekig snijden: deel AC in uiterste en middelste rede in H. Trek EC: dus $EC = \sqrt{2}$: maar stel $AF = \frac{1}{2} EC$: dus $AF = \frac{\sqrt{2}}{2}$: Trek BF verlengd: dus $BF = \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$: Trek FH: Maak BH : BC = BF : BI: dat is trek CI // FH: en BI zal de zijde van het gezochte vierkant zijn: en BIKL het vierkant zelf.

ACHT-

ACHTSTE BOEK.

OVER HET METEN VAN HOEKEN DOOR CIRKELBOGEN EN HET BEREKENEN VAN DEZELVE DOOR CHOORDEN, SINUSSEN, TANGENTEN, EN SECANTEN.

I. AFDEELING.

OVER HET METEN VAN HOEKEN DOOR CIRKELBOGEN.

I. VOORSTEL. Fig. 170.

In den zelfden cirkel, of in gelijke cirkels, is er tusschen de hoeken, zoo wel in het middelpunt als in den omtrek, de zelfde rede als tusschen de bogen op welke zij rusten: het zelfde heeft voor de *Sectoren* plaats: en een hoek in het middelpunt staat tot vier regte, als de boog op welken hij rust tot den geheelen omtrek.

EUCL. VI. 33. — L. G. II. 17.

BEREIDING. Men neme de bogen GB, BI, gelijk aan AG; en even veel bogen MN, NO gelijk aan KM: men trekke CB, CI; LN, LO.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit de beschouwing dat boog AI en ∠ ACI gelijkvouden zijn van boog AG en van ∠ ACG: zoo als ook boog KO en ∠ KLO van boog KM en van ∠ KLM: en dan uit III. 3: V. 6. Gev. 1. en V. 5.

VOOR HET II. volgt uit het I.

VOOR HET III. Uit V. 6. Gev. 3.

I. GEVOLG.

Een boog kan dan voor de maat van eenen hoek in het middelpunt gehouden worden, zoo lang men van den zelfden cirkel spreekt: en wij zullen die spreekwijze aannemen.

L. G. II. 17. Cor.

II.

II. GEVOLG.

De maat van eenen hoek in den omtrek is de helft van den boog op welken hij rust: (1. Gev. en V. 5).

L. G. II. 18.

II. VOORSTEL. Fig. 157.

De bogen [DF, AG] van ongelijke cirkels, op welke gelijke hoeken [ACG, DCF], namelijk alle in den omtrek, of alle in het middelpunt, rusten, zijn onderling in de zelfde reden als de omtrekken waarvan zij deelen zijn. En omgekeerd, indien twee bogen van ongelijke cirkels tot elkander ſtaan als de geheele omtrekken, zullen de hoeken in het middelpunt, of de hoeken in den omtrek, die op dezelven rusten, gelijk zijn.

Zie KOENIG Cor. 2. op EUCL. VI. 33.

BEWIJS. VOOR HET I. GEDEELTE. Uit N°. 3 van het I. Voorſtel, en III. Axioma 4.

VOOR HET II, Uit het I, door het ongerijmde

I. GEVOLG.

Dus rusten, in ongelijke cirkels, gelijke hoeken op gelijkvormige bogen. (VII. 10. het 2. Gev.)

II. GEVOLG.

De bogen van twee ongelijke cirkels, op welke gelijke hoeken rusten, zijn als de omtrekken, of als de halve middellijnen dier cirkels, en deze als de choorden dier bogen (VII. 10. en IV. 2.).

St. VI. 22. Gevolg.

III. GEVOLG.

En omgekeerd, zoo bogen van ongelijke cirkels zijn als de geheele omtrekken, of de halve middellijnen, zullen de hoeken die op dezelve rusten gelijk zijn, en hunne choorden zullen zijn als de halve middellijnen.

IV. GEVOLG.

Dus zijn, in alle cirkels, de bogen de eigenaartige maat der hoeken in het middelpunt: en de halve bogen die van de hoeken in den omtrek.

V. GEVOLG.

De zelfde stralen snijden gelijkvormige bogen van de omtrekken van cirkels die op het zelfde middelpunt staan.

Zie KOENIG 3. Cor. op EUCL. VI. 33.

VI. GEVOLG.

Het meten der hoeken in graden steunt op het voorgaand Gevolg, en op VII. 10.

I. AANMERKING. Volgens een oud gebruik, d[illegible] men den omtrek des cirkels in 360 *graden*, en de *graden* wederom, door eene gedurige zestigdeelige verdeling, in *minuten*, *seconden*, *tiercen*, enz. zoo dat een graad 60 *minuten*, eene minuut 60 *seconden*, eene seconde 60 *tiercen* enz. bevat. Waaruit volgt, dat de regte hoek, of het vierde gedeelte des omtreks, 90 graden bevat, en de drie hoeken eens driehoeks te samen 180° uitmaken.

II. AANMERKING. Hierop, en op het vijfde Gevolg, steunen die instrumenten uit de Mathematische kokers, welke *Transporteurs* genoemd worden: en, in het algemeen, alle instrumenten hoegenaamd, welke tot het meten van hoeken dienen.

De *Transporteurs* zijn van tweederlei gedaante: te weten of *cirkelvormige*, of in de gedaante eens regthoeks: in beide is de rand in graden verdeeld (somtijds ook in halve graden): doch op de eerstgemelde zijn alle graden gelijk; op de laatstgemelde zijn zij ongelijk.

Zij Fig. 171. de halve cirkel AFKA de Transporteur: waarvan C het middelpunt, doorgaands op de lijn AK, door een streepje aangeduid. De gelijke bogen AB, BD, DE, enz. duiden gelijke hoeken aan, ACB, BCD, DCE enz. en een dubbelde, een drievoudige boog, dubbelde, drievoudige hoeken.

Maar indien de Transporteur de gedaante heeft eens regthoeks *b*BI*i*; worden de graden op de zijden *b*B, BI, I*i* aangeduid door de stippen, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, alwaar de *radii* CB, CD, CE, CF, CG, enz. uit het middelpunt getrokken naar gelijke bogen AB, BD, DE, EF, FG des halven cirkels, waarin de regthoek *b*BI*i* staat; en die dus op de zijden B*b*, BI, I*i*, niet dan ongelijke deelen B*d*, *de*, *ef*, *fg*, *gh*, *h*I, kunnen afsnijden.

Het gebruik der beide werktuigen is het zelfde, en valt in het oog. Men legt de middellijn AK op eenen der beenen des hoeks, het middelpunt C op de kruin: de graad D bijv. of *d*, die het ander been CD aanduidt, toont aan

hoe

hoe vele graden er in den hoek, of in den boog die deszelfs maat is, begrepen zijn.

III. AANMERKING. In latere tijden, en bij het daarstellen van het *decimaal stelsel van Maten en Gewigten*, heeft men voorgesteld den regten hoek, of het vierde van den omtrek, ook *quadrant* genoemd, niet in 90, maar in 100 *graden* te verdeelen, welke als dan door de Fransche Schrijvers *grades* genoemd worden, om ze van de gewone sexagesimale verdeeling, waarin de graden den naam van *degrés* dragen, te onderscheiden. Ieder van die 100 graden wordt niet in 60, maar in 100 *seconden*, en iedere van de nieuwe *seconden* niet in 60 maar in 100 *tiercen* verdeeld, en altijd zoo voort. LE GENDRE heeft die verdeeling in zijne *Géometrie* aangenomen: en ook DE GELDER in zijne Meetkunde. Men kan over de groote voordeelen van die nieuwe verdeeling, over de wenschen van vroegere Wiskundigen om eene dergelijke werkstellig gemaakt te zien, over de pogingen van beroemde Mannen om ze inte voeren, nagaan het geen ik gezegd heb in mijne *Verhandeling over volmaakte Maten en Gewigten*, §. 120. en volgende. In dit werk zullen wij de oude verdeeling behouden.

IV. AANMERKING. Gelijk men den omtrek des cirkels met den *radius*, of met de middellijn heeft vergeleken, en in deelen van deze heeft uitgedrukt: zoo ook heeft men den *radius* uitgedrukt in deelen van den omtrek, dat is in *graden* en *minuten*: en hiertoe dient het volgende

III. VOORSTEL.

De boog wiens lengte gelijk is aan den *radius*, bevat 57 *graden*, 17 *minuten*, 44,8 *seconden*.

BEWIJS. De halve omtrek staat tot den *radius* als 355 : 113: dat is $180^{\circ} : r = 355 : 113$: en dus $r = \frac{180^{\circ} \times 113}{355}$; waaruit het Voorstel volgt.

I. GEVOLG.

De *radius*, in seconden uitgedrukt, bevat $206,264''.8$.

AANMERKING. De *radius* in *seconden* uitgedrukt, wordt aangeduid door r''.

II. GEVOLG.

Een boog, in deelen van den *radius* uitgedrukt, en als eenheid beschouwd, zal in seconden uitgedrukt worden als men denzelven door r'' multipliceert: en een boog in *se-*

conden uitgedrukt, zal tot deelen van den *radius* herleid worden als men denzelven door r'' divideert.

IV. VOORSTEL. Fig. 158.

Gelijkvormige cirkelstukken [ABC, DEF] zijn die welke gelijke hoeken bevatten: en gelijkvormige *Sectoren* zijn die welke door stralen, gelijke hoeken bevattende, gevormd worden.

St. III. def. 11. prop. 13, 14, en VI. def. 7.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit het I. Voorstel toont men dat de bogen, op welke de hoeken ABC, en DEF rusten, zijn als de omtrekken: en dus uit III. 8., dat de bogen ABC en DEF het ook zijn, waaruit het Voorstel door VII. 10. Gev. 3. volgt.

VOOR HET II. Uit de gelijkheid der hoeken, en dus de gelijkvormigheid der bogen, en hunne gelijke rede tot de stralen, (door het I. Voorstel, en VII. 10. Gev. 2.).

AANMERKING. EUCLIDES stelt dit Voorstel onder de *Axiomata* van zijn derde boek.

I. GEVOLG.

De bogen van gelijkvormige cirkelstukken, of *Sectoren*, zijn als de stralen der cirkels, of als de choorden waarop die bogen rusten.

L. G. IV. 11. Cor.

II. GEVOLG.

En dus zijn de gelijkvormige cirkelstukken, die op gelijke choorden staan, gelijk.

EUCL. III. 24.

III. GEVOLG.

En gevolgelijk kan men op eene lijn, aan den zelfden kant, geen twee cirkelstukken plaatsen, die gelijkvormig en tevens ongelijk zijn.

EUCL. III. 23. — St. III. 15.

IV. GEVOLG.

Gelijkvormige *Sectoren* en cirkelstukken zijn in verdubbelde rede der choorden op welke zij staan, of

der

der middellijnen van de cirkels tot welke zij behooren (IV. 27. en VII. 10. Gev. 3).

L. G. IV. 11. Cor. — TACQUET *Schol.* op EUCL. XII. 2. — St. VI. 28. Gev. 2, 3 en 29.

V. VOORSTEL. Fig. 157.

Bogen [AG, DE] van ongelijke cirkels, op welke ongelijke hoeken rusten, zijn in samengestelde rede der hoeken, en der stralen: en de hoeken zijn in samengestelde rede van de regte rede der bogen, en de omgekeerde rede der stralen.

BEREIDING. Men onderstelt de cirkels om het zelfde middelpunt te staan: en men verlengt CG in F.

BEWIJS. VOOR HET I. ⌒ AG : ⌒ DF = CA : CD en ⌒ DF; ⌒ DE = ∠ DCF : ∠ DCE: I. Voorstel.
derhalve ⌒ AG : ⌒ DE = CA × ∠ DCF : CD × ∠ DCE (III. 10).

VOOR HET II. Uit het eerste: en III. Ax. 5.

AANMERKING. Hoe wel dit Voorstel van veel gebruik is in de Sterrekunde, vindt men het echter bijna in geen *elementaire* boeken. Zie het bij LA CAILLE *Leçons d'Astronomie.* §. 124. en KRAFFT *Geometria sublimior.* §. 107.

VI. VOORSTEL.

Sectoren van verschillende cirkels staan tot elkander in samengestelde rede der hoeken die zij uitmaken, en der vierkanten van de *radii* der cirkels waartoe zij behoren. En, indien de *Sectors* gelijkvormig zijn, zijn zij onderling als de vierkanten der middellijnen.

BEWIJS. Uit VII. 15. is
Sector CDE : *Sector* CAG = ⌒ DE × CD : ⌒ AG × AC;
maar ⌒ DE : ⌒ AG = ∠ DCE × CD : ∠ ACG × AC : dus
Sector CDE : *Sector* CAG = ∠ DCE × CD^2 : ∠ ACG × AC^2.
KRAFFT *Geometria sublimior*, §. 107.

AANMERKING. De inhoud eens cirkelstuks [Fig. 122.] hangt van dien des *Sectors* af: want de inhoud van een cirkelstuk is gelijk aan het verschil of aan de som van dien des *Sectors* en dien des middelpunts, beide tot den boog van dat cirkelstuk behorende, naar mate het zelve [zoo als LKHL] kleiner, of [zoo als LPHL] grooter is dan de halve cirkel, en dus (VII. 15. Aanm. I. en IV. 9. Gev. 6) wordt een cirkelstuk uitgedrukt door $\frac{B \times r}{2} \mp$ △ LCH $= \frac{B \times r}{2} \mp \frac{1}{2}$ LH . CI.

Zie hier over nader het 8 Voorst. Gev. 2. van het IX. Boek.

VII. VOORSTEL. Fig. 119.

De maat eens hoeks [B A D], in het aanrakings stip [A], door eene raaklijn [B A] en eene choorde [D A] gevormd, is de helft van den boog dien de choorde bespant.

L. G. II 19.

BEWIJS. Uit V. 8. en hier het II. Voorstel, 4. Gev.

VIII. VOORSTEL. Fig. 159, 160.

De maat eens hoeks [D A E] wiens kruin A niet op den omtrek des cirkels valt, is de helft van de som, of van het verschil, der bogen [D E, G H] op welke de beenen des hoeks, zoo noodig verlengd, rusten, naar mate de kruin binnen, of buiten, den cirkel valt.

L. C. §. 476.

BEREIDING. Men trekt H D.

BEWIJS. Uit I. 15. en hier het II. Voorstel, 4. Gev.

I. GEVOLG. Fig. 155.

Indien de kruin A zoodanig op de middellijn A C E genomen wordt, dat A G = G C is, zal de hoek F A E het derde gedeelte zijn van den hoek *g* C E.

BEWIJS. $\angle A = \frac{1}{2} \frown gE - \frac{1}{2} \frown HG$: en $\angle GCA = \frown HG$: dus:
$\frac{1}{2} \frown gE - \frac{1}{2} \frown HG = \frown HG$: of $\frown gE = 3 \frown HG$ en dus $\angle gCE = 3 \angle GCH = 3 \angle A$.

I. AANMERKING. Indien er dan een middel was om, een boog *g* E, of een hoek *g* C E, gegeven zijnde, eene snijlijn F G A zoodanig te trekken in een' cirkel waarvan *g* C de *radius* is, dat het stuk buiten den cirkel gelijk zij aan den *radius*, zoude het zeer gemakkelijk vallen eenen hoek in drie gelijke deelen te verdeelen: doch het is niet mogelijk zoodanige lijn door middel van den cirkel en van de regte lijn alleen, dat is, in den strikten zin *geometrisch*, te trekken.

VIETA heeft het vraagstuk van de verdeeling eens hoeks in drie deelen tot dit Voorstel gebragt (*Operum*, p. 245): en dit komt volmaakt overeen met het geen wij gezegd hebben, Boek I. 29. Aanm. 2.

II. GEVOLG. Fig. 123.

Zoo de kruin F des hoeks G F D, binnen den cirkel valt, waarin een der beenen van den hoek de diameter F C N des cirkels is; al verder, zoo die hoek zoodanig gesteld wordt, dat de choorde D G gelijk is aan F D, zal de boog D G het derde gedeelte zijn des boogs A B G D.

AAN-

BEWIJS. Om dat GD = FD: is ∠ GFD = ∠ FGD (I. 27.) d. i. $\frac{\frown AN + \frown GD}{2} = \frac{\frown NED}{2}$: en $\frown AN + \frown GD = \frown NED$: derhalve $\frown AN + 2 \frown GD = \frown NED + \frown DG = \frac{1}{2}$ *Omtr.*: maar $\frown AN + \frown ABG = \frac{1}{2}$ *Omtr.*: derhalve $\frown AN + 2 \frown GD = \frown AN + \frown ABG$: of $2 \frown GD = \frown ABG$ en $3 \frown GD = \frown ABG + \frown GD = \frown ABGD$.

II. AANMERKING. Derhalve een gegeven boog AD zoude in drie deelen gedeeld kunnen worden, indien men eene middellijn ND *geometrisch* zoodanig schikken kon, dat de choorde DG gelijk wordt aan FD, het stuk dat van de choorde AD des gegeven boogs door die middellijn wordt afgesneden.

Ik heb deze oplossing gevonden in eenen brief in 1654 door KINNER uit Praag aan HUYGENS geschreven.

VIII*. VOORSTEL. Fig. 160.

De maat van den uitwendigen hoek [LKI], in den omtrek gemaakt door eene choorde [LK] en eene verlengde snijlijn [FI] is de helft van de som der bogen [LK en KF] die gemelde lijnen wederzijds van het snijpunt bespannen.

BEREIDING. Men trekt LF.

BEWIJS. Uit I. 15. en hier het II Voorstel. 4. Gev.

II. AFDEELING.

VAN HET METEN EN BEREKENEN DER HOEKEN EN BOGEN DOOR CHOORDEN, SINUSSEN, TANGENTEN EN SECANTEN.

I. BEPALINGEN EN ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN.

I. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *complement* van een' boog [DB] den boog [GD] dien men bij den boog [DB] voegen moet om het vierde gedeelte van den omtrek des cirkels uittemaken: en *supplement* den boog [AGD] dien men er moet bijvoegen om den halven omtrek uittemaken.

Insgelijks: men noemt *complement* van een' hoek [DCB], den

den hoek [G C D] dien men bij denzelven voegen moet, om een' regten hoek te verkrijgen: en *supplement* den hoek [A C D], die er bijgevoegd moet worden om twee regten uittemaken.

St. VII. d. 2, 3.

I. AANMERKING. De woorden *complement* en *supplement* beteekenen beide *bijvoegsel*, of *aanvulsel*. Het gebruik heeft gewild dat het eene *aanvulsel tot het vierde gedeelte des omtreks*, het ander *tot den halven omtrek* zoude beteekenen.

GEVOLG.

Indien men eenen boog, of hoek (dat is het getal graden dat derzelver grootte aanduidt) van 90° en van 180° aftrekt, verkrijgt men het *complement* en het *supplement*.

II. AANMERKING. Daar de bogen de maat der hoeken zijn (Voorst. II. Gev. 4.) moet men in het vervolg door vierde gedeelte van den omtrek, of door halven omtrek, éénen regten hoek, of twee regte hoeken, verstaan: en 't geen men van bogen zeggen zal ook op hoeken toepassen, en omgekeerd.

II. BEPALING.

Men noemt *choorde* eens boogs de lijn [D B], die beide de uitersten des boogs veréénigt: zij onderspant, wel is waar, zoo wel den boog [A D B] die met den voorgaanden [D B] den geheelen omtrek uitmaakt, als dien boog [D B] zelven: doch men verstaat altijd, stilzwijgend, alleen den boog die kleiner is dan de halve omtrek (*).

III. BEPALING.

Men noemt *sinus* (of *hoekmaat*) eens boogs [D B], de loodlijn [D I] die van een zijner uiteinden nedergelaten wordt op de middellijn [B A], welke door het ander einde [B] gaat. En die zelfde loodlijn is ook de *sinus*, of hoekmaat, van den hoek [D C B], waarvan de boog [D B] de maat is.

St. VII. def. 4. — L. G. *Trig.* §. 5.

I.

(*) Deze bepaling is hier, gemakshalve, uit de I. Bepaling van het V. Boek, herhaald.

I. GEVOLG.

De *finus* eens boogs is ook de *finus* van het fupplement.

L. G. Tr. §. 10.

II. GEVOLG.

Hoe grooter de boog is hoe grooter de *finus* is, tot dat men eenen boog van negentig graden, of een vierde gedeelte van den omtrek, heeft: dan is de *finus* gelijk aan den *radius*; waarom ook de *radius* de *geheele finus* (*finus totus*) genoemd wordt. De *finusfen* [bijv. N P] van bogen [B G P] die grooter zijn dan 90 graden zijn wederom kleiner, en de *finus* van 180°. is nul.

AANMERKING. Indien men nog verder dan den halven cirkel wilde gaan, bij voorbeeld tot den boog [B G A M], zoude de *finus* N M zijn, de zelfde als voor B K, dat is voor het verfchil tusfchen den gegeven boog en den halven omtrek: doch dan valt de *finus* onder de middellijn, en dus aan het tegengeftelde van den kant waarop men de *finusfen* der bogen tot 180 gr. toe genomen heeft. Indien men zich herinnert wat wij (III. 22. Aanm. 2.) van *negatieve* grootheden en derzelver aard gezegd hebben, zal het blijken, dat die *finusfen negatief* zijn: dus is *finus* 0° = 0: *finus* 90° = *r*: *finus* 180° = 0: *finus* 270° = — *r*: *finus* 360° = 0 en zoo voorts.

L. G. Tr. §. 7, 8, 9.

IV. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *cofinus* of *mede-hoekmaat*, ook *fchilboogs hoekmaat*, en meest *finus-complement*, van een' boog [D B] of van een' hoek [D C B], den *finus*, of hoekmaat, [H D] van zijn complement: of, wat op het zelfde uitkomt, het gedeelte [C I] van den *radius*, dat tusfchen het middelpunt des boogs, of den top des hoeks, en de ontmoeting van den *finus* bevat is.

St. VII. def. 6. — L. G. Tr. §. 6.

I. GEVOLG.

De *cofinus* is kleiner naar mate de boog of hoek grooter is: die van een' boog van 90 gr., of van een regten hoek, is *nul*: hij wordt grooter, en komt nader aan den *radius*, naar mate de boog kleiner wordt en dus nader

 aan

aan o graden komt. Dus is *cosinus* o°. gelijk aan den *radius*.

II. GEVOLG.

De *cosinus* eens hoeks of boogs is ook de *cosinus* van zijn supplement.

AANMERKING. [Fig. 172.] Indien men zich het geen wij III. 22. Aanmerking 2. over den aard der *negatieve* grootheden gezegd hebben herinnert, blijkt het dat de *cosinussen* van bogen tusschen de 90° en 270° altijd *negatief* zijn: want men begint ze van C af te tellen: en dus voor de bogen van C af tot B toe naar den kant G B: doch voor de bogen van C door G tot A, naar den kant G A, en dus aan den anderen kant van het begin, of van den oorsprong, der telling: het geen juist het denkbeeld van eene *negatieve* grootheid uitmaakt: dus is *cosinus* o° = r: *Cos.* 90° = o: *Cos.* 180° = $-r$: *Cos.* 270° = o: *Cos.* 360° = r.

Deze aanmerking is van gewigt: om dat men veeltijds uit het teeken + of − moet beoordeelen, of een bereken. de *cosinus* tot een boog die kleiner dan 90°, of tot deszelfs supplement, dus tot een boog die grooter dan 90° is, behoort.

V. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *sinus-versus*, *verkeerde sinus*, of *pijl*, het gedeelte [B I] van den *radius* dat tusschen het eene einde des boogs, en den *sinus*, begrepen is.

St. VII. def. 7.

GEVOLG.

De *sinus-versus* is dus gelijk aan het verschil van den *sinus* en den *radius* voor hoeken, of bogen, die kleiner dan 90 graden zijn: doch voor hoeken of bogen die grooter dan 90 graden zijn, dat is voor de supplementen der eerstgemelden, is de *sinus-versus* [A I] gelijk aan de som van den *radius* [A C] en den *cosinus* [C I].

AANMERKING. De *sinus-versus* is dus altijd *positief* tot 180° toe, omdat hij altijd naar den zelfden kant geteld wordt, groeijende van o tot + r en + 2 r.

VI. BEPALING. Fig. 172.

Men noemt *tangent* eens hoeks of boogs, dat gedeelte

[BE]

[BE] van de onbepaalde raaklijn, het welk begrepen is tusfchen het ftip van aanraking [B], en de ontmoeting [E] van den verlengden *radius*, die door het ander eind [D] van den boog gaat.

St. VII. Bep. 8. — L. G. Tr. §. 5.

GEVOLG.

De *tangent* wordt dus grooter naar mate de boog of hoek grooter wordt: doch de *tangent* eens boogs van 90 graden, kan den *radius*, die door het andere einde des boogs gaat, niet ontmoeten, om dat hij evenwijdig aan denzelven is: en dus is de *tangent*, in dat geval, onbepaald groot, of, gelijk Wiskundigen gewoon zijn te fpreken, *oneindig*. Doch de *tangenten* van hoeken, die grooter dan 90° zijn, zijn gelijk aan de *tangenten* der bogen of hoeken waarvan zij *fupplementen* zijn.

L. G. Tr. §. 12.

AANMERKING. Indien men op het laatste gedeelte van dit gevolg let, zal men indedaad zien, dat, zoo de boog BG grooter is dan 90°, bijv. BGP, de *radius* CP nimmer de raaklijn BE boven de middellijn raken kan: maar indien men PC onder den diameter tot in Q verlengt, zal BQ, volgens de bepaling, de *tangent* van boog BK zijn: nu is BQ = EB = *tangent* van den boog DB, die het fupplement is van boog PGB.

En indien men al verder let op het geen wij in het III. Boek, XXII. Voorftel, Aanm. 2. gezegd hebben, over den aard der *negatieve* grootheden, blijkt het, dat BQ als *negatief* befchouwd moet worden: en dus is *Tangens* 0° = 0: *Tang.* 90° = oneindig: *Tang.* van een' boog grooter dan 90° *negatief*: *Tang.* 180° = 0: *Tang.* boog grooter dan 180° tot 270° *pofitief*: *Tang.* 270°. oneindig: *Tang.* boog grooter dan 270° tot 360° *negatief*. *Tang.* 360° = 0.

Wij zullen in het vervolg (Aanm. op Voorftel XIX.) zien, hoe dit met het geen wij van *pofitieve* en *negatieve finusfen* en *cofinusfen* gezegd hebben, overeenkomt.

VII. BEPALING. Fig. 172.

De *Cotangent* [GF] of *mede-raaklijn*, ook *tangent-complement* genoemd, is de *tangent* van het complement eens gegeven boogs, of hoeks.

St. VII. Bep. 9.

GEVOLG.

De *Cotangent* wordt dus kleiner naar mate de hoek grooter is: is *nul* voor een' regten hoek, *oneindig* voor den hoek dien men zoude begrijpen *nul* te zijn.

AANMERKING. Het geen wij voor het *positieve* of *negatieve* van den *tangent* gezegd hebben, heeft ook voor den *cotangent* plaats.

VIII. BEPALING. Fig. 172.

De *Secant* of *snijlijn* [CE] van een' boog of hoek, is de *radius* tot aan de *tangent* verlengt.

St. VII. def. 8. — L. G. Tr. §. 5.

GEVOLG.

De *secant* is dus grooter naar mate de hoek grooter is: die van een' boog of hoek van 90 gr. is *oneindig*: doch de *secanten* van bogen die grooter dan 90° zijn, zijn de zelfde als de *secanten* der bogen, of hoeken, die kleiner dan 90° zijnde, de supplementen van de eerstgemelde zijn.

AANMERKING. Het geen wij over het *positieve* of *negatieve* van de *tangenten* gezegd hebben, heeft op de zelfde wijze voor *secanten* plaats.

IX. BEPALING. Fig. 172.

Cosecant [CF], *of mede-snijlijn*, ook *secant-complement* genoemd, is de *secant* van het *complement*.

GEVOLG.

De *Cosecant* wordt kleiner naar mate de boog grooter wordt: die van 90° is *nul*: die van eenen boog, welken men begrijpen zoude nul te zijn, is *oneindig*.

AANMERKING. Het geen wij van het *positieve* en *negatieve* van de *secanten* gezegd hebben, heeft hier even eens plaats.

X. BEPALING.

Alle de opgenoemde lijnen, choorden, *sinus*, *cosinus*, *tangent*, *cotangent*, *secant*, *cosecant*, *sinus-versus*, worden thans onder den algemeenen naam van *goniometrische lijnen* begrepen, dat is van lijnen ter hoek-meting geschikt.

AAN-

AANMERKING. De eigenfchappen der *choorden*, *finusfen*, *tangenten* en *fecanten*, worden ten vollen door de Meetkunde bewezen, en uit de eigenfchappen van den cirkel en van gelijkvormige driehoeken afgeleid: en in zoo verre behooren die lijnen tot de Meetkunde zelve. Doch de Wiskonstenaars gaan verder; zij vergelijken de hoegrootheid dier lijnen met den *radius*, en drukken dezelve door getallen uit. Dit gaat buiten de palen van het geen de Ouden, in den ftrikften zin, Meetkunde noemden: vooral daar de *choorden*, *finusfen*, *tangenten* en *fecanten*, alle (op vier na, *choorde* 60°, *finus* 30°, *tangens* 45° en *fecans* 60°) door onmeetbare getallen, en dus flechts ten naasten bij, kunnen worden uitgedrukt.

Dan, daar wij nu over die lijnen, meer bepaaldelijk, ten nutte van de praktijk fpreken zullen, en wel met oogmerk om aantetoonen, hoe men derzelver grootheid berekent, zullen wij geen zwarigheid maken, de verkorte uitdrukkingen, in het IV. Boek, IX. Voorftel, Gevolg 2. uitgelegd, te gebruiken: en van het *product* van twee lijnen te fpreken, om den regthoek, door dezelve gemaakt, aan te duiden. Ons XIII. Voorftel, bij voorbeeld, zoude, volgens de ftrikte fpreekwijze der Ouden, welken wij tot nu toe in acht genomen hebben, dus uitgedrukt worden: „de regthoek uit de choorde, die de fom van twee bogen befpant, en de middellijn, is gelijk aan de fom der regthoeken uit de choorde van elken boog, met de choorde van het fupplement des anderen boogs." De volgende Voorftellen konden op de zelfde wijze uitgedrukt worden. Hoe wel nu deze uitdrukkingen, misfchien, meer in den fmaak der Ouden zouden vallen, verkiezen wij de andere te gebruiken, die korter zijn, en meer onmiddelijk in de berekeningen te pas komen; vooral daar wij dezelve zeer naauwkeurig uitgelegd, en tevens aangetoond hebben, hoe zij in de daad uit de ftrikfte bewijzen der Meetkunde zelve afgeleid worden. Wij hebben daarin te minder zwarigheid gemaakt, daar EUCLIDES en ARCHIMEDES zelve ze gebruikt hebben, zoodra het op het rekenen in getallen aankwam, zoo als duidelijk blijkt uit het VII. en X. Boek van EUCLIDES, waarvan wij verfcheiden plaatfen hebben aangehaald, en uit het werk van ARCHIMEDES over den cirkel. Dit zij over onze manier van handelen in de volgende Voorftellen genoeg.

IX. VOORSTEL. Fig. 172.

De reden van choorden [DB en *db*], *finusfen* [DI en *di*], verkeerde *finusfen* [BI en *bi*], *tangenten* [BE en *be*],

b e], *secanten* [CE en C*e*], *cosinussen* [CI en C*i*], *cotangenten* [GF en *gf*], *cosecanten* [CF en C*f*] van gelijke hoeken, of van bogen die gelijke hoeken bespannen, en dus gelijkvormig zijn, tot den *radius*, zijn in alle cirkels, welke ook derzelver grootte zijn moge, de zelfde.

BEWIJS. Uit de gelijkvormige driehoeken, door IV. 2.

GEVOLG.

De *choorden*, *sinussen*, *tangenten*, *secanten*, zijn dus ook eene ware *maat* van de bogen en van de hoeken: en, welke ook de grootte van den *radius* zijn moge, worden die *choorden*, *sinussen*, *tangenten*, *secanten*, altijd door het zelfde getal deelen van dien *radius* uitgedrukt.

X. VOORSTEL.

De laatste rede van den boog, van de choorde, van den *sinus* en van den *tangent* is die van gelijkheid: die van den *cosinus* en van den *secant* is de *radius*: de middellijn is die des *cosinus* van het supplement eens boogs.

BEWIJS. Uit VII. 3. om dat de boog de limiet is van choorde, *sinus* en *tangent*: de *radius* die van *cosinus* en *secant*: en de middellijn is de limiet van den *cosinus-supplement*, of van den *cosinus* van 180°.

I. GEVOLG.

De *sinussen* en *tangenten* van zeer kleine bogen volgen zeer ten naasten bij de rede van de bogen zelve: en hoe kleiner die bogen zijn hoe naauwkeuriger die gelijkheid van rede plaats heeft.

II. GEVOLG.

De boog van 1″ is klein genoeg om den *sinus* te houden voor gelijk aan den boog zelven: of *sinus* 1″ = ⌒ 1″: en derhalve (Voorst. III. Gev. 1 en 2.) de *radius* in seconden uitgedrukt $= \frac{1}{\text{sin. } 1''}$.

AANMERKING. De boog van éene seconde indien de *radius* door 1 wordt uitgedrukt, is

0.00000,4848,1368,11

deszelfs *sinus* 0.00000,4848,1368,09.

De boog zelfs van 1′ verschilt al zeer weinig van zijnen *sinus*: want dezelve is

0.00029,08882,8666

en deszelfs *sinus* 0.00029,08882,4566.

III.

III. GEVOLG.

Indien dan een boog B zeer klein is, is B = *sin.* B: en dus $\frac{sin.\ B}{B} = 1$: en indien B = $x - y$, is $\frac{sin.\ (x - y)}{x - y} = 1$: d. i. hoe kleiner het verschil van twee bogen is, hoe nader de *sinus* van den boog welke dat verschil uitdrukt, gedivideerd door dien boog zelven, aan de eenheid komt: indien $x = y$ of $x - y = 0$, heeft zulks plaats.

IV. GEVOLG.

Insgelijks indien B zeer klein is, is $\frac{tang.\ B}{B} = 1$. en

$$\frac{tang.\ (x-y)}{x-y} = 1.$$

V. GEVOLG.

Ook is, zoo B zeer klein is, $\frac{\text{choorde } B}{B} = 1$. en

$$\frac{\text{choorde } (x - y)}{x - y} = 1.$$

D. G. *Handleiding*, §. 969.

II. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER CHOORDEN.

XI. VOORSTEL. Fig. 156.

Indien twee ongelijke bogen van den zelfden cirkel gegeven zijn (⌒ BG, ⌒ AB) zal de choorde van den grootsten eene kleiner rede hebben tot de choorde van den kleinsten, dan de grootste boog tot den kleinsten.

BEREIDING. Zij de lijn BD, die den hoek ABG in twee gelijke deelen deelt: men trekke AG, DA, DG: en uit D, DZ ⊥ op AG. Men beschrijve uit D met den *radius* DE eenen cirkelboog die de verlengde DZ snijdt in T, en DA in H.

BEWIJS. Om dat ∠ DBG = ∠ ABD: is DG = AD: en om dat BG > AB is EG > AE: Maar *sector* ETD > △ DEZ: en △ DEA > *sector* HDE; derhalve △ DEZ: △ DEA < *sector* DET: *sector* DEH: maar △ DEZ: △ DEA = EZ: EA: derhalve EZ: EA < *sector* DET: *sector* DEH, < ∠ EDZ: ∠ EDA: en *componendo*.

EZ + EA (of AZ): EA < ∠ ZDA: ∠ EDA: en dus ook om dat AD = DG en AZ = ZG, AZ (of GA): EA <

< ∠ GDA : ∠ EDA : en *dividendo* GA — EA : EA < ∠ GDE : ∠ EDA : maar GE : EA = GB : BA : en dus ∠ GDE of ∠GDB : ∠ EDA = ⌒ BG : ⌒ AB : en derhalve GB : BA < ⌒ BG : ⌒ AB.

AANMERKING. Dit Voorstel is van PTOLEMAEUS, die het, even als de twee volgende in zijn *Almagestum*, I. Boek, Hoofdst. IX. heeft voorgedragen.

GEVOLG.

De choorde eens boogs staat dan tot de choorde van eenig gedeelte deszelven, bijv. het $\frac{1}{m}$, in kleinere rede dan $m : 1$: en dus is de choorde van ⅓ gedeelte van den boog grooter dan het ⅓ gedeelte van de choorde des geheelen boogs.

XII. VOORSTEL. Fig. 132.

Het vierkant der middellijn is gelijk aan de som der vierkanten van de choorde eens boogs, en van de choorde van het supplement

dat is, $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$.

BEWIJS. Uit V. 7. en II. 16.

GEVOLG.

De middellijn van den cirkel, en de choorde eens boogs gegeven zijnde, vindt men gemakkelijk de choorde van het *supplement*

dat is, $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$.

I. AANMERKING. De choorde van eenen boog van 60°. is de zijde van den regelmatigen zeshoek in den cirkel beschreven (VI. 8. Gev. 2.), en is dus gelijk aan den *radius*. Alle andere choorden worden gevonden met den wortel uit getallen te trekken: doch deze zijn geen quadraat-getallen: en dus vindt men die choorden slechts bij nadering.

II. AANMERKING. Hierop, dat namelijk de choorde van 60 gr. gelijk is aan den *radius*, steunt het gebruik van die lijnen op den *proportionaal-passer* welke met de letter C, of het woord *choorde*, bestempeld zijn. Zij dienen om de choorden van alle hoeken, of bogen, gemakkelijk te vinden; en omgekeerd, om uit de grootte der choorde de hoeken optemaken. De afstand van het begin der schaal (dat is op den *proportionaal-passer* van het middelpunt deszelven af) tot

tot 60, is de choorde van 60 gr., en dus de *radius*. Het gebruik is gevestigd op IV. 2.

Men vindt ook dergelijke lijnen van choorden op de *pleinſchalen*: derzelver gebruik is bepaald tot den *radius* van de ſchaal, daar de *proportionaal-pasſer* voor alle mogelijke *radii* dient.

III. AANMERKING. De lijn der choorden dient ook om de zijden van de regelmatige veelhoeken, met betrekking tot den *radius*, te vinden: die zijden immers zijn de choorden der *middelpuntshoeken*. De lijn der choorden is zelfs tot die verrigting ruim zoo geſchikt als die der *polygonen*.

IV. AANMERKING. Op de pleinſchalen ſtaat de lijn der choorden meestal in verband met eene lijn gemerkt R, of met het woord *Rhumb*, en in 8 grootere deelen, en vervolgens ieder deel in vier onderdeelen, verdeeld. Het achtſte valt op 90°. Deze dient voor de zeelieden om de *Rhumbs*, of *compasſtreeken*, en daar door hunnen koers, gemakkelijk in hunne figuren, of kaarten, over te brengen. Het vierde gedeelte des omtreks van den cirkel bevat 8 ſtreeken; iedere ſtreek is dus een hoek van 11¼ gr.: ook komt de eerſte ſtreek op de lijn R overeen met 11¼ op de lijn der *choorden*; de tweede met 22½ enz.

XIII. VOORSTEL. Fig. 140.

De choorde [DB] van de ſom van twee boogen [AD, AB] is gelijk aan de ſom der producten van iedere choorde met de choorde van het ſupplement des anderen boogs gemultipliceerd, en door de middellijn gedivideerd, dat is,

$$DB = \frac{AB \times DI + AD \times IB}{AI}.$$

BEREIDING. Men trekt de middellijn IA: en de ſupplement-choorden BI, DI: dan is ABID een vierhoek in den cirkel beſchreven, waarvan DB de eene diagonaal en de middellijn AI de andere diagonaal is.

BEWIJS Uit VI. 7. welk Voorſtel, het Voorſtel van PTOLEMAEUS genoemd, indedaad met dit overeenkomt, zoo men voor de regthoeken de producten der lijnen, dat is de producten der getallen die de lengte der lijnen uitdrukken, ſtelt: en ook PTOLEMAEUS heeft dit Voorſtel gebruikt om de choorden te berekenen.

I. GEVOLG.

Wanneer dus de choorden van twee bogen bekend zijn, kan men de choorde van de ſom dier bogen vinden: want men berekent eerst door het XII. Voorſtel, Gev. de choor-

 den

den der fupplementen, en dan door dit Voorftel de gevraagde choorde der fom; en ook dit is door PTOLEMAEUS verrigt.

II. GEVOLG.

De choorde eens boogs, die het dubbeld is van een' gegeven boog, is gelijk aan het product der choorde van den boog door de choorde van het fupplement gemultipliceerd, en door den *radius* gedivideerd; dat is, zoo AB = AD, is

$$DB = \frac{AB \times DI}{\frac{1}{2} AI}.$$

III. GEVOLG.

Op de zelfde wijze vindt men de choorde van eenen drievoudigen, vijfvoudigen, enz. boog; met door ons Voorftel en door het II. Gevolg, de choorde te berekenen van den boog die de fom is van den enkelen en den dubbelden, vervolgens van den dubbelden en den drievoudigen, enz.

IV. GEVOLG.

De choorde AB van het verfchil van twee bogen (⌒ DAB en ⌒ DPA) is

$$AB = \frac{AI \, . \, DB - AD \, . \, IB}{DI}.$$

BEWIJS. Het volgt onmiddelijk uit dit Voorftel: en het is ook door PTOLEMAEUS verrigt.

XIV. VOORSTEL. Fig. 143.

De choorde eens boogs [I*n*E] die de helft is van een' gegeven boog [FIE] is gelijk aan den vierkants-wortel van het product uit den *radius* [CE] en het verfchil [QE] van de middellijn en de choorde [TE] van het fupplement des gegeven boogs [FIE]: dat is, $IE = \sqrt{CE \times [TE - TF]}$.

BEWIJS. De choorde van een' boog is altijd de zijde van eenigen veelhoek: dus is de choorde van den halven boog de zijde des veelhoeks die eens zoo veel zijden heeft: en gevolgelijk is dit Voorftel het vermaard Voorftel van PTOLEMAEUS door ons in het XXVI. Voorftel van het VI. Boek bewezen.

GEVOLG.

Men kan derhalve de choorden berekenen van alle de bogen, die door eene gedurige verdeeling in twee gelijke deelen voorkomen: en die rekening wordt nog gemakkelijker gemaakt door het Voorftel van SNELLIUS dat het Gevolg is van het XXVI. Voorftel des VI. Boeks.

I. AANMERKING. Men kan de choorde van de helft eens gegeven boogs nog op eene andere wijze vinden.

Want, daar FI = IE is, zij CK loodregt op FE, en dus KE = ½ FE: maar CK = $\sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{EK}^2}$; KI = CI — CK, IE = $\sqrt{\overline{KE}^2 + \overline{KI}^2}$: en ſtellende voor KI^2, de waarde genomen door (II. 3. Gev. 3.) uit $[CI - CK]^2$; is IE = $\sqrt{KI \cdot BI}$: zijnde KI de helft van ZI: en ZI = BI — BZ = BI — BL: het geen is het Voorſtel van PTOLEMAEUS voor de choorde van den boog [I*n*E], die de helft is van den gegeven boog [IEL].

II. AANMERKING. Men kan dus gemakkelijk de choorden van alle hoeken of bogen berekenen: want die van 60° is gelijk aan den *radius*: en door de verdeeling in twee deelen, vindt men die van 30°; 15°; 7°, 30′; 3°, 45′ = 225′: dan die van een vijfde gedeelte van 225′ of van 45′: dan die van een derde gedeelte van 45′ of van 15′: wederom die van een vijfde gedeelte of van 3′: wederom die van een derde gedeelte of van 1′. Om de choorden van bogen te vinden die het derde, of het vijfde, gedeelte zijn eens gegeven boogs, gebruikt men eene ſoort van *valſche poſitie*: de choorde van het derde gedeelte van een' boog is iets grooter dan het derde gedeelte van de choorde des gegeven boogs (Voorſtel XI. Gev): men neemt dan een getal dat iets grooter is dan het gemelde derde gedeelte, en gebruikt dit als of het de ware choorde was: die choorde aannemende berekent men de choorde van den drievoudigen boog (door het XIII. Voorſt. Gev. 3.) welke dus de gegeven choorde zijn moet: zoo er eenig verſchil is, maakt men dezen regel van drieën:

De gevonden choorde ſtaat tot het getal dat men geſteld heeft voor de choorde van het derde deel des boogs, als de ware choorde van den gegeven boog tot de ware choorde van het derde gedeelte: en deze regel ſteunt hierop, dat voor bogen die weinig van elkander verſchillen, de aanwas der choorden de zelfde rede als die der bogen volgt, gelijk reeds uit de Theorie der limieten is op te maken, en verder in ons XXI. Voorſtel Gev. 6. blijken zal.

Indien men dan de choorde van 7°. 30′ heeft, kan men op die wijze de choorde van het derde gedeelte, of van 2°. 30′. zoeken: en dan van het 5. gedeelte van 2°. 30′ of van 30′: en dan van het derde gedeelte, of van 10′: en dan van het vijfde gedeelte of van 2′: en dan van de helft of van 1′: waaruit men alle andere choorden vindt.

Men kan hier over nazien DEPARCIEUX *Nouveau Traité de*

de Trigonometrie, p. 4—12: die deze zaak uitmuntend behandeld heeft.

III. AANMERKING. PTOLOMAEUS is de eerste Schrijver, welke ons de eigenschappen der choorden op die wijze heeft doen kennen, en Tafels van choorden berekend heeft, van halve tot halve graden, beginnende met 30′ en eindigende met 180°. Hij verdeelde den *radius*, volgens de gewoonte van dien tijd, in 60 deelen: en ieder dezer deelen wederom in 60, en altijd zoo voort volgens de *sexagesimale* verdeeling. DE LAMBRE heeft de berekeningen van PTOLOMAEUS zeer naauwkeurig bevonden. Men gebruikte de choorden en derzelver Tafels toen de *sinussen* en *tangenten* nog niet bekend waren. Nu gebruikt men alleen deze, welke aan de Grieken onbekend waren: het zal uit het XV. Voorstel blijken dat men de *sinussen* uit de choorden, en wederkerig deze uit gene kan opmaken.

III. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER SINUSSEN EN SINUS VERSUS.

XV. VOORSTEL. Fig. 172.

De *sinus* [DI] van eenen boog [BD] is de helft van de choorde [DK] eens dubbelden boogs [DBK]: en de choorde eens boogs is tweemaal de *cosinus* van het halve supplement.

TACQUET *Trigon. Lemma.* p. 335. — L. G. *Trigon.* §. 15.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit V. 6. en de derde Bepaling.

VOOR HET II. Uit het I. is choorde B $=$ 2 *sin.* $\frac{1}{2}$ B $=$ 2 *cos.* $(90° - \frac{1}{2}\text{ B}) = 2$ *cos.* $\left(\frac{180 - \text{B}}{2}\right) = 2$ *cos.* halve *supplement* B.

I. GEVOLG.

Men kan dan de *sinussen* uit de choorden, en omgekeerd, de choorden uit de *sinussen* opmaken.

II. GEVOLG.

De *sinus* van den hoek, of boog, van 30°, en derhalve ook de *cosinus* van den hoek, of boog, van 60°, is de helft van den *radius*, of van den *sinus* van 90° (Bep. 3. Gev. 2.) d. i. van het vierde gedeelte des omtreks.

St. VII. 2.

AANMERKING. Hierop steunen, op de *proportionaal-passers*, en

en ook op de pleinſchalen, de lijnen welke den naam van *ſinus* dragen, of met eene groote S beſtempeld zijn. Zij dienen om de hoeken door middel van den *ſinus* te beſchrijven: of den *ſinus* voor eenen gegeven hoek, en voor eenen bepaalden *radius*, optemaken.

III. GEVOLG.

De zijde van een' veelhoek in den cirkel beſchreven, is het dubbeld van den *ſinus* des halven middelpuntshoeks: zoo dat men die zijden zeer gemakkelijk vinden kan, wanneer de *ſinusſen* van alle bogen met genoegzame naauwkeurigheid berekend zijn.

XVI. VOORSTEL.

De *ſinus* van een' grooteren boog heeft tot dien van een' kleineren boog eene kleinere rede dan de grootſte boog tot den kleinſten.

BEWIJS. Zij A de grootſte boog, en a de kleinſte: dan is (Voorſt. XV.) *ſin.* A $=$ ½ choorde 2 A, en ſin. $a = $ ½ choorde 2 a. Maar choorde 2 A: choorde 2 a $<$ 2 A: 2 a $<$ A : a (Voorſt. XI): dus *ſin.* A : *ſin.* a $<$ A : a.

GEVOLG.

De *ſinusſen* groeijen aan, of nemen af, in kleinere rede dan de bogen tot welke zij behooren: naar mate de bogen grooter zijn, wordt het verſchil grooter: doch het is voor zeer kleine bogen onmerkbaar.

XVII. VOORSTEL. Fig. 172.

De ſom der vierkanten van den *ſinus* en van den *coſinus* eens boogs, is gelijk aan het vierkant van den *radius*: dat is.

$$r^2 = \overline{\mathit{sin.}}^2 + \overline{\mathit{cos.}}^2.$$

L. G. Tr. §. 16.

BEWIJS. Uit II. 16.

I. GEVOLG.

Wanneer de *radius* en de *ſinus*, of de *coſinus*, gegeven zijn, vindt men gemakkelijk den *coſinus* of den *ſinus*: want

$$\overline{\mathit{sin.}}^2 = r^2 - \overline{\mathit{cos.}}^2 = (r + \mathit{cos.})(r - \mathit{cos.})$$
$$\overline{\mathit{cos.}}^2 = r^2 - \overline{\mathit{sin.}}^2 = (r + \mathit{sin.})(r - \mathit{sin.}).$$

TACQUET *Trigon. Porism.* 1. — St. VII. 3.

II. GEVOLG.

$Sin.^2\ 45° + cos.^2\ 45° = 2\ sin.^2\ 45° = 2\ cos.^2\ 45° = r^2$ en

$sin.\ 45° = cos.\ 45° = \frac{r}{\sqrt{2}}.$

III. GEVOLG.

$$Sin.\ 60° = cos.\ 30° = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

BEWIJS. $Sin.^2\ 60 + sin.^2\ 30° = r^2$

of $sin.^2\ 60 + \frac{r^2}{4} = r^2$ (Voorst. XV. Gev. 2.)

of $sin.^2\ 60 = \frac{3}{4}r^2$: en $sin.\ 60° = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$.

AANMERKING. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ komen dikwerf in berekeningen te pas: wij zullen ze om die reden hier bijvoegen.

$$\sqrt{2} = 1.41421356$$
$$\sqrt{3} = 1.73205081$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70710678$$

XVIII. VOORSTEL. Fig. 173.

De *sinus* [LM] van de helft van een' boog is gelijk aan den wortel uit het halve product van den *radius* en den *sinus versus*: of aan de helft van den wortel uit de som van de vierkanten van den *sinus* en den *sinus versus*: doch de *cosinus* [CM] van de helft van een' boog is gelijk aan den wortel uit het halve product van den *radius* en den *sinus versus* van het supplement: dat is

$$sin.\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{1}{2}r \times sin.\ v.\ B} = \sqrt{\tfrac{1}{2}r\,(1 - cos.\ B)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{sin.\ B^2 + sin.\ v.\ B^2}:$$

en

$$cos.\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{1}{2}r \times sin.\ v.\ supp.\ B} = \sqrt{\left(\frac{r + cos.\ B}{2}\right) r}.$$

St. VII. 4. Gev. 1. — L. G. Tr. §. 20.

BEWIJS. VOOR HET EERSTE. Uit de gelijkvormige driehoeken ABL, en LBN, en de opmerking dat $LM = \frac{1}{2}LB$.

VOOR HET II. Uit II. 16. op den driehoek LBN toegepast.

VOOR

VOOR HET III. Uit de beſchouwing dat $cof. = \sqrt{r^2 - fin.^2}$ en voorts uit het I.

GEVOLG.

$Sin.^2 (\frac{1}{2} B) \times cof.^2 (\frac{1}{2} B) = \frac{1}{4} r^2 \times fin.\ v.\ B.\ fin.\ v.\ fupp.\ B =$ (Bep. 5. Gev.) $\frac{r^2}{4} (1 - cof.\ B) (1 + cof.\ B) = \frac{r^2}{4} (1 - cof.^2\ B) = \frac{r^2\ fin.^2\ B}{4}$ en dus $fin.\ v.\ B = \frac{fin.^2\ B}{fin.\ v.\ fupp.\ B}$.

AANMERKING. Zie andere uitdrukkingen van den *ſinus verſus*, Bep. V. Gev. en Voorſt. XXIII.

XIX. VOORSTEL. Fig. 174.

Indien men op den omtrek eens cirkels eenen bepaalden boog [AY] aanneemt, vervolgens den dubbelden boog [AD] en bogen [DE, EF, FG, GH] ieder gelijk aan dien dubbelden boog [AD]; zal de *radius* ſtaan tot tweemalen den *coſinus* van dien boog, als de *ſinus* van dien boog tot den *ſinus* van den dubbelden boog: als de *ſinus* van den dubbelden boog tot de ſom der *ſinusſen* van den drievoudigen boog en van den enkelden: als de *ſinus* van den drievoudigen boog tot de ſom der *ſinusſen* van den viervoudigen en van den dubbelden: in één woord als de *ſinus* van den $\overline{n-1}$ boog tot de ſom der *ſinusſen* van den *n*. boog en van den $n - 2$ boog.

BEREIDING. Zij AY de boog, ACZ de middellijn: neem YD = AY; DE = EF = FG = GH = AD. Trek de choorden AY, AD, AE, AF, AG, AH: en ZD, ZE, ZF, ZG: verleng AF, AG, AH, enz.: maak EI = AE: FK = AF: GL = AG enz.

BEWIJS. ∠ DAE = ∠ EAF = ∠ FAG = ∠ GAH enz. en uit II. 27. ∠ I = ∠ EAI: ∠ K = ∠ FAG: ∠ L = ∠ HAG: zoo dat alle de △△ ADE, AEI, AFK, AGL gelijkbeenig, en boven dien onderling gelijkhoekig, en derhalve gelijkvormig zijn, en met △ DZC: om dat ∠ DZC, of ∠ DZA = ∠ DAE = ∠ CDZ. Verder △ EFI = △ ADE; △ FGK = △ EAF; △ GHL = △ FAG: en derhalve FI = DE, GK = AE, HL = AF enz. derhalve

DC: DZ = AD: AE

= AE: AI = AF + FI = AF + AD

=

= AF : AK = AG + GK = AG + AE
= AG : AL = AH + HL = AH + AF.
enz.

Maar DZ = 2 *cos.* ½ ⌒ AD = 2 *cos.* ⌒ AY (Voorst. XV.)
AD = 2 *sin.* ½ ⌒ AD = 2 *sin.* ⌒ AY
AE = 2 *sin.* ½ ⌒ AE = 2 *sin.* ⌒ AD = 2 *sin* 2 ⌒ AY
AF = 2 *sin.* ½ ⌒ ADEF = 2 *sin.* $\frac{3}{2}$ ⌒ AD = 2 *sin.* 3 ⌒ AY
AG = 2 *sin.* ½ ⌒ AEFG = 2 *sin.* $\frac{4}{2}$ ⌒ AD = 2 *sin.* 4 ⌒ AY
AH = 2 *sin.* ½ ⌒ AEFGH = 2 *sin.* $\frac{5}{2}$ ⌒ AD = 2 *sin.* 5 ⌒ AY:
enz.

Dat is, stellende B voor ⌒ AY,
r : 2 *cos.* B = *sin.* B : *sin.* 2 B
= *sin.* 2 B : *sin.* 3 B + *sin.* B
= *sin.* 3 B : *sin.* 4 B + *sin.* 2 B
= *sin.* 4 B : *sin* 5 B + *sin.* 3 B enz.
= *sin.* $(n-1)$ B : *sin.* n B + *sin.* $(n-2)$ B.

I. AANMERKING. Dit Voorstel, doch op de choorden toegepast, is reeds in 1633 gebruikt door GELLIBRAND *Trigon. Britannica*, Cap. II. *Lemma.* Daar na, even als het volgende, door anderen, als door SHARP, *Method of Constr. the natur. sines*, prop. 3. te vinden in de *Mathematical Tables* van SHERWIN; door B. MARTIN, *Trigonometer's Guide*, *Theorem.* XXVI, XXVII. ROBERTSON, *Elem. of Navig.*, Boek III. prop. 4.

II. AANMERKING. Het bewijs van dit Voorstel, te weten AD : AE = AE : AF + AD geeft deze belangrijke eigenschap des cirkels. „ Indien een boek DAF in den omtrek, door „ eene lijn AE in twee gelijke deelen gesneden wordt: is „ die lijn middelevenredig tusschen het kleinste been en „ de som der twee beenen.

GEVOLG.

In het algemeen
sin. n B = 2 *cos* B *sin.* $(n - 1)$ B — *sin.* $(n - 2)$ B
stellende den *radius* $r = 1$:
en in het bijzonder
sin. 2 B = 2 *sin.* B *cos.* B.

III. AANMERKING. Men ziet hieruit hoe gemakkelijk het valt om, *sin.* B en *cos.* B bekend zijnde, achtervolgens de *sinussen* van 2 B, 3 B, 4 B, enz. te berekenen, zonder de *cosinussen* van die zelfde bogen te kennen.

XX. VOORSTEL. Fig. 174.

In de zelfde onderstellingen als bij het voorgaande Voorstel;

ftel: ftaat de *radius* tot den dubbelden *cofinus* van den gegeven boog, als twee malen de *cofinus* tot de fom van den *radius* en van den *cofinus* des dubbelden boogs: als de *cofinus* van den dubbelden boog tot de fom van den *radius* en den *cofinus* van den drievoudigen boog: als de *cofinus* van den drievoudigen boog tot de fom van den *radius* en van den *cofinus* van den viervoudigen boog: enz. in één woord, de *radius* ftaat tot den dubbelden *cofinus* eens boogs, als de *cofinus* van ($n - 1$) maal den boog n, tot de fom van den *radius* en van den *cofinus* van n maal den boog.

BEREIDING. Men verlenge de middellijn ZA en de choorden ZD, ZE, ZF enz.: men trekke op die verlengingen DM = DZ; EN = EZ; FO = FZ; GP = GZ enz.: dan zijn alle de driehoeken ZDM, ZEN, ZFO, ZGP, gelijkbeenig, onderling gelijkhoekig, en derhalve gelijkvormig, en ook gelijkvormig met driehoek DCZ.

Verder blijkt het dat Δ DAM = Δ EZD: Δ END = Δ EFZ

Δ FOE = Δ FGZ: waaruit volgt

AM = EZ; DN = FZ; EO = GZ enz.

en uit de gemelde gelijkvormigheid is

$$DC : DZ = DZ : ZM = ZA + AM = ZA + ZE$$
$$= EZ : ZN = ZD + DN = DZ + ZF$$
$$= FZ : ZO = ZE + EO = ZE + GZ$$

enz.

maar $ZD = 2\,cof.\left(\frac{fupp.\ boog\ DZ}{2}\right)$ Voorft. XV. =

$2\,cof.\ \frac{1}{2} \frown AD = 2\,cof. \frown AY$:

$ZE = 2\,cof.\ \frac{1}{2} \frown EDA = 2\,cof. \frown 2\,AY$

$ZF = 2\,cof.\ \frac{1}{2} \frown FEDA = 2\,cof.\ \frac{6}{2} \frown AY = 2\,cof. \frown 3\,AY$

$ZG = 2\,cof.\ \frac{1}{2} \frown GFEDYA = 2\,cof.\ \frac{8 \frown AY}{2} = 2\,cof.\,4 \frown AY$

enz.

en dus ftellende B voor $\frown$ AY.

$$\text{is } r : 2\,cof.\,B = cof.\,B : r + cof.\,2\,B$$
$$= cof.\,2\,B : r + cof.\,3\,B$$
$$= cof.\,3\,B : r + cof.\,4\,B$$

enz.

en in het algemeen

$$r : 2\,cof.\,B = cof.\,\overline{n - 1}.\,B : r + cof.\,n\,B.$$

I. AANMERKING. Uit het bewijs blijkt dat

$$DC : DZ = DZ : ZA + ZE : \text{of}$$
$$AZ : DZ = DZ : \frac{ZA + ZE}{2} : \text{d. i.}$$

„ Indien een hoek AZE, in den omtrek door de middellijn „ ZA en eene choorde ZE gevormd, door eene lijn ZD „ in twee gelijke deelen gedeeld wordt: ftaat de fnijden„ de lijn middelevenredig tusfchen de middellijn, en de „ halve fom van de middellijn en het ander been des ge„ geven hoeks."

GEVOLG.

Cos. n B = (2 *cos.* B *cos.* $\overline{(n-1)}$ B $- r^2$) : r en in het bijzonder *cos.* 2 B = (2 *cos.* B $- r^2$) : r = *cos.*^{2} B $-$ (r^2 $-$ *cos.*^{2} B) = *cos.*^{2} B $-$ *sin.*^{2} B. indien $r = 1$.

II. AANMERKING Het blijkt dan hoe gemakkelijk men, *cos.* B gegeven zijnde, de *cosinusſen* van 2 B, 3 B, 4 B enz. vinden kan, zonder de *sinusſen* van B, 2 B, 3 B enz. te kennen.

XXI. VOORSTEL. Fig. 175.

De *ſinus* [LN] van de ſom van twee hoeken of bogen [DL en DB], is gelijk aan de ſom der producten van den *ſinus* van ieder' boog gemultiplieeerd met den *coſinus* van den anderen, en gedivideerd door den *radius*: en de *ſinus* [TS] van het verſchil van twee bogen is gelijk aan het verſchil dier zelfde producten: d. i.

ſin. [B + C] = [*ſin.* B . *coſ.* C + *ſin.* C . *coſ.* B) : r

en

ſin. [B $-$ C] = [*ſin.* B . *coſ.* C $-$ *ſin.* C . *coſ.* B] : r.

St. VII. 5. — L. G. Tr. §. 19.

BEREIDING. Zij LM loodregt op CD: dan is LM de *ſinus*, CM de *coſinus* van boog LD, of ∠ LCD: zij insgelijks DI ⊥ CB, dan is DI *ſinus* en CI *coſinus* van boog DB of ∠ DCB: zij LN ⊥ CB, dan is LN = *ſinus* LB = *ſin* [LD + DB] en CN is = *coſ.* [LD + DB]: voorts LM verlengende tot de ontmoeting des cirkels, is MT = LM, en boog DT = boog LD, en dus is TB = boog [DB $-$ LD]. Stellende TU en PM loodregt op LN, en MO op CB; is TS = *ſin.* TB = UN = PN $-$ PU = PN $-$ PL; om dat PL = PU, want LP: PU = LM: MT: en LM = MT.

BEWIJS VOOR HET EERSTE. LN = PN + PL: men zoekt eerst de waarde van PL uit de gelijkvormige driehoeken PML en CDI: dan die van PN uit de gelijkvormige driehoeken MCO en CDI. En men verkrijgt LN = $\dfrac{\text{LM} \times \text{CI} + \text{DI} \times \text{CM}}{\text{CD}}$ waaruit het Voorſtel volgt.

VOOR HET TWEEDE. TS = UN = PN $-$ PL: waaruit het Voorſtel volgt.

I. GEVOLG.

De *ſinus* van een' dubbelden hoek is gelijk aan het dubbeld product van den *ſinus* door den *coſinus*, gedivideerd door den *radius*: dat is

ſin. 2 B = $\dfrac{2\ \textit{ſin.}\ \text{B} \times \textit{coſ.}\ \text{B}}{r}$

of, zoo $r = 1$, *ſin.* 2 B = 2 *ſin.* B × *coſ.* B.

AAN-

I. AANMERKING. Dit komt overeen met Voorstel XIX. Gevolg.

II. GEVOLG.

$Sin.\ B = 2\ \mathit{fin.}\ \frac{1}{2} B\ .\ \mathit{cof.}\ \frac{1}{2} B.$

CAGNOLI. §. 63.

III. GEVOLG.

$$Sin.\ (30 + a) = \tfrac{1}{2}\ \mathit{cof.}\ a + \tfrac{1}{2} \sqrt{3} \times \mathit{fin.}\ a.$$
$$Sin.\ (30 - a) = \tfrac{1}{2}\ \mathit{cof.}\ a - \tfrac{1}{2} \sqrt{3} \times \mathit{fin.}\ a.$$

Indien $r = 1$

en dus

$$\mathit{fin.}\ (30 + a) = \mathit{fin.}\ (30 - a) + \sqrt{3} \times \mathit{fin.}\ a.$$

BEWIJS. Uit Voorst. XVII. Gev. 3.

II. AANMERKING. Derhalve is de som van sin. *a* gemultipliceerd door $\sqrt{3}$ en van een' boog die *a* kleiner is dan 30°. gelijk aan den *finus* eens boogs die *a* grooter is dan 30°.

IV. GEVOLG.

$$Sin.\ (60 + a) = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\ \mathit{cof.}\ a + \tfrac{1}{2}\ \mathit{fin.}\ a$$
$$Sin.\ (60 - a) = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\ \mathit{cof.}\ a - \tfrac{1}{2}\ \mathit{fin.}\ a$$
$$Sin.\ (60 + a) = \mathit{fin.}\ (60 - a) + \mathit{fin.}\ a$$
$$Sin.\ (60 - a) = \mathit{fin.}\ (60 + a) - \mathit{fin.}\ a.$$

III. AANMERKING. Men kan derhalven uit den *finus* eens boogs die *a* grooter of kleiner is dan 60°, door additie den *finus* opmaken van een' boog die *a* kleiner of grooter is.

V. GEVOLG.

$$Sin.\ (60^\circ + a) \cdot \sqrt{3} - \mathit{fin.}\ (90^\circ - a) = \mathit{fin.}\ (30^\circ + a) = \mathit{fin.}\ (60 + a) \sqrt{3} - \mathit{cof.}\ a.$$

IV. AANMERKING. Men kan dan uit den *finus* eens boogs die *a* grooter is dan 30° den *finus* vinden des boogs die *a* grooter is dan 60° en omgekeerd.

VI. GEVOLG.

Indien boog C zeer klein is, is

$$\mathit{fin.}\ [B \pm C] = \mathit{fin.}\ B \pm C\ \mathit{cof.}\ B:$$

dat is: indien men twee bogen heeft die weinig van elkander verschillen, is de aanwas of de afneming van de *finusfen* ten naasten bij in de zelfde rede als de aanwas of de afneming der bogen.

XXII.

XXII. VOORSTEL. Fig. 173.

De *cosinus* [CN] van de ſom [LB] van twee hoeken, of bogen [LD, DB] is gelijk aan het verſchil van de producten der *cosinusſen* van beide de hoeken of bogen, en der *ſinusſen* van dezelven, gedivideerd door den *radius*: en de *cosinus* [CI] van het verſchil van twee hoeken of bogen is gelijk aan de ſom van die zelfde producten; dat is

$cos. (B + C) = (cos. B . cos. C - sin. B . sin. C) : r$
en $cos. (B - C) = (cos. B . cos. C + sin. B . sin. C) : r$

St. VII. 5. Gev. 2. — L. G. Tr. §. 19.

BEREIDING. Zij is de zelfde als voor het voorgaande Voorſtel: en daaruit volgt

$CN = CO - NO = CO - PM.$
en $CS = CO + OS = CO + XT = CO + UX = CO + PM.$

BEWIJS. Men zoekt eerst de waarde van CO door de gelijkvormige driehoeken CMO en CDI; en dan die van PM door de gelijkvormige driehoeken PLM en CDI: waaruit volgt

$$CN = \frac{CM \times CI - LM \times DI}{CD}$$

$$CS = \frac{CN \times CI + LM \times DI}{CD}$$: dat het Voorſtel is.

I. AANMERKING. Het blijkt uit het I. Gevolg der 4. Bepaling, waarom de *cosinus* van de ſom van twee bogen kleiner is dan de *cosinus* van hun verſchil.

I. GEVOLG.

De *cosinus* van eenen dubbelden hoek is gelijk aan het verſchil der vierkanten van den *ſinus* en van den *cosinus*, gedivideerd door den *radius*: dat is

$$cos. 2 B = \frac{\overline{cos. B}^2 - \overline{sin. B}^2}{r}.$$

L. G. Tr. §. 13.

II. AANMERKING. Dit komt overeen met Voorſt. XX. Gevolg.

II. GEVOLG.

Indien C zeer klein is: is $cos. (B \pm C) = cos. B \mp C + sin. B$: dat is, wanneer twee bogen weinig van elkander verſchillen, volgt de aanwas of vermindering der *cosinusſen* omtrent de zelfde rede als de aanwas of de vermindering der bogen zelven.

III. AANMERKING. Indien men in de formules van dit en van het voorgaande Voorſtel ſtelt C = 2 B; dan is

ſin.

$$fin. [B + 2 B] = fin. 3 B = \frac{fin. B \, cof. 2 B + fin \, 2 B \, cof. B}{r} =$$

$$\frac{fin. B \, [cof^2 B - fin^2 B] + 2 \, fin. B \, cof.^2 B}{r^2} =$$

$$\frac{fin. B \, cof.^2 B - fin^3 B + 2 \, fin. B \, cof.^2 B}{r^2} =$$

$$\frac{3 \, fin. B \, cof.^2 B - fin^3 B}{r^2} = fin. \, 3 B.$$

en men vindt insgelijks

$$cof. \, 3 B = \frac{cof.^3 B - 3 \, fin.^2 B \, cof. B}{r^2}$$

Indien men in deze formule voor *finus* 3 B, $r^2 - fin.^2 B$ ftelt voor $cof.^2 B$: verkrijgt men

$$fin. \, 3 B = 3 \, fin. B - \frac{4 \, fin.^3 B}{r^2}:$$

en indien men ftelt D = 3 B is

$$fin. D = 3 \, fin \, [\tfrac{1}{3} D] - \frac{4 \, fin.^3 [\tfrac{1}{3} D]}{r^2}.$$

IV. AANMERKING. Men kan op die zelfde wijze formules opmaken voor *fin.* 4 B, *fin.* 5 B, enz. (Zie L. G. Tr §. 34) te weten

$$fin. \, 4 B = \frac{4 \, fin. B \, cof.^3 B - 4 \, fin.^3 B \, cof. B}{r^2}:$$

$$cof. \, 4 B = \frac{cof.^4 B - 6 \, cof.^2 B + fin.^4 B.}{r^2}$$

En hieruit zoude men, zoo voortgaande, ras uit de wet, welke de leden dezer uitdrukking volgen, kunnen bemerken dat voor *fin.* n B en *cof.* n B deze algemeene *formules* plaats hebben.

$$fin. \, n B = n \, cof.^{n-1} B \, fin. B - \frac{n \, . \, n-1 \, n-2}{1. \, 2. \, 3} \times$$

$$cof.^{n-3} B \, fin.^3 B + \frac{n \, . \, n-1 \, n-2 \, n-3 \, n-4}{1. \, 2. \, 3. \, 4 \quad 5} cof.^{n-5} B \, fin.^5 B$$

$-$ enz.

en

$$cof. \, n B = cof.^n B - \frac{n \, . \, n-1}{2} cof.^{n-2} B \, fin.^2 B +$$

$\frac{n \, . \, n-1. \, n \quad 2. \, n-3}{1. \, 2 \, 3. \, 4} cof.^{n-4} B \, fin.^4 B$ — enz. welke formules ook uit andere gronden kunnen bewezen worden: zij zijn bij zeer vele Schrijvers te vinden: onder andere bij EULER *Introd. in Anal. Infinitor.* I. §. 133: CAGNOLI §. 117. — §. 124. DE GELDER, *Handleiding* §. 1057 en §. 1059.

V. AANMERKING. Indien men deze formule van *fin.* 3 B, *cof.* 3 B, of *fin.* n B, *cof.* n B; vergelijkt met die, welke in Voorftel XIX en XX. zijn opgegeven, blijkt het hoe veel deze laatfte, voor het berekenen der *finusfen*, of *cofinusfen*, van 2 B, 3 B, 4 B, enz. van

de Trigonométrie, p. 4—12: die deze zaak uitmuntend behandeld heeft.

III. AANMERKING. PTOLOMAEUS is de eerste Schrijver, welke ons de eigenschappen der choorden op die wijze heeft doen kennen, en Tafels van choorden berekend heeft, van halve tot halve graden, beginnende met 30′ en eindigende met 180°. Hij verdeelde den *radius*, volgens de gewoonte van dien tijd, in 60 deelen: en ieder dezer deelen wederom in 60, en altijd zoo voort volgens de *sexagesimale* verdeeling. DE LAMBRE heeft de berekeningen van PTOLOMAEUS zeer naauwkeurig bevonden. Men gebruikte de choorden en derzelver Tafels toen de *sinussen* en *tangenten* nog niet bekend waren. Nu gebruikt men alleen deze, welke aan de Grieken onbekend waren: het zal uit het XV. Voorstel blijken dat men de *sinus'en* uit de choorden, en wederkerig deze uit gene kan opmaken.

III. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER SINUSSEN EN SINUS VERSUS.

XV. VOORSTEL. Fig. 172.

De *sinus* [DI] van eenen boog [BD] is de helft van de choorde [DK] eens dubbelden boogs [DBK]: en de choorde eens boogs is tweemaal de *cosinus* van het halve supplement.

TACQUET *Trigon. Lemma.* p. 335. — L. G. *Trigon.* §. 15.

BEWIJS. VOOR HET I. Uit V. 6. en de derde Bepaling.

VOOR HET II. Uit het I. is choorde B $=$ 2 *sin.* $\frac{1}{2}$ B $=$ 2 *cos.* $(90^\circ - \frac{1}{2}\text{B}) = 2$ *cos.* $\left(\frac{180 - \text{B}}{2}\right) = 2$ *cos.* halve *supplement* B.

I. GEVOLG.

Men kan dan de *sinussen* uit de choorden, en omgekeerd, de choorden uit de *sinussen* opmaken.

II. GEVOLG.

De *sinus* van den hoek, of boog, van 30°, en derhalve ook de *cosinus* van den hoek, of boog, van 60°, is de helft van den *radius*, of van den *sinus* van 90° (Bep. 3. Gev. 2.) d. i. van het vierde gedeelte des omtreks.

St. VII. 2.

AANMERKING. Hierop steunen, op de *proportionaal-passers*, en

en ook op de pleinſchalen, de lijnen welke den naam van *ſinus* dragen, of met eene groote S beſtempeld zijn. Zij dienen om de hoeken door middel van den *ſinus* te beſchrijven: of den *ſinus* voor eenen gegeven hoek, en voor eenen bepaalden *radius*, optemaken.

III. GEVOLG.

De zijde van een' veelhoek in den cirkel beſchreven, is het dubbeld van den *ſinus* des halven middelpuntshoeks: zoo dat men die zijden zeer gemakkelijk vinden kan, wanneer de *ſinusſen* van alle bogen met genoegzame naauwkeurigheid berekend zijn.

XVI. VOORSTEL.

De *ſinus* van een' grooteren boog heeft tot dien van een kleineren boog eene kleinere rede dan de grootſte boog tot den kleinſten.

BEWIJS. Zij A de grootſte boog, en a de kleinſte: dan is (Voorſt. XV.) *ſin.* A $=\frac{1}{2}$ choorde 2 A, en ſin. $a=\frac{1}{2}$ choorde 2 a. Maar choorde 2 A: choorde 2 a < 2 A: 2 a < A : a (Voorſt. XI): dus *ſin.* A : *ſin.* a < A : a.

GEVOLG.

De *ſinusſen* groeijen aan, of nemen af, in kleinere rede dan de bogen tot welke zij behooren: naar mate de bogen grooter zijn, wordt het verſchil grooter: doch het is voor zeer kleine bogen onmerkbaar.

XVII. VOORSTEL. Fig. 172.

De ſom der vierkanten van den *ſinus* en van den *coſinus* eens boogs, is gelijk aan het vierkant van den *radius*: dat is.

$$r^2 = \overline{ſin.}^2 + \overline{coſ.}^2.$$

L. G. Tr. §. 16.

BEWIJS. Uit II. 16.

I. GEVOLG.

Wanneer de *radius* en de *ſinus*, of de *coſinus*, gegeven zijn, vindt men gemakkelijk den *coſinus* of den *ſinus*: want

$$\overline{ſin.}^2 = r^2 - \overline{coſ.}^2 = (r + coſ.)\,(r - coſ.)$$
$$\overline{coſ.}^2 = r^2 - \overline{ſin.}^2 = (r + ſin.)\,(r - ſin.).$$

TACQUET *Trigon. Porism.* 1. — St. VII. 3.

II. GEVOLG.

$$Sin.^2\ 45^\circ + cos.^2\ 45^\circ = 2\ sin.^2\ 45^\circ = 2\ cos.^2\ 45^\circ = r^2$$ en

$$sin.\ 45^\circ = cos.\ 45^\circ = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

III. GEVOLG.

$$Sin.\ 60^\circ = cos.\ 30^\circ = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

BEWIJS. $Sin.^2\ 60 + sin.^2\ 30^\circ = r^2$
of $sin.^2\ 60 + \frac{r^2}{4} = r^2$ (Voorst. XV. Gev. 2.)
of $sin.^2\ 60 = \frac{3}{4}r^2$: en $sin.\ 60^\circ = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$.

AANMERKING. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ komen dikwerf in berekeningen te pas: wij zullen ze om die reden hier bijvoegen.

$$\sqrt{2} = 1.41421356$$
$$\sqrt{3} = 1.73205081$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70710678$$

XVIII. VOORSTEL. Fig. 173.

De *sinus* [LM] van de helft van een' boog is gelijk aan den wortel uit het halve product van den *radius* en den *sinus versus*: of aan de helft van den wortel uit de som van de vierkanten van den *sinus* en den *sinus versus*: doch de *cosinus* [CM] van de helft van een' boog is gelijk aan den wortel uit het halve product van den *radius* en den *sinus versus* van het supplement: dat is

$$sin.\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{1}{2}r \times sin.\ v.\ B} = \sqrt{\tfrac{1}{2}r\,(1 - cos.\ B)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{sin.\ B^2 + sin.\ v.\ B^2}:$$

en

$$cos.\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\tfrac{1}{2}r \times sin.\ v.\ supp.\ B} = \sqrt{\left(\frac{r + cos.\ B}{2}\right) r}.$$

St. VII. 4. Gev. 1. — L. G. Tr. §. 20.

BEWIJS. VOOR HET EERSTE. Uit de gelijkvormige driehoeken ABL, en LBN, en de opmerking dat LM = $\frac{1}{2}$ LB.

VOOR HET II. Uit II. 16. op den driehoek LBN toegepast.

VOOR

VOOR HET III. Uit de beſchouwing dat $cos. = \sqrt{r^2 - sin.^2}$ en voorts uit het I.

GEVOLG.

$Sin.^2 (\frac{1}{2} B) \times cos.^2 (\frac{1}{2} B) = \frac{1}{4} r^2 \times sin.\ v.\ B.\ sin.\ v.\ supp.\ B =$ (Bep. 5. Gev.) $\frac{r^2}{4} (1 - cos.\ B) (1 + cos.\ B) = \frac{r^2}{4} (1 - cos.^2\ B) = \frac{r^2\ sin.^2\ B}{4}$ en dus $sin.\ v.\ B = \frac{sin.^2\ B}{sin.\ v.\ supp.\ B}$.

AANMERKING. Zie andere uitdrukkingen van den *ſinus verſus*, Bep. V. Gev. en Voorſt. XXIII.

XIX. VOORSTEL. Fig. 174.

Indien men op den omtrek eens cirkels eenen bepaalden boog [AY] aanneemt, vervolgens den dubbelden boog [AD] en bogen [DE, EF, FG, GH] ieder gelijk aan dien dubbelden boog [AD]; zal de *radius* ſtaan tot tweemalen den *coſinus* van dien boog, als de *ſinus* van dien boog tot den *ſinus* van den dubbelden boog: als de *ſinus* van den dubbelden boog tot de ſom der *ſinusſen* van den drievoudigen boog en van den enkelden: als de *ſinus* van den drievoudigen boog tot de ſom der *ſinusſen* van den viervoudigen en van den dubbelden: in één woord als de *ſinus* van den $\overline{n - 1}$ boog tot de ſom der *ſinusſen* van den *n.* boog en van den $n - 2$ boog.

BEREIDING. Zij AY de boog, ACZ de middellijn: neem YD = AY; DE = EF = FG = GH = AD. Trek de choorden AY, AD, AE, AF, AG, AH: en ZD, ZE, ZF, ZG: verleng AF, AG, AH, enz.: maak EI = AE: FK = AF: GL = AG enz.

BEWIJS. ∠ DAE = ∠ EAF = ∠ FAG = ∠ GAH enz. en uit II. 27. ∠ I = ∠ EAI: ∠ K = ∠ FAG: ∠ L = ∠ HAG: zoo dat alle de △△ ADE, AEI, AFK, AGL gelijkbeenig, en boven dien onderling gelijkhoekig, en derhalve gelijkvormig zijn, en met △ DZC: om dat ∠ DZC, of ∠ DZA = ∠ DAE = ∠ CDZ. Verder △ EFI = △ ADE; △ FGK = △ EAF; △ GHL = △ FAG: en derhalve FI = DE, GK = AE, HL = AF enz. derhalve

DC: DZ = AD: AE

= AE: AI = AF + FI = AF + AD =

$= AF : AK = AG + GK = AG + AE$
$= AG : AL = AH + HL = AH + AF.$
enz.

Maar $DZ = 2\ cos.\ \tfrac{1}{2} \frown AD = 2\ cos. \frown AY$ (Voorst. XV.)
$AD = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2} \frown AD = 2\ sin. \frown AY$
$AE = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2} \frown AE = 2\ sin. \frown AD = 2\ sin\ 2 \frown AY$
$AF = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2} \frown ADEF = 2\ sin.\ \tfrac{3}{2} \frown AD = 2\ sin.\ 3 \frown AY$
$AG = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2} \frown AEFG = 2\ sin.\ \tfrac{4}{2} \frown AD = 2\ sin. 4 \frown AY$
$AH = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2} \frown AEFGH = 2\ sin.\ \tfrac{5}{2} \frown AD = 2\ sin.\ 5 \frown AY;$
enz.

Dat is, stellende B voor $\frown AY$,
$r : 2\ cos.\ B = sin.\ B : sin.\ 2\ B$
$= sin.\ 2\ B : sin.\ 3\ B + sin.\ B$
$= sin.\ 3\ B : sin.\ 4\ B + sin.\ 2\ B$
$= sin.\ 4\ B : sin\ 5\ B + sin.\ 3\ B$ enz.
$= sin.\ (n-1)\ B : sin.\ n\ B + sin.\ (n-2)\ B.$

I. AANMERKING. Dit Voorstel, doch op de choorden toegepast, is reeds in 1633 gebruikt door GELLIBRAND *Trigon. Britannica*, Cap. II. *Lemma.* Daar na, even als het volgende, door anderen, als door SHARP, *Method of Constr. the natur. sines*, prop. 3. te vinden in de *Mathematical Tables* van SHERWIN; door B. MARTIN, *Trigonometer's Guide*, *Theorem.* XXVI, XXVII. ROBERTSON, *Elem. of Navig.*, Boek III. prop. 4.

II. AANMERKING. Het bewijs van dit Voorstel, te weten $AD : AE = AE : AF + AD$ geeft deze belangrijke eigenschap des cirkels. „ Indien een hoek DAF in den omtrek, door „ eene lijn AE in twee gelijke deelen gesneden wordt: is „ die lijn middelevenredig tusschen het kleinste been en „ de som der twee beenen.

GEVOLG.

In het algemeen
$sin.\ n\ B = 2\ cos\ B\ sin.\ (n-1)\ B - sin.\ (n-2)\ B$
stellende den *radius* $r = 1$:
en in het bijzonder
$sin.\ 2\ B = 2\ sin.\ B\ cos.\ B.$

III. AANMERKING. Men ziet hieruit hoe gemakkelijk het valt om, *sin.* B en *cos.* B bekend zijnde, achtervolgens de *sinusſen* van 2 B, 3 B, 4 B, enz. te berekenen, zonder de *cosinusſen* van die zelfde bogen te kennen.

XX. VOORSTEL. Fig. 174.

In de zelfde onderstellingen als bij het voorgaande Voorstel;

ſtel: ſtaat de *radius* tot den dubbelden *coſinus* van den gegeven boog, als twee malen de *coſinus* tot de ſom van den *radius* en van den *coſinus* des dubbelden boogs: als de *coſinus* van den dubbelden boog tot de ſom van den *radius* en den *coſinus* van den drievoudigen boog: als de *coſinus* van den drievoudigen boog tot de ſom van den *radius* en van den *coſinus* van den viervoudigen boog: enz. in één woord, de *radius* ſtaat tot den dubbelden *coſinus* eens boogs, als de *coſinus* van $(n - 1)$ maal den boog n, tot de ſom van den *radius* en van den *coſinus* van n maal den boog.

BEREIDING. Men verlenge de middellijn ZA en de choorden ZD, ZE, ZF enz.: men trekke op die verlengingen DM = DZ; EN = EZ; FO = FZ; GP = GZ enz.: dan zijn alle de driehoeken ZDM, ZEN, ZFO, ZGP, gelijkbeenig, onderling gelijkhoekig, en derhalve gelijkvormig, en ook gelijkvormig met driehoek DCZ.

Verder blijkt het dat Δ DAM = Δ EZD: Δ END = Δ EFZ
Δ FOE = Δ FGZ: waaruit volgt
AM = EZ; DN = FZ; EO = GZ enz.
en uit de gemelde gelijkvormigheid is

$$DC : DZ = DZ : ZM = ZA + AM = ZA + ZE$$
$$= EZ : ZN = ZD + DN = DZ + ZF$$
$$= FZ : ZO = ZE + EO = ZE + GZ$$

enz.

maar $ZD = 2\ cos. \left(\frac{supp.\ boog\ DZ}{2}\right)$ Voorſt. XV. =

$2\ cos.\ \frac{1}{2} \frown AD = 2\ cos. \frown AY$:

$ZE = 2\ cos.\ \frac{1}{2} \frown EDA = 2\ cos. \frown 2\ AY$

$ZF = 2\ cos.\ \frac{1}{2} \frown FEDA = 2\ cos.\ \frac{6}{2} \frown AY = 2\ cos. \frown 3\ AY$

$ZG = 2\ cos.\ \frac{1}{2} \frown GFEDYA = 2\ cos.\ \frac{8 \frown AY}{2} = 2\ cos. 4 \frown AY$

enz.

en dus ſtellende B voor $\frown$ AY.

$$\text{is } r : 2\ cos.\ B = cos.\ B : r + cos.\ 2\ B$$
$$= cos.\ 2\ B : r + cos.\ 3\ B$$
$$= cos.\ 3\ B : r + cos.\ 4\ B$$

enz.

en in het algemeen

$$r : 2\ cos.\ B = cos.\ \overline{n - 1}.\ B : r + cos.\ n\ B.$$

I. AANMERKING. Uit het bewijs blijkt dat

$$DC : DZ = DZ : ZA + ZE : \text{of}$$
$$AZ : DZ = DZ : \frac{ZA + ZE}{2} : \text{d. i.}$$

„ Indien een hoek AZE, in den omtrek door de middellijn
„ ZA en eene choorde ZE gevormd, door eene lijn ZD
„ in twee gelijke deelen gedeeld wordt: ſtaat de ſnijden-
„ de lijn middelevenredig tusſchen de middellijn, en de
„ halve ſom van de middellijn en het ander been des ge-
„ geven hoeks."

GEVOLG.

De *tangenten* groeijen in grooter rede aan dan de bogen, en des te grooter dat de bogen grooter worden.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 177.

Het verschil der vierkanten van den *radius*, en van den *tangent* eens boogs staat tot het dubbelde vierkant van den *radius*, als de *tangent* des boogs tot den *tangent* des dubbelden boogs.

BEREIDING. BH de boog: BHD de dubbelde boog. Trek BF ⊥ op AB: AC, ADF, DB, en uit C, CI ⊥ op AC en dus // ED. Dan is DE = EB; of DB = 2 DE.

BEWIJS. Om dat Δ ABC ∼ Δ ABE is $\overline{AB}^2 = AC \times AE$ en $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AC . AE : \overline{AC}^2 = AE : AC = ED : CI$. Maar
$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 = BD : DE$: dus *ex aequo*.
$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CI = BF : FC$ of
$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = BF : FC$: *dividendo*.
$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : 2\,\overline{AB}^2 = BF - FC : BF$
d. i. $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : 2\,\overline{AB}^2 = BC : BF$.

GEVOLG.

$$BF = \frac{2\,\overline{AB}^2 . BC}{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} : \text{d. i.}$$

$$tang.\ 2\,B = \frac{2\,r^2\ tang.\ B}{r^2 - (tang.)^2\ B}.$$

I. AANMERKING. Dit Voorstel is het beroemd Voorstel van JOHN PELL; en het Bewijs is dat, het welk CAVALLIERI daarvan gegeven heeft. Zie *Controversia de Circuli Mensura*, p. 13. en 60.

II. AANMERKING. Men kan dit Voorstel ook zonder de leer der gelijkvormige driehoeken bewijzen:
AF : AB = CF : BC: en $\overline{AF}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CF}^2 : \overline{BC}^2$ of (II 16.)
$\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CF}^2 : \overline{BC}^2 = (BF - BC)^2 : \overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC.\,BF : BC^2$: *dividendo*-en *alternando*.
$2\,BC . BF : \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$: derhalve
$2\,BC : BF = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$: en.

$$BF = \frac{2\,\overline{AB}^2 . BC}{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} : \text{of } tang.\ 2\,B = \frac{2\,r^2\ tang\ B}{r^2 - (tang.\,B)^2}.$$

Dit Bewijs is van LAGNY in zijne schoone Verhandeling over de *tangenten* der veelvouden van hoeken: *Mem. de l'Acad.* 1705. p. 254.

III.

III. AANMERKING. Men kan ook uit de Voorftellen XXI en XXII. het zelfde opmaken: want $tang.\ 2\,B = \frac{fin.\ 2\,B}{cof.\ 2\,B} = \frac{2\,fin\ B\ .\ cof.\ B}{cof.^2 B - fin.^2 B} =$

$$\frac{2}{\frac{cof.\ B}{fin.\ B} - \frac{fin.\ B}{cof.\ B}} = \frac{2\,r^2}{cot.\ B - tang.\ B} = \frac{2\,r^2}{\frac{r^2}{tang.\ B} - tang.\ B} = \frac{2\,r^2\ tang.\ B}{r^2 - tang.^2\ B}.$$

IV. AANMERKING. Indien men zelfs de *formules* voor $fin.\ 3\,B$, $fin.\ 4\,B$, $fin\ 5\,B \ldots\ldots fin.\ n\,B$. en voor $cof.\ 3\,B$, $cof.\ 4\,B$, $cof.\ 5\,B \ldots$ $cof.\ n\,B$ aldaar opgegeven, door elkander divideert: zoude men formules voor $tang.\ 3\,B$, $tang.\ 4\,B$, $tang.\ 5\,B \ldots\ldots tang.\ n\,B$ kunnen opmaken: doch wij oordeelen het onnoodig dezelve hier intelasfchen: om dat ze tot het berekenen der Tafels van *tangenten* niet gebruikt worden: en eigenlijk meer tot de Stelkunde dan tot de Meetkunde behooren.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 144.

De fom der *Sinusfen* van alle de bogen in den halven cirkel, te beginnen van een' bepaalden boog af, en altijd met den zelfden opklimmende, is gelijk aan den *cotangens* van de helft diens boogs, gemultipliceerd door den *radius*.

BEWIJS. Zij AB die boog; men noeme den zelven B.
Dan is $AB : BE = AE : 2\,(BK + CM + DO)$ (VI. 15.).
Maar $2\,(BK + CM + DO)$ is de fom van alle de *finusfen* BK, KH, CM, MG, DO, OF in den geheelen cirkel: dus *choorde* B : *choorde fup.* B = r : fom van alle de *finusfen*, tot 180°. (VI. 16. Gevolg)

derhalve

$$\text{fom van de } \textit{finusfen} \text{ tot } 180^\circ = \frac{r \times choorde\ fup.\ B}{choorde\ B}$$
$$= \frac{r \times \frac{1}{2}\ choorde\ fup.\ B}{\frac{1}{2}\ choorde\ B} = \frac{r \times fin.\ \frac{1}{2}\ fup.\ B}{fin.\ \frac{1}{2}\ B} =$$
$$= \frac{r \times cof.\ \frac{1}{2}\ B}{fin.\ \frac{1}{2}\ B} = r \times cot.\ \tfrac{1}{2}\ B = r \times tang.\ comp.\ \tfrac{1}{2}\ B.$$

Indien dus $B = 1^\circ$; zijn alle de *finusfen*, van graad tot graad genomen, te famen $= r \times tang.\ 89\tfrac{1}{2}^\circ = 114{,}5886$, indien de *radius* 1. gefteld wordt.

Zie VIETA, *Operum* p. 375. en KRAFFT, *Geometria fublimior*. §. 100.

V. EIGENSCHAPPEN EN BEREKENING DER SECANTEN.

XXX. VOORSTEL. Fig. 178.

De *secant* eens boogs is de som van den *tangent* des boogs en van den *tangent* van deszelfs halve *complement*.

BEWIJS. $\angle E = 90^\circ - \angle ECB$. Zij $\angle BCF = \frac{1}{2} \angle E = \frac{1}{2} [90^\circ - \angle ECB]$; dan is $\angle ECF = \angle ECB + \angle BCF = \angle ECB + \frac{90^\circ}{2} - \frac{1}{2} \angle ECB = \frac{90^\circ - \angle ECB}{2}$.

Maar $\angle CFB = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - \frac{1}{2} (90^\circ - \angle ECB) = \frac{90^\circ - \angle ECB}{2} = \angle ECF$: derhalve $EC = EF = EB + BF = tang. \angle ECB + tang. \angle BCF = tang. \angle ECB + tang. \frac{1}{2} comp. \angle ECB$.

GELLIBRAND *Trigon. Britan.* Cap. XVII. pr. 6.

GEVOLG.

De *secanten* kunnen derhalve opgemaakt worden uit eene enkele optelling van *tangenten*.

XXXI. VOORSTEL. Fig. 172.

De *secant* CE is gelijk aan den wortel uit de som der vierkanten van den *tangent* en van den *radius*: ook gelijk aan het vierkant van den *radius* gedivideerd door den *cosinus*: ook gelijk aan het product van den *tangent* gemultipliceerd door den *radius*, en gedivideerd door den *sinus*: en de *cosecant* is gelijk aan den wortel uit de som der vierkanten van den *radius* en den *cotangent*: ook gelijk aan het vierkant van den *radius* gedivideerd door den *sinus*: ook gelijk aan het product van *cotangent*, gemultipliceerd door den *radius*, en gedivideerd door den *cosinus*: dat is

$$sec. = \sqrt{R^2 + tang.^2} = \frac{r^2}{cosin.} = \frac{r \times tang.}{sin.}$$

$$cosec. = \sqrt{R^2 + cot.^2} = \frac{r^2}{sin.} = \frac{r \times cot.}{cosin.}$$

St. VII. 8. — L. G. Trig. §. 17, 18.

BEWIJS. VOOR HET I. N°. 1. uit II. 16. toegepast op △ CEB: voor N°. 2. en N°. 3. uit de gelijkvormige driehoeken EDI en CEB.

VOOR HET II. N°. 1., uit II. 16. toegepast op △ GCF: voor N°. 2. en N°. 3. uit de gelijkvormige driehoeken CGF en CHD.

I. GEVOLG.

De *ſecanten* zijn in omgekeerde rede van de *coſinusſen*: de *coſecanten* in die van de *ſinusſen*: en omgekeerd; dat is

$$sec. = \frac{1}{cos.};\ cosec. = \frac{1}{sin.};\ cos. = \frac{1}{sec.};\ sin. = \frac{1}{cosec.}$$

L. G. Tr. § 17.

II. GEVOLG.

Het komt dus op het zelfde uit, door den *ſecant* te multipliceren of door den *coſinus* te divideren, en door den *ſecant* te divideren of door den *coſinus* te multipliceren: of, wanneer men door de Logarithmen werkt, den *Logarithmus-ſecant* aftetrekken, of den *Logarithmus coſinus* bijtetellen; en den *Logarithmus-ſecant* bijtetellen of den *Logarithmus-coſinus* aftetrekken.

III. GEVOLG.

De *Logarithmus - ſecant* is het arithmetisch complement van den *Logarithmus coſinus*; en de *Logarithmus-coſecant* is het arithmetisch complement van den *Logarithmus-ſinus* (III. 36. Gev. 3.).

IV. GEVOLG.

Hieruit volgt, dat de Tafels van *Logarithmus - ſecanten* en *coſecanten* gemakkelijk te berekenen zijn als men die van *Logarithmus - ſinusſen* en *coſinusſen* berekend heeft: doch het blijkt tevens, dat zij onnuttig zijn: om dat men in derzelver plaats de *Logarithmus-ſinusſen* en *coſinusſen* gebruiken kan: waarom zij ook in de beste Tafels van GARDINER en CALLET weggelaten zijn.

V. GEVOLG.

$$Sec.\ 60° = 2\ r.$$

BEWIJS. $Sec.\ 60°. = \frac{r^2}{cos.\ 60°} = \frac{r^2}{sin.\ 30°} = \frac{r^2}{\frac{1}{2}r} = 2\ r.$

I. AANMERKING. Hieruit valt het IV. Gevolg van het XXV. Voorstel gemakkelijk te bewijzen: want indien Fig. 177. ∠ DAB = 60° en ∠ CAB = 30°: is ∠ FAC = ∠ CAB: en derhalve FC: CB = AF: AB = 2:1. (IV, 12.) derhalve FC = 2 CB: en FB = 3 CB.

II. AANMERKING. Er is op sommige *pleinschalen*, en op alle de *proportionaal-passers* eene lijn van *secanten*, welke op deze met eene kleine *s* bestempeld is. Daar alle de *secanten* grooter zijn dan de *radius*, en het op den *proportionaal-passer* noodzakelijk is den *radius* te kennen; begint aldaar de lijn der *secanten* niet in het *middelpunt* des passers, maar op eenigen afstand daar van: zoo dat de afstand die er is op de lijn der *secanten* tusschen het middelpunt en de o, de *radius* is des cirkels tot welken de lijn der *secanten* op den *proportionaal-passer*, behoort: en men, den passer geopend hebbende, den *radius* des cirkels, welken men bedoelt, moet nemen op de beide bladen van o tot o in de lijnen der *secanten*.

III. AFDEELING.

OVER DE SINUS-TAFELS EN DE GONIOMETRISCHE SCHALEN.

I. OVER SINUS-TAFELS.

Ik ben in mijne lessen gewoon, alhier, de samenstelling en het gebruik der *Sinus-Tafels* uitteleggen: en in die uitlegging te letten op de volgende stukken.

1°. Op die Tafels zelve, waarin, vóór de ontdekking der *Logarithmen*, alléén de *natuurlijke*, of gelijk onze zeelieden gewoon zijn zich uittedrukken, de *slecht sinussen*, *tangenten* en *secanten* te vinden waren: terwijl, zederd die gewigtige ontdekking, er Tafels zijn, enkel van *natuurlijke sinussen*, *tangenten* en *secanten*: andere waarin de *natuurlijke*, en naast dezelve de *Logarithmus-sinussen*, *tangenten* en *secanten* staan: andere eindelijk die alleen de Logarithmen van die *Goniometrische* getallen bevatten.

2°. Op de schikking zelve der getallen in die Tafels: waarin, boven aan de bladzijde de graad staat, en in de eerste kolom de minuten, gaandè van boven tot beneden, van o tot 60, of tot 30, naar mate er tot éénen graad, maar eene bladzijde, of wel twee bladzijden gebruikt worden: terwijl die

die graden niet hooger loopen dan tot 45. Onder aan de bladzijde, staan de graden, welke het *complement* van de getallen die boven aan zijn, uitmaken, en in de laatste kolom, aan de regterhand de minuten, opklimmende van beneden naar boven: waardoor de getallen welke *sinusſen*, *tangenten*, of *secanten* zijn voor de eerste 45 gr. voor de overige worden *cosinusſen*, *cotangenten*, of *cosecanten*: en die welke voor deze *sinusſen*, *tangenten* of *secanten* zijn, voor de eerste *cosinusſen*, *cotangenten* of *cosecanten* worden: en aldus *sinus* bijv. en *cosinus* van eenigen graad en minuut op de zelfde horizontale lijn staan, als de *cosinus* en *sinus* voor den graad en de minuut die het *complement* uitmaken van den gegeven, en dus van beneden naar boven gezocht worden.

3°. Dat de *Logarithmus-Sinus*, *tangent* of *secant* niets anders is dan de gewone *Logarithmus* van het getal dat den natuurlijken *sinus*, *tangent* of *secant* uitdrukt: welverstaande echter, dat zoo het *character* van den *Logarithmus-Sinus* van 90 gr., of van den *radius*, 10 is, dit onderstelt dat de *radius* zelve uit 11 cijfferletters zonde bestaan: daar, voor de natuurlijke *sinusſen*, enz. de *radius* maar op 10,000,000 gesteld is, en derhalve slechts uit 8 letters bestaat. Beter ware het dat, gelijk in de Tafels van CALLET, het *character* van den *Logarithmus-radius* 0 ware in plaats van 10; en dus dat alle de Logarithmen der *sinusſen*, gelijk mede die der *tangenten* beneden 45°, voor decimale breuken moesten gehouden worden, met het behoorlijk *character*, 9, 8, 7 enz. voorzien (zie bl. 153, N°. II. van het Berigt): het geen het best met den waren aard der *sinusſen*, enz. overeenkomt.

4°. Dat er een middel is om, met genoegsame naauwkeurigheid, den *sinus*, *tangent* of *secant* te vinden van eenigen boog, die niet in de Tafel staat; en omgekeerd: dat is van bogen met *seconden* uitgedrukt, al gaan de Tafels maar van *minuut* tot *minuut*. Dat middel bestaat in eenen eenvoudigen regel van drieën, gevestigd op het 6. Gevolg van ons XXI. Voorstel, zeggende, indien men bij voorbeeld den *sinus* van 54° 12′. 8″ zoekt; 1′ of 60″, verschil tusschen 54°. 12′. en 54°. 13′, staat tot het verschil der *sinusſen* van 54°. 12′ en 54°. 13′, als het getal *seconden* boven de 54°. 12′, (dat is 8″) tot eene vierde evenredige; die, gevoegd bij den *sinus* van 54°. 12′, den *sinus* geeft van 54°. 12′. 8″. De zelfde regel dient voor *tangenten* en *secanten*, en voor de Logarithmen van alle die lijnen: alleen moet men hierop letten, dat wanneer men het zelfde voor *cosinusſen*, *cotangenten* en *cosecanten* zoekt, men de gevonden vierde evenredige van het getal dat in de Tafel staat moet aftrekken, om dat die lijnen kleiner worden als de boog aangroeit.

5°. Dat wanneer men, een *sinus* enz. gegeven zijnde, den

boog zoekt waartoe hij behoort, de regel om dien boog ook met *seconden* uittedrukken, het omgekeerde is der voorgaande; te weten, verschil van de twee *sinussen* in de Tafel tusschen welke de gegeven *sinus* invalt, tot het verschil van den gegeven en den kleinsten, als 60″ tot eene vierde evenredige; welke bij den kleinsten boog gevoegd, het gevraagde geeft. Men trekt af, zoo het een *cosinus*, *cotangent*, of *cosecant* is, die gegeven zijn.

6°. Dat het getal 1′, of 60″, het welk in die beide regels voorkomt, alleen gebruikt wordt, om dat men Tafels onderstelt die slechts van 1′ tot 1′ of van 60″ tot 60″ gaan: maar dat men als zij, gelijk die van CALLET, gaan van 10″ tot 10″; als dan moet nemen 10″, het verschil tusschen twee bogen in de Tafel, in plaats van 60″.

7°. Dat de beide regels genoegzaam naauwkeurig zijn voor bogen waarvan de *sinussen* enz. zeer weinig verschillen: maar niet wanneer het verschil groot is; om dat als dan de onderstelling waarop die regel gevestigd is, te weten dat de Goniometrische lijnen in dezelfde rede toe- of afnemen als de bogen, niet doorgaat: en derhalve, dat die regel niet geldt wat de *sinussen*, *tangenten*, *secanten* betreft, voor de vijf eerste graden; noch voor de vijf laatste, wat de *cosinussen*, *cotangen*, *cosecanten* aangaat. Waarom dan ook in de Tafels van CALLET, die gelijk gezegd is, van 10″ tot 10″ gaan, voor de 5 eerste graden de *sinussen* van graad tot graad, opgegeven worden.

II. OVER DE GUNTER'S- OF LOGARITHMEN-SCHAAL.

1°. Men heeft, gelijk wij reeds gezegd hebben, schalen vervaardigd, waarop de *choorden*, *sinussen*, *tangenten*, *secanten* van alle bogen gesneden zijn, voor eenen bijzonderen *radius*: wij hebben ze alle in dit Boek uitgelegd, te weten die der *choorden* Voorstel XII. Aanm. 2, 3, 4; die der *tangenten* Voorst. XXIV. Aanm. 2, 3; die der *secanten*, Voorst. XXXI. Aanm. 2. Maar er is ook eene schaal, die naar den uitvinder, GUNTER's (*) schaal, of *logarithmen-schaal*, genoemd wordt: waarop de *Logarithmen* der getallen, der *sinussen* en der *tangenten* gevonden worden. Men treft deze schaal aan, of op pleinschalen, of ook wel op den *proportionaal-passer* gesneden. Men vindt ze op dezen, als de beide bladen geopend, en in ééne regte lijn uitgestrekt zijn.

2°.

(*) EDMUND GUNTER, Hoogleeraar te Londen, een beroemd Wiskundige, in 1626. overleden.

2°. De GUNTER's fchaal bestaat uit vier lijnen. De eerste met de letter *n* bestempeld, is de lijn der Logarithmen van de getallen: de tweede, *s* geteekend, is die van de Logarithmen der *finusfen*: en de derde, gemerkt *t*, is die van de logarithmen der *tangenten*. Somtijds is er nog eene vierde (*s. v.*) voor den *finus verfus*.

Op de eerste ftaan de Logarithmen van alle de getallen: zoo immers de eerste 2 voor 2 genomen wordt, is de eerste 9, het getal negen: de eerste 10 het getal 10, en zoo voorts. Maar zoo de eerste 2, voor 20 aangezien wordt, zal de eerste 10 honderd aanduiden, en 70 zevenhonderd: enz. en zoo de eerste 2, tweehonderd aanduidt, is de eerste 10, duizend, en 70, is 7000 enz.

3°. Iedere dezer lijnen wordt afzonderlijk en op zich zelve gebruikt: of wel die der *finusfen*, en *tangenten* worden gebruikt veréénigd met die der getallen.

4°. Wanneer nu de eerste lijn alleen gebruikt wordt, dient zij om, bij enkele afpasfing eenen regel van drieën opteloslen: immers zij $a:b = c:x$: is $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$: en dus Log. a — Log. b = Log. c — Log. x: het verfchil der Logarithmen van a en b is dan gelijk aan dat van c en x. Derhalve indien men de eene punt eens pasfers ftelt op a, de andere op b; is de ruimte door de punten bevat Log. a — Log. b. Zoo men dan nu de eene punt op c ftelt, zal de andere op x vallen, aan de regterhand zoo $b > a$, aan de linker zoo $b < a$, en x wordt bekend.

Op de zelfde wijze dienen de lijnen van *finus* en *tangent* ieder afzonderlijk: en dus indien *fin.* a: *fin* b = *fin.* c: *fin.* x, is Log. *fin.* a — Log. *fin.* b = Log. *fin.* c — Log. *fin* x; en men gaat op de zelfde wijze te werk.

5°. De tweede en derde lijn worden met de eerste veréénigd gebruikt, om eene vierde evenredige te zoeken, wanneer twee leden getallen zijn, de twee overige *finusfen*, of *tangenten*.

Zij $a:b$ = *fin.* c: *fin.* x. Dan is Log. a — Log. b = Log. *fin.* c — Log. *fin.* x. Men neemt op de lijn der getallen Log. a — Log. b: men ftelt de eene punt des pasfers, welke dat verfchil heeft afgepast, op de lijn der *finusfen* in c: de andere punt valt op x, aan de regter hand indien $b > a$; aan de linker indien $a > b$; en de hoek x is gevonden.

6°. Het gebruik der lijn van *tangenten* gaat op de zelf-

zelfde wijze voort: maar, vermits dezelve op 45°. schijnt te eindigen, zoude men verlegen kunnen staan, als men *tangenten* ontmoet van bogen, of hoeken, die grooter dan 45° zijn. Dit geval moet dus naauwkeurig ontwikkeld worden.

Ten dien einde zal het noodig zijn te doen opmerken, dat *Logarithmen-tangenten* zoodanige getallen zijn, dat Log. *tang. a* zoo veel boven of onder Log. van den *radius*, dat is boven of onder *Log. tang* 45° staat, als die van tang. (90° — *a*) of van *cot. a* er onder of boven is. Immers *tang. a* $= \frac{r^2}{cot.\ a}$ (Voorst. XXVI.): derhalve Log. *tang. a* = 2 Log. *r* — Log. *cot. a*; of Log. *tang. a* — Log. *r* = Log. *r* — Log. *cot. a*: en daarom zijn ook op de lijn der *tangenten* dubbelde cijfferletters: van de linker naar de regter hand van 1 tot 45; van de regter naar de linker van 45 tot 50, 60, 70 enz. zoo dat 50 en 40, 60 en 30, 70 en 20 op de zelfde stippen staan: dat is *a* en complement *a*.

7°. Dit gesteld zijnde: dat *a* en *b* twee getallen zijn op de lijn der getallen, *d* een gegeven, en *x* een gezogte boog of hoek: en zij verder

$$a : b = tang.\ d : tang.\ x$$

dan is *Log. a* — *Log. b* = *Log. tang. d* — *Log. tang. x*.

1°. Indien $a > b$: en $d < 45°$: is zeker *x* ook $< 45°$: en derhalve is die *tangent* onmiddelijk op de schaal te vinden.

2°. Indien $b > a$ en $d > 45°$: is *x* ook $> 45°$ en dan werkt men door de *cotangenten*, zeggende

$$a : b = \frac{r^2}{cot.\ d} : \frac{r^2}{cot.\ x} = cot.\ x : cot.\ d.$$

en dus Log. *b* — Log. *a* = L. *cot. d* — L. *cot. x*: dus wordt *cot. x* onmiddelijk gevonden: en gelijk men voor *d* het complement van den gegeven hoek genomen heeft, neemt men het complement van *x* om den begeerden hoek te krijgen:

Maar indien 3°. $a > b$: en $d > 45°$: kan $x < 45°$ zijn: zij dan

$$a : b = \frac{r^2}{cot.\ d} : tang.\ x;$$ dan is

L.

$L. a - L. b = (L\, r^2 - L.\, cot.\, d) - Log.\, tang.\, x$
$= 2\, L.\, r - Log.\, cot.\, d - Log.\, tang.\, x$
$= (L.\, r - Log.\, cot.\, d) + (L.\, r - Log.\, tang\, x)$
en dus
$(L.\, a - Log\, b) - (L.\, r - Log.\, cot.\, d) = L.\, r - L.\, tang\, x.$

Men neemt dan eerst op de schaal, met den passer, het verschil van $L.\ a$ en $L.\ b$: men zet de eene punt van den passer op 45°, dat is op $L.\ r$, en men ziet of de afstand van 45° tot d, nemende voor d het complement van den gegeven hoek, kleiner of grooter is dan de opening van den passer, dat is dan $(L.\ a - L.\ b)$. Men laat die tweede punt daar hij komt: en brengt de eerste van 45° op d: dan heeft men eene opening van den passer gelijk aan $(L.\ a - L.\ b) - (L.\ r - L.\ cot.\ d)$, en derhalve gelijk aan $L.\ r$ — Log. $tang.\ x$. Men stelt dan de eene punt van die opening op 45°: en ziet waar de andere valt: zoo nu $L.\ r - L.\ cot.\ d > L.\ a - L.\ b$ is $L.\ tang.\ x > L.\ r$, of $tang.\ x > r$, of $x > 45^o$: en men neemt het complement der graden waarop de punt valt. Indien $L.\ a - L.\ b > L.\ r - cot.\ d$: is $L.\ tang.\ x < L.\ r$ en $x < 45^o$.

8°. Indien dan 4°. $a < b$, en $d < 45^o$: zoude in de de uitdrukking $a : b = tang.\ d : tang.\ x$, $x > 45^o$ kunnen zijn: doch alle twijfeling hoe te handelen zal wegvallen, indien men in plaats van $tang.\ x$ stelt $\frac{r^2}{cot.\ x}$: dan is: $a : b = tang.\ d : \frac{r^2}{cot.\ x}$

$L.\, b - Log.\, a = L \frac{r^2}{cot.\ x} - Log.\, tang.\, d$
$= 2\, L.\, r - L.\, cot.\, x - Log.\, tang.\, d$
$= L.\, r - Log\, tang.\, d + L.\, r - L.\, cot\, x$
en $(L.\, b - Log.\, a) - (L.\, r - Log.\, tang\, d) = L.\, r - L\, cot\, x.$

Men handelt gelijk in N°. 3: en weet dat $x >$ of $<$ 45° is, naar mate $(L.\, r - Log.\, tang.\, d) >$ of $<$ $(L.\, b - L.\, a)$.

III. OVER DE SCHUIFSCHAAL.

1°. Bij de GUNTER's *schaal* wordt een passer gebruikt, om de noodige afpassing te doen. Bij de schuifschaal is geen passer noodig. Ten dien einde, is er midden in de schaal eene sleuf, waarin zich een liniaal, of eene schuif, beweegt, die het werk des passers waarneemt.

Ten

Ten dien einde is er, (om nu niet van de overige lijnen te spreken, die zich doorgaans op schuifschalen, even als op pleinschalen, bevinden,) op de eene zijde, aan den eenen kant langs de sleuf eene lijn van *tangenten*, aan den anderen eene lijn van *sinusſen*, welke van den zelfden aard zijn als op de GUNTER's schaal.

Op de andere zijde is langs de sleuf eene lijn van getallen of *num.* even als op de GUNTER's schaal.

Op de eene zijde van het liniaal, of van de schuif, is langs den eenen kant eene lijn van *sinusſen* en langs den anderen eene van *tangenten*: op de andere zijde, zijn langs de beide kanten lijnen van getallen: alle deze lijnen zijn van den zelfden aard als op de GUNTER's schaal.

2°. Indien men de evenredigheid oplossen wil $a : b = c : x$: stelt men het liniaal zoodanig in de sleuf dat de lijn der getallen op dezelve, langs de lijn der getallen op de schaal zelve bewogen worde: men neemt a en b op het liniaal: schuive het tot dat b over c staat, zoo $b < a$; dan zal het getal dat op de schaal over c van het liniaal, of van de schuif, aan de linker hand staat, x zijn; want dan is de afstand Log. a — Log. b gelijk aan den afstand Log. c — Log. x.

Indien $b > a$: zal men a onder c brengen, het getal dat aan de regterhand boven c staat is x.

3°. Indien men heeft $a : b = sin. a : sin. x$ of $a : b = tang. c : tang. x$, zal men het liniaal, of de schuif, zoodanig in de sleuf stellen, dat de lijn der getallen op de schuif, overeenkome met die der *sinusſen*, of der *tangenten* op de schaal, en men werke op de zelfde wijze.

4°. Op de schuifschaal is ook doorgaans eene lijn geteekend S R. of S. *Rumb* beteekenende *sinus-rumb*: en somtijds nog eene andere T. R. of *tang. rumb*: de eene bevat de Logarithmen *sinus* en de andere de Logarithmen *tangent* der hoeken (genaamd *Rhumb*) of der compasstreeken: en beide worden alleen gebruikt in verband met de lijn der getallen. Zij dienen den zeelieden om in eene evenredigheid, waarvan de leden uit getallen, en uit *sinusſen* of *tangenten* van hoeken, die niet in graden en minuten, maar in *streeken*, en gedeelten van dien, opgegeven worden, de vierde evenredige te vinden op de zelfde wijze als men doen zoude met de lijn der *sinusſen*, of die der *tangenten*, indien de hoeken in graden en minuten opgegeven waren.

IV.

IV. AFDEELING.

OVER DE FORMULES VOOR GONIOMETRISCHE LIJNEN.

Men maakt tegenwoordig in de Wiskunde een zeer groot gebruik van de *Goniometrische* lijnen, welke als dan door *formules* worden uitgedrukt, die het gemakkelijk valt in het geheugen te prenten, of zich voor oogen te houden. Verscheide Schrijvers, EULER, CAGNOLI, DE GELDER en anderen, hebben eene menigte opgegeven. Vele derzelve, en welligt alle, kunnen geometrisch, uit de figuur zelve bewezen worden: gelijk, immers voor sommige daarvan, door uitmuntende Schrijvers gedaan is: waar omtrent misschien de meeste eenvoudigheid betracht heeft ROBERTSON in zijne *Elements of Navigation*, Boek IV. §. 169 — §. 225. Maar om dat wij de hoofd-*formules* uit geometrische gronden hebben opgemaakt, verkiezen wij nu aantetoonen hoe alle de overige, zonder verder bewijs, uit deze zijn afteleiden. Wij zullen ze, in eenige Voorstellen in behoorlijke orde schikken, op dat men te gemakkelijker die, welke men noodig mogt hebben, zoude kunnen vinden. Alleen zij dit voor uit gesteld, dat in dezelve de eenheid voor den *radius* gesteld is, en derhalve $r = 1$ gehouden wordt.

XXXII. VOORSTEL.

De meest belangrijke uitdrukkingen van *sinussen* en *cosinussen*, in zekere gevallen, zijn in de volgende formules begrepen.

1.	$Sin.\ 0° = 0$	$cos.\ 0 = 1$	Bep. 3. Aanm. en Bep. 4. Aanm.
2.	$Sin.\ 30° = cos.\ 60° = 0.5$		XVI. Gev. 2. (*)
	$Cos.\ 30° = sin.\ 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$		XVII. Gev. 3.
3.	$Sin.\ 45° = cos.\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$		XVII. Gev. 2.

4.

(*) De aanhalingen in romeinsche cijfers duiden de Voorstellen aan; die in gewone cijfers de N°. van deze formules.

4. $\text{Sin. } 90^\circ = 1$; $\text{cos. } 90^\circ = 0$

5. $\text{Sin. } 180^\circ = 0$ $\quad \text{cos. } 180^\circ = -1$ } Bep. 3. Aanm. e(n) Bep. 4. Aanm.

6. $\text{Sin. } 270^\circ = -1$; $\text{cos. } 270^\circ = 0$

7. $\text{Sin. } 360^\circ = 0$ $\quad \text{cos. } 360^\circ = 1$

8. $\text{Sin.}^2 (B) + \text{cos.}^2 (B) = 1$. XVII.

9. $\text{Sin.}^2 (B) = 1 - \text{cos.}^2 (B)$. XVII. Gev. 1.

$= (1 - \text{cos. } B)(1 + \text{cos. } B)$

$= \text{sin. v. } B \times \text{sin. v. sup. } B$ Bep. 5. Gev.

10. $\text{Cos.}^2 (B) = 1 - \text{sin.}^2 (B)$. XVII. Gev. 1.

---

11. $\text{Sin. } (B + C) = \text{sin. } B \text{ cos. } C + \text{sin. } C \text{ cos. } B$ } XXI.

12. $\text{Sin. } (B - C) = \text{sin. } B \text{ cos. } C - \text{sin. } C \text{ cos. } B$

13. $\text{Cos. } (B + C) = \text{cos. } B \text{ cos. } C - \text{sin. } B \text{ sin. } C$ } XXII.

14. $\text{Cos. } (B - C) = \text{cos. } B \text{ cos. } C + \text{sin. } B \text{ sin. } C$

15. $\text{Sin. } 2B = 2 \text{ sin. } B \text{ cos. } B$ . . . Uit 11 zoo $B = C$.

16. $\text{Cos. } 2B = \text{cos.}^2 (B) - \text{sin.}^2 (B)$ Uit 13 zoo $B = C$.

17. $\text{Cos. } 2B = 2 \text{ cos.}^2 (B) - 1$ . . Uit 16. 9.

18. $\text{Cos. } 2B = 1 - 2 \text{ sin.}^2 (B)$. Uit 16. 10.

19. $\text{Sin.} (90^\circ \pm C) = \text{cos. } C$ . . . 11. 12. 4.

20. $\text{Cos.} (90^\circ \pm C) = \mp \text{ sin. } C$ . . . 13. 14. 4.

21. $\text{Sin.} (180^\circ \pm C) = \mp \text{ sin. } C$ . . 11. 12. 5.

22. $\text{Cos.} (180^\circ \pm C) = - \text{ cos. } C$ . . 13. 14. 5.

Voor $\text{Sin. } (B + C) + \text{sin. } (B - C)$

$\text{Sin. } (B - C) - \text{sin. } (B - C)$

$\text{Cos. } (B + C) + \text{cos. } (B - C)$

$\text{Cos. } (B - C) - \text{cos. } (B - C)$

} Zie N°. 38. 39. 41. 42.

---

23. $\text{Sin. } (B + C) . \text{ sin. } (B - C) = \text{sin.}^2 B - \text{sin.}^2 C$

$= \text{cos.}^2 C - \text{cos.}^2 B$

Uit 11 en 12: stellende uit 9 en 10. voor $\text{sin.}^2 B$ en $\text{sin.}^2 C$ derzelver waarde.

24. $\text{Sin } (B + C) . \text{ cos } (B - C) = \frac{\text{sin. } 2B + \text{sin. } 2C}{2}$ Uit 11 en 14: daar na uit 8 en 15.

25. $\text{Sin. } (B - C) . \text{ cos. } (B + C) = \frac{\text{sin. } 2B - \text{sin. } 2C}{2}$ Uit 12 en 13: daar na uit 8 en 15.

26.

26. $Sin.(B+C)\,cof.(B+C) = \dfrac{fin.\,2B\,cof.\,2C + fin.\,2C\,cof.\,2B}{2}$ — Uit 11 en 13: dan 8, 15, 16.

27. $Sin.(B-C)\,cof.(B-C) = \dfrac{fin.\,2B\,cof.\,2C - fin.\,2C\,cof.\,2B}{2}$ — Uit 12 en 14: dan 15, 16.

28. $Cof.(B+C)\,cof.(B-C) = cof.^2 B - fin.^2 C$
$= cof.^2 C - fin.^2 B$ — Uit 13, 14 en dan fubftitueerende uit 9 en 10 voor $cof.^2 B$ en voor $fin.^2 C$.

29. $Sin.^2 (\frac{1}{2} B) = \dfrac{1 - cof.\,B}{2}$ — XVIII.

30. $Cof.^2 (\frac{1}{2} B) = \dfrac{1 + cof.\,B}{2}$ — XVIII.

31. $Sin.\,\frac{1}{2}(B+C)\,fin.\,\frac{1}{2}(B-C) = \dfrac{cof.\,B - cof\,C}{2}$ — Uit 23 ftellende $\frac{1}{2}$ B, en $\frac{1}{2}$ C voor B en C: en dan uit 29.

32. $Cof.\,\frac{1}{2}(B+C)\,cof.\,\frac{1}{2}(B-C) = cof.^2(\frac{1}{2}C) - fin.^2(\frac{1}{2}B)$
$= cof.^2(\frac{1}{2}B) - fin.^2(\frac{1}{2}C)$ — Uit 28 en dan uit 30.

33. $Sin.\,B + fin.\,C = 2\,fin.\,\frac{1}{2}(B+C)\,cof.\,\frac{1}{2}(B-C)$ — Uit 24.

34. $Sin.\,B - fin\,C = 2\,fin.\,\frac{1}{2}(B-C)\,cof.\,\frac{1}{2}(B+C)$ — Uit 25.

35. $Cof.\,B + cof.\,C = 2\,cof.\,\frac{1}{2}(B+C)\,cof.\,\frac{1}{2}(B-C)$ — Uit 28 en dan 30.

36. $Cof\,C - cof.\,B = 2\,fin\,\frac{1}{2}(B+C)\,fin.\,\frac{1}{2}(B-C)$ — Uit 23 en dan 29.
$Cof\,C - cof.\,B$. Zie N°. 48.

37. $Sin.\,B\,cof\,C = fin.\,B - 2\,fin.^2(\frac{1}{2}C)\,fin.\,B$ — Uit 29 gemultipliceerd door $fin.$ B.

38. $Sin.\,B\,cof.\,C = \frac{1}{2}fin.(B+C) + \frac{1}{2}fin\,(B-C)$ — Som van 11 en 12.

39. $Sin\,C\,cof.\,B = \frac{1}{2}fin.(B+C) - \frac{1}{2}fin.(B-C)$ — Verfchil van 11 en 12.

40. $Cof.\,B\,cof.\,C = cof.\,C - 2\,fin.^2\frac{1}{2}\,B\,cof.\,C$ — Uit 29 gemultipliceerd door $cof.$ C.

41. $Cof.\,B\,cof.\,C = \frac{1}{2}cof.(B+C) + \frac{1}{2}cof.(B-C)$ — Som van 13 en 14.

42. $Sin\,B\,fin.\,C = \frac{1}{2}cof.(B-C) - \frac{1}{2}cof.(B+C)$ — Verfchil van 13 en 14.

43. $Sin.\,v.\,B = 1 - cof.\,B$ } Indien $B < 90°$ — Bep. V. Gev.

44. $Sin.\,v.\,B = 2\,fin.^2(\frac{1}{2}B)$ } — Uit 43 en 29.

45. $Sin.\ v.\ B = 1 + cof.\ B$	Indien $B > 90^\circ$	Uit Bep. V. Gev.
46. $Sin.\ v.\ B = 2\ cof.^2\ (\tfrac{1}{2}\ B)$		Uit 45 en 30.
47. $Sin.\ v.\ B = \dfrac{fin.^2\ (B)}{fin.\ v.\ fup.\ B}$	altijd het zij $B > 90^\circ$ of $B < 90^\circ$	Uit XVIII. Gev.
48. $Sin.\ v.\ B - fin.\ v.\ C = cof.\ C - cof.\ B$		Uit 48.

---

49. $Tang.\ B = \dfrac{fin.\ B}{cof.\ B}$ 50. $Cot.\ B = \dfrac{cof.\ B}{fin.\ B}$	Uit XXV.
50*. $Cot.\ B = cofec.\ B$ [illegible] $tang.\ \tfrac{1}{2}\ B$	Zie hier onder 75.
51. $Tang.\ B = \dfrac{1}{cot.\ B}$ 52. $Cot.\ B = \dfrac{1}{tang.\ B}$	Uit XXVI. Gev. 2.
53. $Tang.\ 45^\circ = cot.\ 45^\circ = 1$	Uit XXV. Gev. 1.

---

54. $Tang.\ B + tang.\ C = \dfrac{fin.\ (B + C)}{cof.\ B\ .\ cof.\ C}$	Nemende uit 49 de fom der breuken *tang.* B en *tang.* C: en reduceerende door 11.
55. $Tang.\ B - tang.\ C = \dfrac{fin.\ (B - C)}{cof.\ B\ .\ cof.\ C}$	Nemende uit 49 het verfchil der breuken *tang.* B en *tang.* C: en reduceerende door 12.
56. $Cot.\ B + cot.\ C = \dfrac{fin.\ (B + C)}{fin.\ B\ .\ fin.\ C}$	Nemende uit 50 de fom van *cot.* B en *cot.* C: en reduceerende door 11.
57. $Cot.\ C - cot.\ B = \dfrac{fin.\ (B - C)}{fin.\ B\ .\ fin.\ C}$	Nemende uit 50 het verfchil van *cot.* C en *cot.* B: en reduceerende door 12.
58. $Tang.\ B + tang.\ C = cot.\ B + cot.\ C$	Uit 54 en 56.
59. $Tang.\ B - tang.\ C = cot.\ C - cot.\ B$	Uit 55 en 57.
60. $Tang.^2\ B - tang.^2\ C = \dfrac{fin\ (B - C)\ .\ fin.\ (B + C)}{cof.^2\ B\ .\ cof.^2\ C}$	Multipl. 54 door 55

61.

61. $\text{Tang.}^2\, B - \text{tang}^2\, C = \dfrac{\text{fin.}^2\, B - \text{fin.}^2\, C}{\text{cof.}^2\, B \,.\, \text{cof.}^2\, C}$ — Uit 60 en 23.

$$= \frac{\text{cof.}^2\, C - \text{fin.}^2\, B}{\text{cof.}^2\, B \,.\, \text{cof.}^2\, C}$$

62. $\text{Cot.}^2\, C - \text{cot.}^2\, B = \dfrac{\text{fin.}\,(B - C)\ \text{fin.}\,(B + C)}{\text{fin.}^2\, B \,.\, \text{fin.}^2\, C}$ — Multipl. 56 door 57.

63. $\text{Cot.}^2\, C - \text{cot.}^2\, B = \dfrac{\text{fin.}^2\, B - \text{fin.}^2\, C}{\text{fin.}^2\, B \,.\, \text{fin.}^2\, C}$ — Uit 62 en 23.

---

64. $\text{Tang.}\,(B + C) = \dfrac{\text{tang.}\, B + \text{tang}\, C}{1 - \text{tang.}\, B \,.\, \text{tang.}\, C}$ — Divid. 11 door 13: en dan div. door cof. B . cof. C onder en boven.

65. $\text{Tang.}\,(B - C) = \dfrac{\text{tang.}\, B - \text{tang.}\, C}{1 + \text{tang.}\, B \,.\, \text{tang.}\, C}$ — Divid. 12 door 14: en dan divid. boven en onder door cof. C . cof. B.

66. $\text{Cot.}\,(B + C) = \dfrac{1 - \text{tang.}\, B \,.\, \text{tang.}\, C}{\text{tang.}\, B + \text{tang.}\, C}$ — Uit 64 en 52.

67. $\text{Cot.}\,(B - C) = \dfrac{1 + \text{tang.}\, B \,.\, \text{tang.}\, C}{\text{tang.}\, B - \text{tang.}\, C}$ — Uit 65 en 52.

68. $\text{Tang.}\,(45^\circ \pm B) = \dfrac{1 \pm \text{tang.}\, B}{1 \mp \text{tang.}\, B}$ — Uit 64 en 52.

69. $\text{Tang.}\, 2\, B = \dfrac{2\ \text{tang}\ B}{1 - \text{tang.}^2\, B}$ — XXVIII. Gev.

---

70. $\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2}\, B = \sqrt{\dfrac{1 - \text{cof.}\, B}{1 + \text{cof.}\, B}}$ — Divid. 29 door 30.

71. $\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2}\, B = \dfrac{\text{fin.}\, B}{1 + \text{cof.}\, B}$ — Multipl. 70 boven en onder door 1 + cof. B, en dan door 9, en trekkende den wortel.

72. $\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2}\, B = \dfrac{\text{fin.}^2\, B}{\text{fin.}\, B\, (1 + \text{cof.}\, B)}$ — Uit 71.

72*. $Tang.\ \frac{1}{2}B = \frac{1 - cos.^2 B}{sin.\ B\,(1 + cos.\ B)}$ — Uit 72. en 8.

73. $Tang.\ \frac{1}{2}B = \frac{1 - cos.\ B}{sin.\ B}$ — Uit 72: div. door $1 + cos.\ B$.

74. $Tang.\ \frac{1}{2}B = \frac{1}{sin.\ B} - cot.\ B$ — Uit 73 en 50.

75. $Tang.\ \frac{1}{2}B = cosec.\ B - cot.\ B$ — Uit 74; en hier onder 88.

Waaruit $cot.\ B = cosec\ B - tang.\ \frac{1}{2}B$.

Zie ook het bewijs van N°. 129.

76. $Tang.\ (45° \pm \frac{1}{2}B) = \frac{cos.\ \frac{1}{2}B \mp sin.\ \frac{1}{2}B}{cos.\ \frac{1}{2}B \pm sin.\ \frac{1}{2}B}$ — Stellende 45° voor B en ($\frac{1}{2}$) B voor C in 11 en 14: divideerende 11 door 14: en in de reductie lettende op 5.

77. $Tang.^2\,(45° \pm \frac{1}{2}B) = \frac{1 \pm sin.\ B}{1 \mp sin.\ B}$ — Brengende N°. 76 in het vierkant en in de reductie lettende op 15.

78. $Tang.\ \frac{1}{2}(B + C) = \frac{sin.\ B + sin.\ C}{cos.\ B + cos.\ C}$ — Divid. 33 door 35: en dan door 49.

79. $Cot.\ \frac{1}{2}(B + C) = \frac{sin.\ B - sin.\ C}{cos.\ C - cos.\ B}$ — Divid. 34 door 36: en dan door 50.

80. $Tang.\ \frac{1}{2}(B - C) = \frac{sin.\ B - sin.\ C}{cos.\ B + cos.\ C}$ — Divid. 34 door 35: en dan door 49.

81. $Cot.\ \frac{1}{2}(B - C) = \frac{sin.\ B + sin.\ C}{cos.\ C - cos.\ B}$ — Divid. 33 door 36: en dan door 50.

82. $\frac{Tang.\ \frac{1}{2}(B + C)}{Tang.\ \frac{1}{2}(B - C)} = \frac{sin.\ B + sin.\ C}{sin.\ B - sin.\ C}$ — Divid. 78 door 80.

83. $\frac{Cot.\ \frac{1}{2}(B + C)}{Tang.\ \frac{1}{2}(B - C)} = \frac{cos.\ B + cos.\ C}{cos.\ C - cos.\ B}$ — Divid. 79 door 81.

83*. $Sec.\ B = tang.\ B + tang.\ \frac{1}{2}\ compl.\ B$ — Uit XXX.

84. $Sec.\ B = \frac{1}{cos.\ B}$ — Uit XXXI. Gev.

85. $Sec.\ B = \sqrt{1 + tang.^2\ B}$ . . Uit XXXI.

86. $Sec.\ B = \dfrac{1 + tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}$ (*)

87. $Sec.\ B = 1 + tang.\ B\ .\ tang.\ (\frac{1}{2}\ B)$ (†)

88. $Cosec.\ B = \dfrac{1}{sin.\ B}$ . . . . Uit XXXI. Gev. 1.

89. $Cosec.\ B = \sqrt{1 + cot.^2\ B}$ . . Uit XXXI.

AANMERKING. De voorgaande formules bevatten in zich uitdrukkingen van *sinus* B, *cosinus* B, en *tang.* B, welke dikwerf gebruikt worden, en die het derhalve nuttig zijn zal onder drie Voorstellen hier bij te voegen: zij zijn alle uit CAGNOLI genomen.

XXXIII. VOORSTEL.

De *sinus* van eenen hoek B kan door de volgende formules uitgedrukt worden.

90. $Sin.\ B = \sqrt{1 - cos.^2\ (B)}$ . . Uit 9.

91. $Sin.\ B = cos.\ B\ .\ tang.\ B$ . . Uit 49.

92.

(*) Neem uit 71 de waarde van $tang.\ (\frac{1}{2}\ B)$, dan is $\dfrac{1 + tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)} =$

$$\frac{1 + \dfrac{sin.^2\ B}{(1 + cos.\ B)^2}}{1 - \dfrac{sin.^2\ B}{(1 + cos.\ B)^2}} = \frac{(1 + cos.\ B)^2 + sin.^2\ B}{(1 + cos.\ B)^2 - sin.^2\ B} = \frac{1 + 2\ cos.\ B + cos.^2\ B + sin.^2\ B}{1 + 2\ cos.\ B + cos.^2\ B - sin.^2\ B}$$

$$= (8 \text{ en } 10) = \frac{2 + 2\ cos.\ B}{2\ cos.^2\ B + 2\ cos.\ B} = \frac{1 + cos.\ B}{cos.\ B\ (1 + cos.\ B)} = \frac{1}{cos.\ B} = sec.\ B.$$

(†) Uit N°. 86. is $sec.\ B = \dfrac{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B) + 2\ tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)} =$

$1 + tang.\ (\frac{1}{2}\ B) \times \dfrac{2\ tang.\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 - tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)} =$ (door N°. 69 stellende $\frac{1}{2}$ B voor B)

$= 1 + tang.\ \frac{1}{2}\ B \times tang.\ B$.

92. $Sin.\ B = \frac{cos.\ B}{cot.\ B}$ . . . . . . Uit 50.

93. $Sin.\ B = \frac{1}{\sqrt{1 + cot.^2\ B}}$ . . . . . . Uit 89 en 88 en 84.

94. $Sin.\ B = \frac{tang.\ B}{\sqrt{1 + tang.^2\ B}}$ . . . . . . Uit 49 en 85 . 94

95. $Sin.\ B = 2\ sin.\ (\frac{1}{2}\ B)\ cos.\ (\frac{1}{2}\ B)$ . . . . . . Uit 15: stellende $\frac{1}{2}$ B voor B.

96. $Sin.\ B = \sqrt{\frac{1 - cos.\ 2\ B}{2}}$ . . . . . . Uit 9 en 17.

97. $Sin.\ B = \frac{2\ tang.\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 + tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}$ (*).

98. $Sin.\ B = \frac{2}{cot.\ (\frac{1}{2}\ B) + tang.\ (\frac{1}{2}\ B)}$ . . . . . . Uit 98: div. door tang. ($\frac{1}{2}$ B) in 57

99. $Sin.\ B = \frac{1}{cot.\ B + tang.\ (\frac{1}{2}\ B)}$ . . . . . . Uit 50* en 86.

100. $Sin.\ B = 2\ sin.^2\ (45^\circ + \frac{1}{2}\ B) - 1$ } (†)

101. $Sin.\ B = 1 - 2\ sin.^2\ (45^\circ - \frac{1}{2}\ B)$ } (†)

102. $Sin.\ B = \frac{1 - tang.^2\ (45^\circ. - \frac{1}{2}\ B)}{1 + tang.^2\ (45^\circ. - \frac{1}{2}\ B)}$ . . . . . . Uit 77.

103.

(*) Uit 95 is $sin.\ B = 2\ sin.\ (\frac{1}{2}\ B)\ cos.\ (\frac{1}{2}\ B) = \frac{2\ sin.\ (\frac{1}{2}\ B)}{cos.\ (\frac{1}{2}\ B} \times \frac{1}{cos.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}$ $= \frac{2\ sin.\ (\frac{1}{2}\ B)}{cos.\ (\frac{1}{2}\ B)\ sec.^2\ (\frac{1}{2}\ B)} = \frac{2\ sin.\ (\frac{1}{2}\ B}{cos.\ \frac{1}{2}\ B\ (1 + tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B))} = (49) =$ $\frac{2\ tang.\ (\frac{1}{2}\ B)}{1 + tang.^2\ (\frac{1}{2}\ B)}$.

(†) Door 11 en 3 $sin.\ (45^\circ \pm \frac{1}{2}\ B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (cos.\ \frac{1}{2}\ B) \pm sin.\ (\frac{1}{2}\ B)$ en $2\ sin.^2$ $(45^\circ \pm \frac{1}{2}\ B) = cos.^2\ (\frac{1}{2}\ B) \pm sin.^2\ (\frac{1}{2}\ B) = cos.^2\ (\frac{1}{2}\ B) + sin.^2\ (\frac{1}{2}\ B) \pm$ $2\ sin.\ (\frac{1}{2}\ B)\ cos.\ (\frac{1}{2}\ B) =$ (door 8 en 15) $= 1 \pm sin.\ B$ waaruit het Voorstel volgt

103. $\text{Sin. } B = \dfrac{\text{tang.}(45^\circ. + \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(45^\circ. - \frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45^\circ. + \frac{1}{2}B) + \text{tang.}(45^\circ. - \frac{1}{2}B)}$ Uit 77: en reduceerende door 8 en 15.

104. $\text{Sin. } B = \text{sin. } (60^\circ. + B) - \text{sin. } (60^\circ - B)$ Nemende uit 11 de waardij van sin. (60 $\mp$ B) en uit 2 die van cos. 60°.

XXXIV. VOORSTEL.

De *cosinus* van eenen hoek B kan door de volgende formules uitgedrukt worden.

105. $\text{Cos. } B = \sqrt{1 - \text{sin.}^2 (B)}$ . . Uit 10.

106. $\text{Cos. } B = \dfrac{\text{sin. } B}{\text{tang. } B}$ . . . Uit 49.

107. $\text{Cos. } B = \text{sin. } B \,.\, \text{cot. } B$ . . Uit 50.

108. $\text{Cos. } B = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 B)}} = \dfrac{1}{\text{sec. } B}$ Uit 84 en 85.

109. $\text{Cos. } B = \dfrac{\text{cot. } B}{\sqrt{(1 + \text{cot.}^2 B)}}$ . . Uit 50 en 89.

110. $\text{Cos. } B = \text{cos.}^2 (\frac{1}{2} B) - \text{sin.}^2 (\frac{1}{2} B)$. Uit 16 stellende $\frac{1}{2}$ B voor B.

111. $\text{Cos. } B = 1 - 2\, \text{sin.}^2 (\frac{1}{2} B)$ . . Uit 18.

112. $\text{Cos. } B = 2\, \text{cos.}^2 (\frac{1}{2} B) - 1$ . . Uit 30.

113. $\text{Cos. } B = \sqrt{\dfrac{1 + \text{cos. } 2B}{2}}$ . . Uit [illegible]

114. $\text{Cos. } B = \dfrac{1 - \text{tang.}^2 (\frac{1}{2} B)}{1 + \text{tang.}^2 (\frac{1}{2} B)}$ . . Uit 73 in het vierkant gebragt: en dan reduceer. door 8.

115. $\text{Cos. } B = \dfrac{\text{cot. } (\frac{1}{2} B) - \text{tang. } (\frac{1}{2} B)}{\text{cot. } (\frac{1}{2} B) + \text{tang. } (\frac{1}{2} B)}$. Uit 73: nemende $\dfrac{\text{sin. } B}{1 - \text{cos. } B}$ voor cot. $\frac{1}{2}$ B: en reduceerende door 8.

116. $\text{Cos. } B = \dfrac{1}{1 + \text{tang. } B \,.\, \text{tang. } \frac{1}{2} B}$. Uit 49 en 73.

117. $\text{Cos. } B = \dfrac{2}{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) + \text{[illegible]}.(45^\circ\ \text{[illegible]}\ \frac{1}{2}B)}$ Op dezelfde wijze uit 76: reduceerende, en eindelijk uit 9 en 16.

118. $Cos.\ B = 2\ cos.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}B)\ cos.\ (45^\circ - \tfrac{1}{2}B)$ Uit 28 stellende 45° voor B : ½ B voor C en dan door 3 [illegible]

119. $Cos.\ B = cos.\ (60^\circ + B) + cos.\ (60^\circ - B)$ Uit 41 stellende 60° voor B en B voor C en dan door 2.

XXXV. VOORSTEL.

De *tangent* van eenigen hoek B kan door de volgende formules uitgedrukt worden.

120. $Tang.\ B = \dfrac{sin.\ B}{cos.\ B}$ . . . Zie boven 49.

121. $Tang.\ B = \dfrac{1}{cot.\ B}$ . . . Zie boven 51.

122. $Tang.\ B = \sqrt{\left(\dfrac{1}{cos.^2\ B} - 1\right)}$ . . Uit 85 en 84.

123. $Tang.\ B = \dfrac{sin.\ B}{\sqrt{1 - sin.^2\ (B)}}$. Uit 120 en 105.

124. $Tang.\ B = \dfrac{\sqrt{(1 - cos.^2\ B)}}{cos.\ B}$. Uit 120 en [illegible].

125. $Tang.\ B = \dfrac{2.\ tang.\ (\tfrac{1}{2}B)}{1 - tang.^2\ (\tfrac{1}{2}B)}$. Uit 69: stellende ½ B voor B.

126. $Tang.\ B = \dfrac{2.\ cot.\ (\tfrac{1}{2}B)}{cot.^2\ (\tfrac{1}{2}B) - 1}$ . . Uit 125: multipl. door $cot^2\ (\tfrac{1}{2}B)$ en reduc. door 121.

127. $Tang.\ B = \dfrac{2}{cot.\ (\tfrac{1}{2}B) - tang.\ (\tfrac{1}{2}B)}$ Uit 126: divid. door cot. ½ B) en dan door 121.

128. $Tang.\ B = cot.\ B - 2\ cot.\ 2\ B$ (*)

129. $Tang.\ B = \dfrac{1 - cos.\ 2\ B}{sin\ 2\ B}$ . . Uit 73: stellende B voor ½ B.

130. $Tang.\ B = \dfrac{sin.\ (2\ B)}{1 + cos\ 2\ B}$ . . Uit 71: stellende B voor ½ B.

131. $Tang.\ B = \sqrt{\dfrac{1 - cos.\ 2\ B}{1 + cos.\ 2\ B}}$. Uit 70: stellende B voor ½ B.

132. $Tang.\ B = \dfrac{tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) - tang.(45^\circ - \tfrac{1}{2}B)}{2}$ Uit 103 en 1[illegible]

(*) Uit 127 is $cot.\ (\tfrac{1}{2}B) - tang.\ (\tfrac{1}{2}B) = \dfrac{2}{tang.\ B} = 2\ cot.\ B.$ en dus $tang.\ (\tfrac{1}{2}B) = cot.\ (\tfrac{1}{2}B) - 2\ cot.\ B$, waaruit B voor ½ B stellende het Voorstel volgt.

V.

V. AFDEELING.

OVER HET GEBRUIK DER SINUSTAFELS, TER GEMAKKELIJKER BEREKENING VAN EENIGE GROOTHEDEN.

XXXVI. VOORSTEL.

Alle grootheden, die ware breuken zijn, en, welke verandering zij ook ondergaan mogen, altoos ware breuken blijven, kunnen als de *sinus* van eenigen boog aangezien worden: en alle grootheden, die breuken zijn, doch van ware breuken gemengde breuken, of geheele getallen, kunnen worden, zoo ver men wil uitgestrekt, kunnen als *tangenten* worden aangemerkt.

BEWIJS. De eenheid voor den *radius* aangenomen zijnde, zijn immers alle *sinussen* breuken: de *tangenten* zijn breuken tot 45° toe, en vervolgens gemengde breuken, of geheele getallen.

AANMERKING. De *secanten*, die altijd grooter dan de *radius* zijn, zijn geheele getallen, of gemengde breuken.

XXXVII. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben, $ab - cd = x$, welke ook de grootte van a, b, c, d mogen zijn, zijn zoodanig dat men heeft $\sqrt{\frac{cd}{ab}} = cos.\ A$ en $ab - cd = x = cd\,(tang.\ A)^2$.

CAGNOLI, §. 202.

BEWIJS. $x = ab - cd = cd\left(\frac{ab}{cd} - 1\right)$.

Maar $(tang.\ A)^2 = (sec.\ A)^2 - 1 = \frac{1}{(cos.\ A)^2} - 1$, en dus indien $\frac{1}{(cos.\ A)^2} = \frac{ab}{cd}$, of $cos.\ A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$,

is $ab - cd = cd\left(\frac{1}{cos.\ A^2} - 1\right) = cd\,(tang.\ A)^2 = x$.

GEVOLG.

Daar men altijd $ab = p^2$ en $cd = q^2$ stellen kan, IV. 9. Gev. 11.) heeft men ook,

indien $x = p^2 - q^2$: en $cos. A = \frac{q}{p}$

$$x = q^2 (tang. A)^2.$$

XXXVIII. VOORSTEL.

Alle grootheden die deze gedaante hebben, $x = ab + cd$, welke ook de grootte van a, b, c, d zijn moge, zijn zoodanig, dat men stellen kan,

$$\sqrt{\frac{cd}{ab}} = tang. A \text{ en } x = \frac{ab}{(cos. A)^2}.$$

BEWIJS. $x = ab + cd = ab\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$.

Maar $\overline{sec. A}^2 = 1 + \overline{tang. A}^2$ (Voorstel XXXI.)

en dus, indien $tang. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, is

$x = ab + cd = ab\,(sec. A)^2 = \frac{ab}{(cos. A)^2}$ (Voorst. XXXI.)

I. GEVOLG.

Men kan ook stellen $cot. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$ en dan hadt men

$$x = \frac{ab}{(sin. A)^2}$$

II. GEVOLG.

Indien $ab = p^2$; $cd = q^2$; $tang. A = \frac{q}{p}$: is $x = \frac{p^2}{(cos. A)^2}$

XXXIX. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben $x = \sqrt{p^2 + q^2}$, zijn zoodanig, dat zoo $tang. A = \frac{q}{p}$; $x = \frac{p}{cos. A}$.

CAGNOLI. §. 206.

BEWIJS. $x = \sqrt{p^2 + q^2} = p\sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}$

Maar

Maar $\frac{1}{cos. A} = sec. A = \sqrt{1 + (tang. A)^2}$. (Voorst. XXXI.)

Zoo dan $tang. A = \frac{q}{p}$: is $x = p \times sec. A = \frac{p}{cos. A}$.

XL. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben, $x = \sqrt{p^2 - q^2}$, zijn van dien aard, dat zoo $cos. A = \frac{q}{p}$; $x = p \cdot sin. A$; of $sin. A = \frac{q}{p}$: en $x = p \cdot cos. A$.

CAGNOLI. §. 208.

BEWIJS $x = \sqrt{p^2 - q^2} = p \sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}}$

Maar $\sqrt{1 - (sin. A)^2} = cos. A$; of
$\sqrt{1 - (cos. A)^2} = sin. A$: (Voorst. XVII. 1. Gev.

dus, zoo $\frac{q}{p} = cos. A$, is $x = p \cdot sin. A$: en
zoo $\frac{q}{p} = sin. A$, is $x = p \cdot cos. A$.

XLI. VOORSTEL.

Alle grootheden, die deze gedaante hebben, $x = m \times \left(\frac{a \pm b}{a \mp b}\right)$ zijn zoodanig, dat zoo $tang. B = \frac{b}{a}$; $x = m \times tang. (45^\circ \pm B)$.

CAGNOLI, §. 209.

BEWIJS. $x = m \times \left(\frac{1 \pm \frac{b}{a}}{1 \mp \frac{b}{a}}\right)$; maar, (Voorstel XXXII. N°. 68.)

$tang. (45^\circ \pm B) = \frac{1 \pm tang. B}{1 \mp tang. B}$:

zoo dan $\frac{b}{a} = tang. B$, is

$x = m \times tang. (45^\circ \pm B)$.

NEGENDE BOEK.

OVER DE DRIEHOEKS-METING.

INLEIDING.

I. BEPALING.

De *Driehoeks-meting*, of *Trigonometrie*, is de wetenschap welke ons leert, hoe men driehoeken moet meten, of dezelve *oplossen*.

St. VIII. Bep. 1. — L. G. Tr. §. 1.

I. AANMERKING. Wij zullen hier alleen handelen over de regtlijnige driehoeks-meting, of kunst om de regtlijnige driehoeken optelossen; welke kunst ook *platte driehoeks-meting* genoemd wordt, zoo wel om dat de regtlijnige driehoeken, wier zijden alle in één en het zelfde vlak liggen, *platte figuren* zijn, als om ze te onderscheiden van de *klootsche driehoeks-meting*, die de klootsche driehoeken tot onderwerp heeft, d. i., driehoeken wier zijden bogen zijn van cirkels op eenen kloot beschreven, en die dus niet in één en het zelfde vlak zijn.

II. AANMERKING. Het geen men driehoeks-meting noemt, behoorde in de daad *driehoeks-rekening* genoemd te worden. Want die kunst bestaat in het berekenen der grootte van de onbekende zijden en hoeken; het geen in de Meetkunde der Ouden niet te pas kwam; ook vindt men er geen spoor van in EUCLIDES: een hoek, eene lijn werd bij dien voor bekend gehouden, zoo dra dezelve in grootte gegeven, of, uit hoofde van het overige der figuur, bepaald was: waarvan wij in de 2 Aanmerking op het XXXIII. Voorstel van het XI. Boek, een aanmerkelijk voorbeeld zullen bijbrengen. Daar wij nu moeten *rekenen*, zullen wij van *multiplicatie* en *divisie van lijnen*, dat is, van *getallen* welke *die lijnen uitdrukken*, spreken: even als wij zulks in de 1. Aanmerking op het XIX. Voorstel van het VII. Boek gedaan, en in de Aanmerking vóór het IX. Voorstel van het VIII. Boek breeder uitgelegd hebben.

II. BEPALING.

Men zegt dat men eenen driehoek *oplost*, wanneer men, twee hoeken en eene zijde, of twee zijden en een hoek, of

of de drie zijden eens driehoeks, bekend zijnde, de grootte van de onbekende deelen bepaalt: en het is de kennis van de regelen, welke men volgen moet, om tot zoodanige bepaling te komen, die het onderwerp van de driehoeks-meting, of, van de *Trigonometrie*, uitmaakt.

St. VIII. Bep. 1.

I. AANMERKING. De driehoeks-meting vooronderstelt dan, dat het gegevene genoegzaam is, om tot de kennis van het gevraagde te geraken; en gevolgelijk dat, zoodra die dingen, welke men opgeeft, bepaald zijn, al het overige het ook is; en dus, dat er geen twee driehoeken zijn kunnen, waarin het gegevene voor beide het zelfde is, en de overige deelen verschillende kunnen zijn. Het is om die reden dat wij in deze Bepaling niet van het geval gesproken hebben, waarin alléén de drie hoeken des driehoeks bekend zijn: want, al zijn deze in twee verschillende driehoeken gelijk, kunnen echter de zijden zeer verschillende zijn in grootte; de driehoeken zijn in dat geval alleen gelijkvormig, en niet gelijk: zoo als uit het IV. Boek genoegzaam blijkt: de onderlinge rede der zijden is dan alleen bestendig en gegeven, maar niet derzelver grootte.

Deze is derhalve de reden, waarom er in de driehoeksmeting maar drie algemeene gevallen plaats hebben: die, namelijk, welke wij in de Bepaling hebben opgeteld. Dat in het I en III. het gevraagde door het gegevene bepaald is, blijkt genoegzaam uit het XXII en XXVI. Voorstel van het I. Boek. Dit heeft ook plaats voor het II geval, doch met eenige onderscheiding; om dat het zelve twee ondergeschikte gevallen behelst: het eerste is, wanneer de gegeven hoek tusschen de twee gegeven zijden begrepen is; dat dan al het overige ook bepaald is, blijkt uit het XXI. Voorstel van het I. Boek: het andere is, wanneer de gegeven hoek over eene der zijden staat; en het blijkt uit het XXV. Voorstel van het I. Boek, dat dan al het overige ook bepaald is, mits men vooraf wete, of een der overige hoeken stomp zij, of niet: want laten, in figuur 68, de zijden AD en DC gegeven zijn, zoo als ook de hoek A: dan kunnen er twee driehoeken zijn, namelijk △ ACD en △ ABD, waarin het gegevene (t. w. ∠ A, AD en CD, of BD = CD) het zelfde is, doch die van elkander verschillen, om dat in den eenen de ∠ ACD stomp, in den anderen de hoek B scherp is; het geen ook op de grootte van de derde zijde AC of AB, en van den derden hoek ADC of ADB, invloed heeft. Nogthans zijn die twee driehoeken zoo gesteld, dat de hoek ACD in den ee-

eenen altijd het fupplement is van den hoek B in den anderen: en daar een hoek den zelfden *finus*, *cofinus*, *enz.* heeft als zijn fupplement, (VIII. Bep. 3. Gev. 1. Bep. 4 Gev. 2. Bep. 5, en 6 Gev.) kan men uit eene berekening, die voor uitkomst den *finus* van den gezochten hoek oplevert, niet weten of men den hoek, welke aan dien *finus* in de Tafels beantwoordt, dan wel zijn fupplement nemen moet: dit moet van elders, uit den aard namelijk van het Vraagftuk, bekend zijn.

II. AANMERKING. Men is gewoon de oplosfing der regthoekige en die der fcheefhoekige driehoeken afzonderlijk te behandelen: en, in de daad, die der regthoekige valt gemakkelijker, om dat er in dezelve altijd één hoek, de regte hoek namelijk, gegeven is; waaruit verder volgt, dat de *finus* van dien hoek gelijk is aan de eenheid, of aan den *radius*, en de fcherpe hoek het complement van den anderen is.

III. AANMERKING. In dit Boek komt meer dan eens te pas het volgend *Voorftel* of

LEMMA.

Van twee grootheden [A, B] geeft de halve fom $\frac{[A+B]}{2}$ daar bij gevoegd het half verfchil $\frac{[A-B]}{2}$ de grootfte [A]: en het half verfchil afgetrokken van de halve fom geeft de kleinfte [B].

I. AFDEELING.

OVER DE REGTHOEKIGE DRIEHOEKEN.

I. VOORSTEL. Fig. 172.

In alle regthoekige driehoeken CDI ftaat 1°. de *radius* tot den *finus* van een' der fcherpe hoeken [CDI, of DCI] als de fchuinfche zijde [CD] tot de regthoekszijde [CI, of DI] welke over den gemelden hoek is; en 2°. de *radius* tot den *fecant* van een' der fcherpe hoeken [DCI of CDI] als de zijde [CI of DI] aan dien hoek grenzende, tot de *hypothenufa*, of fchuinfche zijde.

St. VIII. 1, en 4. Gev. 4. — L. G. Tr. §. 42.

BEREIDING. Men stelle dat Cd de *radius* zij, gdb de cirkel met denzelven uit C beschreven, en di loodregt op Cb, dh en DH op CG welke met CB eenen regten hoek GCB maakt.

BEWIJS. *Voor het* I. Uit de gelijkvormigheid der ΔΔ CDI en Cdi, de gelijkheid der ΔΔ HCD en DCI, en de 3. Bepaling van het VIII. Boek.

BEWIJS. *Voor het* II. Om dat CD: CI = r: *sin.* CDI, is $CD : CI = \frac{r}{sin. \angle CDI} : 1 = \frac{r^2}{sin. \angle CDI} : r = cosec.$ ∠ CDI: r (VIII. 31. Gev. 1.) = *sec.* ∠ DCI: r: of wel uit de gelijkvormigheid der ΔΔ CDI en Ceb.

I. AANMERKING. Dit Voorstel is eigenlijk een bijzonder geval van het III. Voorstel.

I. GEVOLG.

$$r : cos. \angle CDI = CD : DI$$
$$r : cos. \angle DCI = CD : CI.$$

II. GEVOLG.

$$\left.\begin{array}{l} DI : CD = r : cosec. \angle C = sin. \angle C : r \\ CI : CD = r : cosec. \angle D = sin. \angle D : r \end{array}\right\} \text{VIII. 31. Gev. 1.}$$

II. AANMERKING. In de beste Tafels vindt men geen *secanten*: het is gevolgelijk beter dien regel altijd door de *sinussen* of *cosinussen* te berekenen.

III. GEVOLG.

$$Sin.^2 (\tfrac{1}{2} D) = \frac{CD - DI}{2\, CD} \text{ en } sin. (\tfrac{1}{2} D) = \sqrt{\frac{CD - DI}{2\, CD}}$$

CAGNOLI, §. 217.

BEWIJS. Uit Gev. 1: *dividendo*:

CD: CD − DI = 1 : 1 − *cos.* D, of (door VIII. 32. N°. 2.)

CD: CD − DI = 1 : 2 $sin.^2$ (½ D), waaruit het gezegde volgt.

IV. GEVOLG.

$$Tang.^2 (\tfrac{1}{2} D) = \frac{CD - DI}{CD + DI}.$$

CAGNOLI, §. 217.

BEWIJS. Uit Gevolg 1. *componendo* en *dividendo*
CD + DI : CD − DI = 1 + *cos.* D : 1 − *cos.* D

en $\frac{CD - DI}{CD + DI} = \frac{1 - cos. D}{1 + cos. D} = tang.^2 (\tfrac{1}{2} D)$ [VIII. 32. N°. 70].

II. VOORSTEL. Fig. 172.

In alle regthoekige driehoeken [CDI] ſtaat de *radius* tot den *tangent* van een' der hoeken [C of D] als de zijde [CI of DI] aan dien hoek grenzende tot de zijde [DI of CI] welke over dien hoek ſtaat.

St. VIII. 1. — L. G. Tr. §. 43.

BEREIDING. Als voor het vorige Voorſtel: en zij *be* loodregt op C*b* en GF op CG.

BEWIJS. Uit de gelijkvormigheid der △△ CDI en C*eb*, de gelijkheid der △△ CDI en HDC, en de 6. Bepaling van het VIII. Boek.

GEVOLG.

Dus is ook: CI : DI = *radius* : *cotang.* ∠ D.
DI : CI = *radius* : *cotang.* ∠ C.

REGELS TER OPLOSSING VAN DE VIER GEVALLEN DIE IN DE REGTHOEKIGE DRIEHOEKEN PLAATS KUNNEN HEBBEN.

AANMERKING. Wanneer drie dingen in een' driehoek gegeven zijn, kan men altijd (behalven in de reeds te voren uitgezonderde gevallen) elk der drie overigen onmiddelijk, dat is, onafhangelijk van de twee anderen, kennen. Doch men kan ook, en dit is dikwerf gemakkelijker, eerst één derzelve en dan door dat reeds gevondene de overige vinden. Dus wordt in het II. der volgende gevallen de gezochte zijde gevonden, of onmiddelijk door de I. Oplosſing (II. N°. 2.) welke uit II. 16. is afgeleid, of wel, gemakkelijker, door eerst den overſtaanden hoek te zoeken en dan door II. N°. 1. Het zelfde geldt voor het IV. Geval.

I. GEVAL.

GEGEVEN. De *hypotenuſa* en een der ſcherpe hoeken.

St. VIII. 2. Gev. 2. Reg. 4. — L. G. Tr. §. 49.

GEZOCHT. De beide regthoekszijden, en de andere hoek.

OP-

OPLOSSING.

I. Overstaande zijde $= \frac{\text{Hyp.} \times \textit{sin.}\ \text{gegev. hoek.}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst.)

II. Aangrenzende zijde $= \frac{\text{Hyp.} \times \textit{cos.}\ \text{gegev. hoek.}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst. Gev. 1.)

III. Gezochte hoek = *comp.* gegev. hoek.

II. GEVAL.

GEGEVEN. De hypotenusa en eene zijde.
GEZOCHT. De andere zijde, en de hoeken.

L. G. Tr. §. 51.

I. OPLOSSING.

I. *sin.* tegenoverstaande hoek $= \frac{\text{gegev. zijde} \times \text{Rad.}}{\text{Hypot.}}$ (I. Voorst.)

of *cos.* aangrenz. hoek $= \frac{\text{gegev. zijde} \times \text{Rad.}}{\text{Hypot.}}$ (I. Voorst. Gev. 1.)

II. Gezochte zijde $= \frac{\textit{sin.}\ \text{tegenoverst. hoek} \times \text{Hyp.}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst.)

$= \frac{\textit{tang.}\ \text{tegenoverst. hoek} \times \text{geg. zijde}}{\text{Rad.}}$ (II. Voorst.)

of Gezochte zijde $= \sqrt{\text{Hyp.}^2 - \text{geg. zijde}^2}$ (II. 16. G. 2.)

$= \sqrt{(\text{Hyp.} + \text{geg. zijde}) \times (\text{Hyp.} - \text{geg. zijde})}$ (II. 10.)

OPLOSSING.

Voor den gezochten hoek.

sin. $\frac{1}{2}$ aangr. hoek $= \sqrt{\frac{\text{Hypot.} - \text{geg. zijde}}{2.\ \text{Hyp.}}}$

(I. Voorst. Gev. 3).

tang. $\frac{1}{2}$ aangr. hoek $= \sqrt{\frac{\text{verschil Hyp. en geg. zijde}}{\text{som Hyp. en gev. zijde}}}$

AANMERKING. Wanneer men tot *facit* van de rekening den *cosinus* van een' zeer kleinen, of den *sinus* van een' zeer grooten hoek krijgt, kan men door de gewoone tafels tot geen zeer groote naauwkeurigheid komen, om dat de *cosinusſen* of *sinusſen* dan voor eene vrij aanmerkelijke veran-

dering in den hoek te weinig veranderen: doch de *sinussen* van kleine hoeken veranderen integendeel zeer spoedig, en dus kunnen de hoeken waarvan zij *sinussen* zijn naauwkeuriger berekend worden; waarom men dan in dergelijke gevallen aan deze tweede oplossing de voorkeuze geven moet.

III. GEVAL.

GEGEVEN. Eene regthoekszijde en een hoek.
GEZOCHT. De hypotenusa, de andere zijde, en de tweede hoek.

L. G. Tr, §. 52.

OPLOSSING.

I. Gezochte hoek = *compl.* geg. hoek.

II. Hypotenusa $= \dfrac{\text{geg. zijde} \times \text{Rad.}}{\textit{cos}.\ \text{aangr. hoek.}}$ (Voorst. I. Gev. 1.)

$= \dfrac{\text{gegev. zijde} \times \text{Rad.}}{\textit{sin}.\ \text{tegenov. hoek.}}$ (I. Voorst.)

$= \dfrac{\text{geg. zijde} \times \textit{sec}.\ \text{aangr. h.}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst.)

$= \dfrac{\text{geg. zijde} \times \textit{cosec}.\ \text{tegenov. h.}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst. Gev. 2.)

III. Gezochte zijde $= \dfrac{\text{geg. zijde} \times \textit{tang}.\ \text{aangr. h.}}{\text{Rad.}}$

$= \dfrac{\text{geg. zijde} \times \textit{cot}.\ \text{tegenov. h.}}{\text{Rad.}}$ (II. Voorst. Gev.)

IV. GEVAL.

GEGEVEN. De twee regthoekszijden.
GEZOCHT. De hoeken, en de hypotenusa.

St, VIII. 1. Reg. 1, 2. — L. G. Tr. §. 50.

OPLOSSING.

I. *cot.* gez. hoek $= \dfrac{\text{aangrenz. zijde} \times \text{Rad.}}{\text{tegenoverst. zijde.}}$ (II. Voorst. Gev.)

of *tang.* gez. hoek $= \dfrac{\text{tegenov. zijde} \times \text{Rad.}}{\text{aangrenzende zijde.}}$ (II. Voorstel).

II.

II. Hypotenusa $= \dfrac{\text{zijde} \times \text{Rad.}}{\textit{fin.}\ \text{tegenoverst. hoek,}}$
(I. Voorstel).

$= \dfrac{\text{zijde} \times \text{Rad.}}{\textit{cos.}\ \text{aangr. hoek.}}$
(I. Voorst. Gev. 1.)

$= \dfrac{\text{zijde} \times \textit{cosec.}\,\text{tegenoverst. hoek.}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst. Gev. 2.)

$= \dfrac{\text{zijde} \times \textit{sec.}\ \text{aangr. hoek.}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorstel).

III. Hypotenusa $= \sqrt{\text{eene zijde}^2 + \text{andere zijde}^2}$
(II. 16.)

$= \text{eene zijde} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\text{andere zijde}}{\text{eene zijde}}\right)^2}$

I. AANMERKING. Wanneer men, dat verre het gemakkelijkst is, den *radius* gelijk aan één stelt, moet men daarop in het gebruik der *sinus-tafels* letten: men moet namelijk alle *sinussen*, *cosinussen*, de *tangenten* tot 45° toe, en de *cotangenten* boven de 45°, als breuken aanmerken, en dus, indien men door de logarithmen werkt, overal 10 van het charakter in het *facit* aftrekken, wanneer het *facit* de *logarithmus* is eener gezochte zijde.

II. AANMERKING. Wanneer men met logarithmen werkt, zoo als men altijd in de praktijk doet, wordt de rekening korter, met, in plaats van een' *logarithmus* aftetrekken, zoo als in het II, III en IV. geval, zijn *arithmetisch complement* bijtevoegen. Insgelijks, wanneer men door logarithmen werkt, moet men altijd in het II. en IV. geval, de tweede uitdrukking van N°. III. gebruiken, die gemakkelijker te berekenen is.

OPLOSSING DOOR DE GUNTER'S SCHAAL. Wij hebben in het VIII. Boek, Afd. III. N°. II. den aard van de zoogenoemde GUNTER's of *Logarithmen*-schaal uitgelegd, en aangetoond hoe men dezelve gebruiken moet. Het is klaarblijkelijk dat men de vier gevallen, hier gemeld, ook door de zelve kan oplossen: want, men heeft in het

I. GEVAL. *Log.* Hyp. — *Log.* overst. zijde =
Log. rad. — *Log. fin* gegev. hoek.
Log. Hyp. — *Log.* aangr. zijde =
Log. rad. — *Log. cos.* gegev. hoek.

II.

II. GEVAL. *Log.* Hyp. — *Log.* geg. zijde =
Log. rad. — *Log. ſin.* tegenovergeſt. hoek.
Log. Hyp. — *Log.* gez. zijde =
Log. rad. — *Log. ſin.* tegenovergeſt. hoek.
Log. geg. zijde — *Log.* gez. zijde =
Log. rad. — *Log. tang.* tegenovergeſt. hoek.

III. GEVAL. *Log.* Hyp. — *Log.* geg. zijde =
Log. rad. — *Log. coſ.* aangr. hoek.
= *Log. rad.* — *Log. ſin.* tegenovergeſt hoek.
Log. geg. zijde — *Log.* gez. zijde =
Log. rad. — *Log. tang.* aangr. hoek.

IV. GEVAL. *Log.* aangr. zijde — *Log.* tegenov. zijde =
Log cot. gez. hoek — *Log. rad.*
Log. Hyp. — *Log.* zijde =
Log. rad. — *Log. ſin.* tegenovergeſt. hoek.
= *Log. rad.* — *Log. coſ.* aangr. hoek.

III. AANMERKING. Het is door middel van de oplosſing van regthoekige driehoeken, dat men berekent, in de Landmeetkunst, de hoogte van voorwerpen, enz.; en in de Stuurmanskunst al wat den koers, de verheid, en de bekomene lengte en breedte betreft, gelijk door voorbeelden blijken zal.

Men heeft zelfs, om alles voor de zeelieden gemakkelijk te maken, de zijden der regthoekige driehoeken, voor bepaalde lengten der ſchuinſche zijden, en voor alle hoeken des *quadrants* berekend, en in Tafels gebragt: waaruit de zoogenaamde *Streektafels* geboren worden, welke men in boeken over de Stuurmanskunst aantreft: en waarvan de beste en nuttigſte zijn die van DOUWES, te vinden in zijne *Zeemanstafels.*

Daarenboven vindt men nog op de pleinſchalen van Engelsch maakſel eene lijn getijteld *Long*, of *Longitude*, ook wel M. L. (*Miles-Longitude*), waardoor men op het gezigt, of met een' pasſer, het zelfde verrigt. Te weten, die lijn ſtaat in verband met eene lijn van *choorden*, of met eene van *Rhumbs*, en men gebruikt deze of gene naar mate de koers in ſtreken, of in graden is uitgedrukt: de *verheid*, of ſchuinſche zijde des driehoeks, wordt vooronderſteld 60 te zijn. Men neemt met den pasſer op de lijn der choorden, of der *Rhumbs*, den hoek die den koers aanduidt, van den meridiaan afterekenen; ſtelt de eene punt op 60 op de lijn *Longit.* of M. L.: de andere wijst de veranderde breedte aan, of de zijde des driehoeks aan den gemelden hoek grenzende, ſtellende 60 voor de ſchuinſche zijde, of

of voor de gezelde verheid; vervolgens neemt men met den pasfer den hoek die het complement is des voorgaanden, handelt op de zelfde wijze: de tweede punt des pasfers wijst de andere zijde des driehoeks aan, of hier de *afwijking* van den meridiaan.

Die zelfde fchaal dient nog tot een ander oogmerk, waarvan wij in XII. Bep. 11. Aanm. 2. fpreken zullen.

II. AFDEELING.

OVER DE SCHEEFHOEKIGE DRIEHOEKEN.

III. VOORSTEL. Fig. 179.

In alle driehoeken [ABC] ftaan de zijden tot elkander zoo als de *finusfen* der tegenovergeftelde hoeken: dat is

AB: BC = *fin.* ∠ C: *fin.* ∠ BAC:
AC: BC = *fin.* ∠ ABC: *fin.* ∠ BAC:
AC: AB = *fin.* ∠ ABC: *fin.* ∠ C.

St. VIII. 2. — L. G. Tr. §. 44.

BEREIDING. Stel AH loodregt op BC, en BE op AC.

BEWIJS. Uit het I. Voorftel: en III. 11.

I. AANMERKING. Indien de Δ ABC regthoekig was, bij voorbeeld in A: hadt men
AC: BC = *fin.* ABC: *fin.* L: dat is
AC: BC = *fin.* ∠ ABC: *rad.* het geen het I. Voorftel oplevert, het welk dus maar een bijzonder geval van dit meer algemeene Voorftel is.

II. AANMERKING. Ook het tweede Voorftel wordt zeer gemakkelijk uit dit afgeleid. Zoo ∠ A = L

$$\begin{aligned} AB : AC &= fin.\ C ; fin.\ B \\ &= cof.\ B : fin.\ B \\ &= 1 : \frac{fin.\ B}{cof.\ B} \\ &= 1 : tang.\ B.\ (VIII.\ 25). \end{aligned}$$

III. AANMERKING. Indien een der hoeken, bij v. ∠ CAB, ftomp is, zoude men eigenlijk in plaats van *fin.* ∠ CAB hebben *fin. fuppl.* ∠ CAB; doch wij hebben in de III. Bepaling van het VIII. Boek,

t Gevolg, gezien, dat het supplement eens hoeks den zelfden *finus* heeft als de hoek zelve: en wil men zulks uit dit Voorstel bewezen hebben, men beschouwe Fig. 221 aldaar is

△ DAB ∽ △ HCD en dus
AD : DC = AB : CH:
Maar in △ CAB is
AB : CA = *fin.* ∠ ACB : *rad.*
en in △ CAH is } I. Voorstel.
CH : CA = *fin.* ∠ CAH : *rad.*
dus (III. 11.)
AB : CH = *fin.* ∠ ACB : *fin.* ∠ CAD:
en dus
AD; DC = *fin.* ∠ ACB: *fin.* ∠ CAD;

Maar in △ ACD: is AD: DC = *fin.* ∠ ACD: *fin.* ∠ CAD; derhalve *fin.* ∠ ACB: *fin.* ∠ CAD = *fin.* ∠ ACD: *fin.* ∠ CAD en *fin.* ∠ ACB = *fin.* ∠ ACD: dat is, *fin.* *suppl.* ∠ ACD = *fin.* ∠ ACD.

IV. AANMERKING. Dit Voorstel dient om de zijden eens driehoeks te vinden, wanneer eene derzelve en de hoeken gegeven zijn: of om de derde zijde te vinden, wanneer er twee zijden, en een hoek, over eene derzelve gesteld, gegeven zijn; doch men lette in dat geval op het geen wij in de eerste Aanmerking op de II. Bepaling, over den aard dier onbekende hoeken gezegd hebben. Wij zullen de toepassing van dit Voorstel in de oplossing van het I. en II. geval zien.

IV. VOORSTEL. Fig. 180.

In alle ongelijkzijdige driehoeken [CAB], staat de som van twee zijden [BC + AB] tot derzelver verschil [BC — AB] als de *tangent* van de halve som der hoeken [A + C] over die twee zijden gesteld, tot den *tangent* van derzelver half verschil [A — C].

St. VIII. 3. — L. G. Tr. §. 47.

BEREIDING. Trek uit den hoek B, tusschen de beide bewuste zijden begrepen, als middelpunt, en met de kleinste der gegeven zijden BA als *radius*, eenen cirkel ADE. Verleng CB in E, trek door E en A, EA, en laat CF ⊥ op EA zijn; CF valt binnen, of buiten, den driehoek, naar mate ∠ CAE scherp of stomp is. Trek DA.

BEWIJS. Men bewijst eerst dat CE = BC + AB en CD = BC — AB.

2°. Dat ∠ ECF = ∠ ADE (I. Boek, Bep. 10) = ½ ∠ ABE (V. 5.) = ½ [∠ CAB + ∠ ACB] (I. 15.).

3°. Dat gevolgelijk ½ [∠ CAB + ∠ ACB] — ∠ ACB of

of ½ [∠ CAB — ∠ ACB] = ∠ ECF — ∠ ACB = ∠ FCA.

Uit dit alles maakt men vervolgens, met het II. Voorstel op de driehoeken FCE, en FCA toetepassen, door III. 11. en de gelijkvormigheid der △△ AED en EFC, het besluit op.

I. GEVOLG.

Daar dan

$$AB + BC : BC - AB = tang.\ \tfrac{1}{2}[A + C] : tang.\ \tfrac{1}{2}[A - C]$$

en ∠ A + ∠ C = *supplem.* ∠ B, volgt 1°. dat zoo hoek B bekend is, ∠ A + ∠ C het ook is: en gevolgelijk 2°. dat, zoo AB en BC bekend zijn, men *tang.* ½ [∠ A — ∠ C] vinden kan; waaruit de bepaling der hoeken A, en C volgt, door het *Lemma*, bl. 382. want de grootste hoek A = ½ [∠ A + ∠ C] + ½ [∠ A — ∠ C]: en de kleinste ∠ C = ½ [∠ A + ∠ C] — ½ [∠ A — ∠ C]. Dus dient dit Voorstel eigenaartig, om eenen driehoek optelossen, waarin twee zijden, en de hoek tusschen dezelve begrepen, bekend zijn; gelijk wij in de oplossing van het III. Geval zien zullen.

I. AANMERKING. Dit Voorstel heeft alleen plaats voor ongelijkzijdige driehoeken, doch niet voor gelijkzijdige, vermits als dan BC — AB = 0, zoo als ook het verschil van twee hoeken: het heeft ook geen plaats voor gelijkbeenige driehoeken in het algemeen: want (Fig. 34) wanneer de gegeven hoek ABC tusschen de gelijke beenen AB en BC staat; is BC — AB = 0 en ∠ A — ∠ C = 0: dus geldt dit Voorstel als dan niet: maar het zoude kunnen gelden, indien een der hoeken op de grondlijn BAC, of ACB, met de grondlijn AC, en een der beenen BC gegeven was; doch dan is het onnuttig, vermits als dan ook het tweede been en de derde hoek gegeven zijn, d. i. vermits er als dan niets in den driehoek onbekend is.

II. AANMERKING. Wanneer dan in een' gelijkbeenigen driehoek KBH (Fig. 79.), de beide beenen en de hoek KBH, tusschen dezelve begrepen, bekend zijn; laat men uit B eene loodlijn BI neder: daar deze den ∠ KBH en de grondlijn KH in twee gelijke deelen snijdt, is ½ ∠ KBH bekend, en dus, door oplossing van den regthoekigen driehoek KBI, vindt men gemakkelijk KI, waarvan het dubbeld is KH: dat is:

$$rad. : \text{sin}.\ \tfrac{1}{2} \angle KBH = KB : \tfrac{1}{2} KH$$

of,

of, wat nog veel gemakkelijker is, daar alle de hoeken van een gelijkbeenigen driehoek bekend zijn wanneer er een bekend is, vindt men de derde zijde door het vierde Voorstel.

II. GEVOLG. Fig. 180.

$$\text{Daar } \angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B$$

$$\text{is } \frac{\angle A + \angle C}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2} \angle B:$$

$$\text{of } \frac{\angle A + \angle C}{2} = \textit{Comp.}\ \tfrac{1}{2} \angle B:$$

dus

Tang. $\frac{1}{2}$ $[\angle A + \angle C] =$ *cot.* $\frac{1}{2}$ $\angle B$: waar door het Voorstel wordt

$BC + AB : BC - AB =$ *cot.* $\frac{1}{2}$ $\angle B$: *tang.* $\frac{1}{2}$ $[\angle A - \angle C]$ en derhalve wordt ook de grootste hoek $A =$ *comp.* $\frac{1}{2}$ $\angle B + \frac{1}{2}$ gevonden verschil:

en de kleinste $=$ *comp.* $\frac{1}{2}$ $\angle B - \frac{1}{2}$ gevonden verschil.

III. GEVOLG.

$BC - AB : BC + AB =$ *tang.* $\frac{1}{2}$ B: *cot.* $\frac{1}{2}$ $[A - C]$. (VIII. 26. Gev. 1.) en dus

$$\textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ [A - C] = \textit{tang.}\ [\tfrac{1}{2}\ B] \times \left(\frac{BC + AB}{BC - AB}\right)$$

$$\text{of } \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ [A - C] = \textit{tang.}\ [\tfrac{1}{2}\ B] \times \left(\frac{1 + \frac{AB}{BC}}{1 - \frac{AB}{BC}}\right).$$

III. AANMERKING. Men beboeft dan om die hoeken te vinden de grootte der gegeven zijden niet te kennen: het is genoeg dat derzelver rede $\frac{AB}{BC}$ bekend zij.

IV. GEVOLG.

Indien men in het III. Gevolg stelt $\frac{AB}{BC} =$ *tang.* a: is

$$\textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ [A - C] = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ B \times \left(\frac{1 + \textit{tang.}\ a}{1 - \textit{tang.}\ a}\right) = \textit{tang.}$$

$\frac{1}{2}$ B $\times$ *tang.* $[45^\circ + a]$. VIII. 32. N. 68.

V.

V. VOORSTEL. Fig. 181.

In alle ongelijkzijdige driehoeken staat de grootste zijde [AC] tot de som der twee overige [BC + AB], als derzelver verschil [BC — BA] tot het verschil der stukken [EC — AE], die op de grootste zijde gevormd worden door de loodlijn, uit den top des tegenoverstaanden hoeks [B] nedergelaten.

St. VIII. 4. — L. G. Tr. §. 47.

BEREIDING. Zij BE ⊥ op AC: Trek, uit B, als middelpunt en met AB, de kleinste zijde, als *radius*, eenen cirkel ADFG, die AC en BC in D en F snijdt. Verleng CB tot in G, trek BD. Dan is AE = ED; GC = BC + AB; FC = BC — AB; en DC = EC — ED = EC — AE.

BEWIJS. Uit V. 17 het 1 Gevolg.

I. AANMERKING. Dit kan veel eenvoudiger, en zonder eenige bereiding bewezen worden: en dit bewijs ben ik aan den Heer REHUEL LOBATTO verschuldigd. Immers (II. 16. Gev. 4.) is $\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$: waaruit $\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{AE}^2$: d. i. (II. 10.) [AB + BC] × [BC — AB] = [CE + AE] × [CE — AE]. Maar CE + AE = AC: gevolglijk AC: BC + AB = BC — AB: EC — AE.

GEVOLG.

Daar dan

$$AC : BC + AB = BC - AB : EC - AE:$$

volgt het, dat men, als AC, AB, BC gegeven zijn, EC — AE vinden kan: en daaruit zijn EC en AE afzonderlijk bekend; want

$$EC + AE = AC \text{ is bekend: maar}$$

$$EC = \frac{[EC + AE] + [EC - AE]}{2} \text{ en}$$

$$AE = \frac{[EC + AE] - [EC - AE]}{2}.$$ (*Lemma* van dit Boek).

Wanneer nu AE en EC bekend zijn, vindt men, door het I. Voorstel, in de regthoekige driehoeken ABE en CBE, de hoeken A, en C: waaruit de hoeken ABE, CBE,

CBE, en ABC volgen: zoo dat men door dit Voorstel, als voorbereiding ter bepaling der stukken AE en EC, en voorts door het I. Voorstel, de hoeken eens driehoeks, waarvan de drie zijden gegeven zijn, vinden kan.

II. AANMERKING. Om de zelfde reden, die wij in de 1. Aanmerking op het voorgaande Voorstel gemaakt hebben, is dit Voorstel niet toepasselijk op de gelijkbeenige driehoeken, wanneer de grondlijn AC de grootste zijde is, noch ook op de gelijkzijdige: maar in eenen gelijkzijdigen driehoek zijn de hoeken van zelve bekend (I. 27. Gev. 3.) en in eenen gelijkbeenigen, daar de loodlijn [BK: fig. 34.] den tophoek en de grondlijn in twee gelijke deelen snijdt, zijn de hoeken door de oplossing van eenen regthoekigen driehoek ABK te vinden: want:

AB: ½ AC [of AK] = *rad.* : *cos.* ∠ A, of tot *sinus* ½ ∠ ABC.

VI. VOORSTEL. Fig. 66.

In alle driehoeken staat de *radius* tot den *cosinus* van een der hoeken, als de dubbelde regthoek der zijden welke dien hoek bevatten tot het verschil tusschen de som van de vierkanten dier zelfde zijde, en het vierkant van de derde zijde; d. i.

$1 : cos. \angle BCA = 2\,AC \cdot BC : [\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2] - \overline{BA}^2$.

L. G. Tr. §. 45.

BEWIJS. De loodlijn BD neergelaten zijnde, is uit II. 19: $\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \mp 2\,AC \cdot CD$; maar, indien men in △ BCD, BC tot *radius* aanneemt, is BD de *sinus* van den ∠ BCD, en CD deszelfs *cosinus*: derhalve $1 : BC = cos. \angle BCD : CD$ en $CD = BC \times Cos. BCD$; maar $cos. \angle BCD = \mp cos. \angle BCA$, naar mate ∠ BCA stomp of scherp is (VIII. Bep. 4. Gev. 2.) gevolgelijk $\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \mp 2\,AC \times (\pm BC)\ cos. BCA$: dat is, in alle gevallen, $\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \cdot BC \cdot cos. \angle BCA$: of $2\,AC \cdot BC\ cos. \angle BCA = (\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2) - \overline{BA}^2$: waaruit het Voorstel volgt.

I. AANMERKING. Dit Voorstel, het welk geheel op II. 19. steunt, kan beschouwd worden als de geheele driehoeksmeting in zich bevattende: immers indien men, kortheidshalve, de drie zijden eens driehoeks door de letters *a*, *b*, *c*, uitdrukt, en de hoeken welke over dezelve staan door gelijknamige letters A, B, C; geeft dit voorstel dit

I. GEVOLG.

$$1.\ Cos.\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

$$2.\ Cos.\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}.$$

$$3.\ Cos.\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$

II. AANMERKING. Het is op deze formules dat de Heer PUISSANT gevestigd heeft al wat hij van de driehoeks-meting zegt in zijn uitmuntend werk *Traité de Géodésie.*

III. AANMERKING. Indien ∠ A = L, is $cof.$ A = 0 en $a^2 = b^2 + c^2$; het geen het *Theorema* van PYTHAGORAS oplevert: stellende die waardij in de twee overige formules: komt $cof.$ B = $fin.$ C = $\frac{c}{a}$ en $fin.$ B = $cof.$ C = $\frac{b}{a}$: derhalve 1 : $fin.$ B = $a : b$ dat ons eerste Voorstel is: verder $\frac{1}{cof.\ B}$ = $fec.$ B = $\frac{a}{c}$ of 1 : $fec.$ B = [illegible] dat het tweede gedeelte is van ons eerste Voorstel: eindelijk $\frac{fin.\ B}{cof.\ B}$ = $tang.$ B = $\frac{b}{c}$; dat is 1 : $tang.$ B = $c : b$ het geen ons tweede Voorstel oplevert.

II. GEVOLG.

$$Sin.\ A = \frac{a\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2\,abc}.$$

BEWIJS. $Sin.^2\,(A) = 1 - co/.^2\,(A) = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2\,bc)^2}$

$= \frac{4\,a^2\,b^2\,c^2 - a^2\,(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,a^2\,b^2\,c^2}$: en derhalve

$$Sin.\ A = \frac{a\sqrt{4\,b^2\,c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2\,abc} =$$

$$\frac{a\sqrt{2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2\,abc}.$$

IV. AANMERKING. Men vergelijke hier mede de uitdrukkingen in het Gevolg van het VIII. Voorstel, en in de Aanmerking op het IX. Voorstel gegeven.

V. AANMERKING. Men stelle, gemakshalve, voor het *radicaal* dat in het II. Gevolg voorkomt, en uit bekende grootheden bestaat, $\sqrt{D}$; derhalve *sin.* A $= \frac{a\sqrt{D}}{2\,abc}$: en insgelijks *sin.* B $= \frac{b\sqrt{D}}{2\,abc}$, en *sin.* C $= \frac{c\sqrt{D}}{2\,abc}$: waaruit volgt *sin.* A : *sin.* B : *sin.* C $= a : b : c$: het geen ons III. Voorstel oplevert.

VI. AANMERKING. Uit *sin.* A : *sin.* C $= a : c$ volgt *componendo* en *dividendo*, *sin.* A + *sin.* C : *sin.* A − *sin.* C $= a + c : a - c$ en

$$\frac{\textit{sin. } A + \textit{sin. } C}{\textit{sin. } A - \textit{sin. } C} = \frac{a+c}{a-c}$$: en dus uit VIII. 32. N°. 82.

$$\frac{\textit{tang. } \frac{1}{2}(A+C)}{\textit{tang. } \frac{1}{2}(A-C)} = \frac{a+c}{a-c}$$ of:

$a + c : a - c =$ *tang.* $\frac{1}{2}$(A + C) : *tang.* $\frac{1}{2}$(A − C). Dat ons IV. Voorstel is.

Alle de hoofd-voorstellen van de driehoeks-meting worden derhalve uit dit VI. Voorstel *algebraisch* afgeleid: maar het blijkt tevens hoe veel de *geometrische* bewijstrant eenvoudiger en wezenlijk fraaijer is, hoewel ook de algebraische in andere opzigten zijn nut heeft, en verdient gekend te worden.

III. GEVOLG.

$$\textit{Sin. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\left[\frac{a+b+c}{2} - b\right] \times \left[\frac{a+b+c}{2} - c\right]}{bc}}.$$

BEWIJS. Uit VIII. 32. N°. 29. is *sin.* $\frac{1}{2}$ A $= \frac{1 - \textit{cos. } A}{2}$ derhalve uit Gev. 1. is

$$\textit{sin.}^2 (\tfrac{1}{2} A) = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{4\,bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2\,bc + c^2)}{4\,bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4\,bc}$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \times \left(\frac{a-b+c}{2}\right)}{bc}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right) \times \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\right]}{bc}.$$

waaruit het gestelde volgt.

VII. AANMERKING. Dit geeft een middel op om, wanneer drie zijden gegeven zijn, den hoek te vinden welke tusschen twee derzelve begrepen is: tusschen die namelijk welke van de halve som der zijden worden afgetrokken.

IV. GEVOLG.

$$Cos.\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\left(\frac{b+c+a}{2}\right)\times\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{bc}}.$$

BEWIJS. Uit VIII. 32. N°. 30. is $cos.^2 (\tfrac{1}{2} A) = \frac{1 + cos.\ A}{2}$

en gevolgelijk hier uit het I. Gevolg.

$$cos.^2 (\tfrac{1}{2} A) = \frac{2\,bc - a^2 + b^2 + c^2}{4\,bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4\,bc} =$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}(b+c+a)\times\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{bc}$$: waaruit het gestelde volgt.

VIII. AANMERKING. Men kan derhalve, de drie zijden gegeven zijnde, den hoek A door deszelfs *cosinus* vinden.

IX. AANMERKING. De oplossingen in het derde en vierde Gevolg gegeven, hebben dit voordeel, dat ½ A altijd kleiner is dan 90°: en men derhalve altijd voor den hoek dat getal neemt, het welk in de Tafels naast den gevonden *sinus* of *cosinus* staat; zonder dat men behoeve nategaan, (het geen voor *sin.* A en *cos.* A dikwerf het geval is) of men den hoek die naast den gevonden *sinus* of *cosinus* staat, dan wel zijn *supplement*, nemen moet.

V. GEVOLG.

$$a = \sqrt{(b-c)^2 + 4\,bc\,sin.^2 (\tfrac{1}{2} A)}.$$

BEWIJS. Uit het eerste Gevolg is

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,cos.\,A:$$

en uit VIII. 34. N°. 111.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,[1 - 2\,sin.^2 (\tfrac{1}{2} A)]:$$

derhalve

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc + 4\,bc\,sin.^2 (\tfrac{1}{2} A) =$$

$(b-c)^2 + 4\,bc\,sin.^2 (\tfrac{1}{2} A)$ waaruit het gestelde volgt.

X. AANMERKING. Men kan derhalve, zonder eerst de hoeken te bepalen, de derde zijde vinden van een' driehoek, waarin twee zijden en de tusschen dezelve begrepen hoek gegeven zijn.

VII. VOORSTEL. Fig. 66.

In alle driehoeken, staat de regthoek uit eene zijde [BC] en den *sinus* van den aangrenzenden hoek [BCD], tot de som of het verschil der regthoeken uit de zelfde zijde en den *co-*

 si-

finus van den zelfden hoek, en uit de andere zijde [AC] gemelden hoek bevattende, en den *radius*, als de *tangent* van den hoek [A] over de eerste der gemelde zijden staande tot den *radius*; dat is BC × *fin.* ∠ BCD: AC ∓ BC *cof.* ∠ BCD = *tang.* ∠ A: 1.

CAGNOLI, §. 229.

BEWIJS. Zij BD loodregt op AC: dan is in △ ABD, *tang.* A $= \frac{DB}{AD}$ Voorst. II): en in

△ BCD is DB = BC × *fin.* ∠ BCD (Voorst. I.)
DC = BC × *cof.* ∠ BCD (Voorst. I. Gev. 1.).
Maar AD = AC ∓ DC: derhalve

tang. A $= \frac{BC \times fin. \angle BCD}{AC \mp BC \cdot cof. BCD}$: waaruit het Voorstel volgt.

I. AANMERKING. Indien de hoek C scherp is: valt de loodlijn binnen den driehoek, en men heeft AC — BC . *cof.* BCD: zoo de hoek C stomp is, valt CD buiten den driehoek, en men heeft AC + BC . *cof.* BCD.

II. AANMERKING. Indien de hoek C scherp is, kan de gezochte hoek A scherp, of regt, of stomp zijn.

Het eerste heeft plaats zoo lang BC . *cof.* BCD < AC: want dan is de *tangent positief.*

Het tweede zoo BC . *cof.* BCD = AC: want dan is de noemer in de breuk *nul*: het geen te kennen geeft dat *tang.* A *oneindig*, en dus ∠ A = L is.

Het derde, zoo BC . *cof.* BCD > AC: want dan is de noemer *negatief*, en dus *tang.* A *negatief*; gevolgelijk A > 90°.

REGELS TER OPLOSSING DER VIER GEVALLEN DIE IN DE SCHEEFHOEKIGE DRIEHOEKEN PLAATS KUNNEN HEBBEN.

I. GEVAL. Fig. 180.

GEGEVEN. Twee hoeken, A en C, en eene zijde AC.
GEZOCHT. I. De derde hoek B,
II. De twee overige zijden, AB en BC.

B. VIII. 2. Gev. 1. reg. 3. — L. G. Tr. §. 53.

OPLOSSING.

I. Gezochte hoek = *Suppl.* som der gegeven hoeken.

$$\text{II. Gez. zijde} = \frac{\textit{sin. } \text{overst. hoek} \times \text{geg. zijde}}{\textit{sin. } \text{hoek over de gegev. zijde.}}$$

(III. Voorstel.)

II. GEVAL.

GEGEVEN. Twee zijden, AB, BC, en een hoek C, doch die niet tusschen de zijden begrepen is.

GEZOCHT. I. De andere hoek A, die over eene der gegeven zijden staat.

II. De hoek B tusschen de gegeven zijden begrepen.

III. De derde zijde AC.

L. G. Tr. §. 54.

OPLOSSING.

I. *sin.* gezochten hoek over de gegev. zijde

$$= \frac{\text{tegen overst. zijde} \times \textit{sin. } \text{gegev. hoek}}{\text{zijde over den gegeven hoek.}}$$

(III. Voorst.)

AANMERKING. Daar de *sinus* van een' hoek ook de *sinus* is van het *supplement* des zelfden hoeks, heeft hier die onzekerheid plaats, waarvan (II. Bep. I. Aanm.) gesproken is. Doch die onzekerheid verdwijnt in twee gevallen: voor eerst, wanneer de zijde over den gegeven hoek grooter is dan die over den gezochten hoek: want dan moet de gezochte hoek kleiner dan de gegevene, en dus ook noodwendig scherp zijn: en ten tweede, wanneer de zijde over den gezochten hoek grooter is dan de zijde over den gegeven hoek, en de gevonden scherpe hoek kleiner dan de gegeven. Immers, daar als dan de gezochte hoek grooter dan de gegeven zijn moet, zal men het supplement, of den stompen hoek, moeten nemen.

II. Derde hoek = *suppl.* som der twee overigen

$$\text{III. Derde zijde} = \frac{\textit{sin } \text{hoek over dezelve} \times \text{gegev. zijde}}{\textit{sin. } \text{hoek over de gegev. zijde.}}$$

(N°. 1. en Voorst. III)

III. GEVAL.

GEGEVEN. Twee zijden: en de hoek tusschen dezelve begrepen.

GEZOCHT. I. De twee overige hoeken.
II. De derde zijde.

St. VIII. 3. Gev. 4. — L. G. Tr. § 55.

I. OPLOSSING.

I. *Tang.* ½ verschil der gezochte hoeken =

$$Cot.\ \tfrac{1}{2}\ \text{gegev. hoek} \times \frac{\text{versch. gegev. zijden}}{\text{som. gegev. zijden.}}$$

Grootste der gez. hoeken = Compl. ½ geg. hoek + ½ verschil.
Kleinste der gez hoeken = Compl. ½ geg. hoek − ½ verschil.
(IV. Voorst. en deszelfs 2 Gevolg).

II. De hoeken dus bekend zijnde, zoekt men de derde zijde door het 1. Geval: namelijk

$$\text{Derde zijde} = \frac{sin.\ \text{overstaanden hoek} \times \text{gegev. zijde}}{sin\ \text{hoek over de gegev. zijde.}}$$

II. OPLOSSING.

Men zoeke in de Tafels den hoek [*a*] waarvan de *tangent* uitgedrukt wordt door de grootste der gegeven zijden, gedivideerd door de kleinste: dat is zij *tang.* $a = \frac{AB}{BC}$: dan is *cot.* ½ verschil der gegeven hoeken = *tang.* ½ gegeven hoek × *tang.* [45° + *a*] (uit IV. Gev. 4).

CAGNOLI. §. 230.

AANMERKING. Deze Oplossing komt in de Sterrekunde te pas: en doet tevens zien dat het, om de hoeken te bepalen, niet noodig is de eigenlijke hoegrootheid der zijden van den driehoek te kennen; maar dat de rede derzelver te weten daartoe genoegsaam is.

III. OPLOSSING.

Tang. gezochten hoek =

$$\frac{\text{tegenoverst. zijde} \times sin.\ \text{gegev. hoek}}{\text{tweede gegev. zijde} \mp \text{tegenoverst. zijde} \times cos.\ \text{geg. hoek.}}$$

(Voorst. VII.)

namelijk —, zoo de gegeven hoek scherp; +, zoo hij stomp is

CAGNOLI. §. 229.

AANMERKING. Deze Oplossing dient alleen voor de hoeken.

IV.

IV. OPLOSSING.

Voor *gezochte zijde*

Zij $tang.\ d = \frac{2\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}\ \text{geg. hoek}}{\text{verschil gev. zijden}} \times \sqrt{\text{prod. der geg. zijden}}$

dan is

$$gezochte\ zijde = \frac{\text{verschil gegev. zijden}}{cof.\ d}.$$

CAGNOLI. §. 227, 228.

BEWIJS. Uit VI. Gev. 5. is

$a^2 = \sqrt{(b - c)^2 + 4\,bc\,fin.^2\,(\frac{1}{2}\,A)}:$

derhalve zoo $tang.\ d = \frac{2\ fin.\ (\frac{1}{2}\ A) \times \sqrt{bc}}{b - c};$

is VIII. 39. is $a = \frac{b - c}{cof.\ d}.$

AANMERKING. Door deze Oplossing vindt men de gevraagde zijde, zonder alvorens de hoeken gevonden te hebben.

IV. GEVAL. Fig. 181.

GEGEVEN. De drie zijden.
GEZOCHT. De drie hoeken.

St. VIII. 5.

I. OPLOSSING.

Men laat op de grootste zijde eene loodlijn uit den tegenovergestelden hoek vallen: waaruit (I. 16.) volgt dat die lijn altijd binnen den driehoek valt, en de grondlijn in twee stukken deelt.

I. Verschil der stukken van de grondlijn =
$\frac{\text{som der zijden} \times \text{verschil der zijden}}{\text{grondlijn}}$ (V. Voorstel)

dus

grootste stuk = $\frac{1}{2}$ (grondlijn + verschil der stukken)
kleinste stuk = $\frac{1}{2}$ (grondlijn − verschil der stukken)

II. *Cof.* hoek op de grondlijn = $\frac{\text{aangrenzend stuk} \times Rad.}{\text{aangrenz. zijde}}$
(I. Voorstel 1. Gev.).

III. Hoek in den top = suppl. van de som der hoeken op de grondlijn.

II. OPLOSSING.

Om de hoeken te vinden, zonder behulp der loodlijn.

I. cos. ½ hoek =

$\sqrt{\dfrac{\text{halve som der zijden} \times (\tfrac{1}{2}\text{ som} - \text{tegenoverst. zijde})}{\text{product der aangrenzende zijden.}}}$

Uit Voorst. VI. Gev. 4.

II. *sin.* ½ hoek =

$\sqrt{\dfrac{(\tfrac{1}{2}\text{ som der zijden} - \text{eene aangr. z.}) \times (\tfrac{1}{2}\text{ som} - \text{and. aangr. z.})}{\text{product der aangrenzende zijden.}}}$

Uit Voorst. VI. Gev. 3.

CAGNOLI. §. 233.

AANMERKING. De Oplossing kan in zeer vele gevallen te pas komen, en heeft zeer veel gelijkheid met die, welke men in de klootsche driehoeks-meting voor het zelfde geval gebruikt.

L. G. Tr. §. 57.

OPLOSSINGEN DOOR DE GUNTER'S, OF LOGARITHMEN-SCHAAL.

Men kan de gewone oplossingen, dat is die, welke wij *eerste* oplossingen genoemd hebben. voor deze vier gevallen, even als voor de regthoekige driehoeken, door de *Gunter's*, of Logarithmen-schaal verrigten: want men heeft:

I. GEVAL. Log. gez. zijde — Log. gegev. zijde = Log. *sin.* overst. hoek — Log. *sin.* hoek over de gegev. zijde.

II. GEVAL. Log. *sin.* hoek over de geg. zijde — Log. *sin.* geg. hoek. = Log. overst. zijde — Log. zijde over den geg. hoek.

Log. gez. zijde — Log. geg. zijde = Log. *sin.* hoek over de gez. zijde — Log. *sin.* hoek over de geg. zijde.

III. GEVAL. Log. *tang.* ½ verschil der gezochte hoeken — Log. *tang* compl. ½ geg. hoek = Log. versch. geg. zijden — Log. som geg. zijden.

Log. derde zijde — Log. geg. zijde = Log. *sin.* hoek over de gez. zijde — Log. *sin.* hoek over de gegeven zijden.

AAN-

AANMERKING OP HET III. GEVAL.

Wij hebben reeds hier boven gezien (VIII. Afd. III. N°. II. §. 6.) dat het gebruik der GUNTER'S-*schaal* moeijelijkheid kan doen ontstaan voor de *tangenten*, wanneer de hoeken grooter dan 45° zijn, en gezegd hoe men dan te handelen hebbe. Doch het zal niet onnuttig zijn dit derde Geval nog wat nader toetelichten.

Laten de bekende zijden zijn Z en z: de gegeven hoek C: het half verschil der gezochte hoeken x, dan is de regel

$$\text{Log. } tang.\ \tfrac{1}{2} x - \text{Log. } cot.\ \tfrac{1}{2} C = \text{Log. } (Z - z) - \text{Log. } (Z + z)$$

of

$$\text{Log. } cot.\ \tfrac{1}{2} C - \text{Log. } tang.\ \tfrac{1}{2} x = \text{Log. } (Z + z) - \text{Log. } (Z - z).$$

Dat is, neem met den passer op de lijn der *numeri*, of getallen, Log. $(Z + z)$ — Log. $(Z - z)$. Zet op de lijn der *tangenten* de eene punt van den passer op *tang. compl.* $\tfrac{1}{2}$ C: de andere punt wijst het getal aan dat $\tfrac{1}{2} x$ uitdrukt.

Zoo lang *cot.* $\tfrac{1}{2}$ C < *radius* of < *tang.* 45°, is er geen zwarigheid: maar wanneer *cot.* $\tfrac{1}{2}$ C > r, kan men verlegen staan: als dan neemt men het omgekeerde van den *cotangent*, dat is $\frac{1}{tang.}$: immers om dat *cot.* $\tfrac{1}{2}$ C $= \frac{r^2}{tang.\ \tfrac{1}{2} C}$, is

Log. *cot.* $\tfrac{1}{2}$ C = 2 Log. r — Log. *tang.* $\tfrac{1}{2}$ C: en derhalve is de regel

$$2 \text{ Log. } r - \text{Log. } tang.\ \tfrac{1}{2} C - \text{Log. } tang.\ \tfrac{1}{2} x = \text{Log. } (Z + z) - \text{Log. } (Z - z)$$

of

$$\text{Log. } r - \text{Log. } tang.\ \tfrac{1}{2} x = \text{Log. } tang.\ \tfrac{1}{2} C - \text{Log. } r + \text{Log. } (Z + z) - \text{Log. } (Z - z)$$
$$= \text{Log. } tang.\ \tfrac{1}{2} C - [\text{Log. } r - (\text{Log. } (Z + z) - \text{Log. } (Z - z))]:$$

het geen dezen regel geeft. Neem met den passer Log. $(Z + z)$ — Log. $(Z - z)$. Stel de eene punt op 45°; neem, van de plaats af daar de andere punt valt den afstand tot *tang.* $\tfrac{1}{2}$ C: zij die afstand A, en houdt denzelven onveranderd; dan heeft men Log. r — Log. *tang.* $\tfrac{1}{2}$ x = A: of Log. r — A = Log. *tang.* $\tfrac{1}{2}$ x. Stel dan de eene

eene punt des passers op *tang.* 45° : daar de andere valt is $\frac{1}{2}$ *x*.

IV. GEVAL. *Log.* verschil der stukken — *Log.* verschil der zijden =
Log. som der zijden — *Log.* grondlijn.
Log. *rad.* — *Log.* *cos.* hoek op de grondlijn =
Log. aangr. zijde — *Log.* aangr. stuk.

VIII. VOORSTEL. Fig. 66.

De oppervlakte, of de inhoud, eens driehoeks [ABC] wordt uitgedrukt door het halve product van twee zijden [AB, BC] en van den *sinus* des hoeks tusschen die twee zijden begrepen.

BEWIJS. Volgens IV. 9. wordt de inhoud des Δ ABC uitgedrukt door $\frac{1}{2}$ AB . CI; maar in Δ AIC is (Voorst. I.) CI : AC = *sin.* ∠ A : *r*; derhalve CI . *r* = AC . *sin.* ∠ A: en gevolgelijk

$$\Delta\ ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot sin. \angle A}{2\,r} = \frac{AB \cdot AC \cdot sin. \angle A}{2} \text{ indien } r = 1$$

I. GEVOLG.

$$Sin. \angle A = \frac{2\ \Delta\ ABC}{AB \cdot AC}.$$

I. AANMERKING. Indien men dit Gevolg vergelijkt met het 2. Gevolg van het VI. Voorstel, dat hierop neer komt.

$$Sin.\ A = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2\,AB \cdot AC}$$

zal het volgen dat

$$\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} =$$

Δ ABC moet zijn: Dat dit zoo is zal blijken uit de Aanmerking op Voorstel IX.

II. AANMERKING. Indien men het geen in VIII. 10. Bep. in de Aanmerking gezegd is weder opvat, zal het blijken dat (Fig. 122.) Δ LCH uitgedrukt wordt door $\frac{LC \cdot CH \cdot sin. \angle LCH}{2} = \frac{r^2\ sin. \angle LCH}{2}$.

Zoo dan ∠ LCH = $\frac{\pi}{m}$ gesteld wordt, zijnde π de halve omtrek als 1 de *radius* is, wordt Δ LCH = $\frac{1}{2}$ *r sin.* $\left(\frac{\pi}{m}\right)$: en derhalve *segment* LKH = *sector* LCHK — Δ LCH = $\frac{B \times r}{2}$ —

r

$\frac{r}{2} . \sin. \left(\frac{\pi}{m}\right)$: maar zoo B de boog des *sectors* is, kan die boog uitgedrukt worden door $\frac{\pi r}{m}$: waaruit voortvloeit dit

II. GEVOLG.

Segment wiens boog is $\frac{\pi}{m} = \frac{r}{2}\left[\frac{\pi r}{m} - \sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]$.

III. AANMERKING. Zoo $\frac{\pi}{m} > \frac{1}{2}$ omtrek, is $\angle \frac{\pi}{m} > 180^\circ$, en gevolgelijk wordt deszelfs *sinus* negatief. Zoo dat als dan de formule is, *segment* wiens boog is $\frac{\pi}{m} = \frac{r}{2}\left(\frac{\pi r}{m} + \sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)$. Zij $m = 1$: dan is $\frac{\pi}{m} = 0$: en het *segment* wordt $\frac{\pi r^2}{2}$ = halven cirkel; zij $m = 2$: dan is *segment* wiens boog $\frac{\pi}{m}$ of $90^\circ = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$; zoo $m = \frac{2}{3}$ is *segment* wiens boog $\frac{3}{2}\pi$ of $270^\circ = \frac{3}{4}\pi r^2 + \sin.\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2}$: enz.

IX. VOORSTEL. Fig. 66.

De inhoud, of de oppervlakte, eens driehoeks [ABC] wordt uitgedrukt door den wortel uit het product van de halve som der drie zijden, en die halve som, daarvan afgetrokken, iedere zijde afzonderlijk.

L. C. Tr. p. 295.

BEREIDING. Zij BD de nedergelaten loodlijn: men drukke kortheidshalve (Voorstel VI Aanm 1. de zijden CB, AC, AB, door de kleine letters a, b, c, uit: en de over ieder derzelver staande hoeken door de groote letters A, B, C, welke in de daad aan de toppen der gemelde hoeken staan. Zij p (de eerste letter van het woord *peripherie*, of omtrek) $= a + b + c$, de som der drie zijden. Dat de loodlijn BD door y en CD door x aangeduid worde.

BEWIJS. Uit II. 16. is: 1°. $a^2 = y^2 + x^2$: 2°. $c^2 = y^2 + (x + b)^2$: en dus 3°. $a^2 - c^2 = x^2 - x^2 + 2bx - y^2 =$

$2bx - b^2$: en 4°. $x = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$: 5°. Maar om dat (uit 1°.) $y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$ II. 10. is

$$6°.\ y^2 = \left(a + \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}\right)\left(\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b} - a\right) =$$

$$\frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - 2ab - c^2)}{4b^2} =$$

$$\frac{1}{4b^2}(\overline{a + b}^2 - c^2)(\overline{a - b}^2 - c^2) =$$

$$\frac{1}{4b^2}(\overline{a + b + c} \cdot \overline{a + b - c})(\overline{a - b + c} \cdot \overline{c - a + b}) =$$

$\frac{1}{4} \cdot b^2, \times p \cdot (p - 2c) \cdot (p - 2b) \cdot (p - 2a)$: dat is

$$7°.\ y^2 = \frac{1}{4b^2} \times 2 \times \tfrac{1}{2}p \times 2(\tfrac{1}{2}p - c) \times 2(\tfrac{1}{2}p - b) \times 2(\tfrac{1}{2}p - a) =$$

$$= \frac{16}{4b^2} \times \tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p - a) \cdot (\tfrac{1}{2}p - b) \cdot (\tfrac{1}{2}p - c):$$ gevolgelijk

$$8°.\ y = \frac{2}{b} \times \sqrt{\tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p - a)\tfrac{1}{2}(p - b)(\tfrac{1}{2}p - c)}:$$

Maar IV. 9. $\Delta\ ABC = \frac{by}{2}$: derhalve

9°. $\Delta\ ABC = \sqrt{\tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p - a)(\tfrac{1}{2}p - b)(\tfrac{1}{2}p - c)}$: dat het Voorstel is.

I. AANMERKING. Uit N°. 8. verkrijgt men

$$\frac{b^2 y^2}{4} = \left(\frac{by}{2}\right)^2 = (\text{Inhoud } \Delta\ ABC)^2 =$$

$$\frac{b^2}{16 b^2} \times p \cdot (p - 2a)(p - 2b)(p - 2c) = \tfrac{1}{4}p(p - 2a) \times$$

$$\frac{(p - 2b)(p - 2c)}{4}$$: gevolgelijk

$\tfrac{1}{4}p(p - 2a)$: inhoud Δ ABC = inhoud Δ ABC:

$\frac{(p - 2b)(p - 2c)}{4}$: het geen oplevert dit

I. GEVOLG.

De inhoud van een' driehoek is middel-evenredig tusschen het vierde gedeelte van den regthoek uit den omtrek, en het verschil van den omtrek met het dubbeld van eene der zijden, en het vierde gedeelte van den regthoek uit het verschil van den

den omtrek met het dubbeld van de tweede zijde, en het verschil deszelven met het dubbeld van de derde zijde.

II. AANMERKING. Indien men voor p deszelfs waarde $a + b + c$ in de formule van dit Voorstel stelt, wordt die formule, nà de noodige herleidingen, $\Delta ABC =$
$$\sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4}}$$
en derhalve is $4 \Delta ABC =$
$$\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$
Indien men de uitdrukking vergelijkt met het 2. Gevolg van het VI. Voorstel, zal het blijken dat (Fig 66; $fin. A = \frac{4 \Delta ABC}{2 AB . BC} = \frac{2 \Delta ABC}{AB . BC}$: gelijk wij in het Gevolg van het voorgaande VIII. Voorstel gezegd hebben.'

Men ziet derhalve hoe men uit verschillende gronden altijd tot besluiten komt welke volmaakt met elkander overeenkomen, hoe veel zij ook in den eersten opslag schijnen te verschillen. Men vergelijke met de formules voor den inhoud eens driehoeks in dit en in het voorgaand Voorstel gegeven, VI. 3. Gev 2. VI. 4. Gev. 1. en de Aanmerking daarop.

III. AANMERKING. Het bewijs dat wij voor dit Voorstel gegeven hebben, hoe wel zeer naauwkeurig, is geenzins in den trant der Ouden, waar mede, in tegendeel, volkomen overeenkomt de volgende Geometrische constructie door CASTILLON in de *Memoires de l'Academie de Berlin*, voor het jaar 1766 opgegeven: en die wederom een treffelijk voorbeeld oplevert van den uitmuntenden bewijstrant der Ouden.

BEREIDING. Zij, Fig. 182, BCA de driehoek, 1°. verleng CA wederzijds: 2°. trek uit C met den *radius* CB den cirkel GBH: 3°, Uit A met den *radius* AB den cirkel DBE; vervolgens 4°. Trek BG, BD, BH, BE en 5°. BF $\perp$ op AC.

Uit deze bereiding volgt:

6°. $GE = GC + CA + AE = CB + CA + AB = a + b + c = p$.

7°. $CE = CA + AE = CA + AB = b + c$.

8°. $CD = AD - CA = AB - CA = c - b$.

9°. $GE - DH = GD + HE = GC - DC + HE = CH + HE - DC = CE - DC = CA + AE - DC = CA + AD - DC = CA + CA + DC - DC = 2CA = 2b$.

10°. $DH = GE - 2CA = a + b + c - 2b = p - 2b$.

11°. $HE = GE - GH = GE - 2GC = GE - 2BC = a + b + c - 2a = p - 2a$.

12°. $DG = GE - DE = GE - 2AD = GE - 2BA = a + b + c - 2c = p - 2c$.

BE-

BEWIJS. Uit V. 13 is $\overline{BF}^2 = DF \cdot FE = GF \cdot FH$: en

13°. $DF : BF = BF : FE$: en

14°. $EF : GF = FH : DF$: *componendo* en *alternendo*.

15°. $EF + GF : FH + DF = GF : DF$; d. i.

16°. $EG : DH = GF : FD$: *dividendo* en N°. 14.

17°. $EF - FH : GF - FD = EF : FG$; d. i.

18°. $HE : GD = EF : GF$: en *dividendo* in N°. 16

$EG - DH : DH = GF - FD : FD$: d. i. door N°. 9.

19°. $2\,CA : DH = GD : DF$: en

$2\,AC \cdot DF = DH \cdot GD$: en ook

$EG - DH : EG = GF - FD : GF$: d. i.

20°. $2\,CA : EG = GD : GF = EH : EF$ (N°. 18) derhalve

$2\,CA \cdot EF = GE \cdot EH$.

21°. Maar $CA \cdot EF : CA \cdot BF = EF : FB = FB : DF$ (N°. 13)

$= CA \cdot BF : CA \cdot DF$ d. i. uit N°. 19. 21.

22°. $\dfrac{GE \cdot EH}{2} : CA \cdot FB = CA \cdot FB : \dfrac{DH \cdot GD}{2}$

en

$$\frac{GE \cdot EH}{4} : \frac{CA \cdot FB}{2} = \frac{CA \cdot FB}{2} : \frac{DH \cdot GD}{4}$$

d. i. uit N°. 11, 10 en 12.

23°. $\dfrac{GE\,[GE - 2\,BC]}{4}$: inh. $\Delta\,ABC$ = inh. $\Delta\,ABC$: $\dfrac{(GE - 2\,CA)\,(GE - 2\,BA)}{4}$.

Het geen den regel, in dit Gevolg voorgedragen, geeft.

II. GEVOLG. Fig. 182.

Indien er een cirkel om den driehoek CBA, en een cirkel in den driehoek CBA beschreven wordt, zal men den *radius* IC van den omschreven, en den *radius* LM van den ingeschreven cirkel kunnen bepalen.

L. G. Tr. p. 296.

BEWIJS. Door VI. 4. Gev. 1. is $\Delta\,CBA = \dfrac{CB \cdot BA \cdot AC}{4\,IC}$

$= \dfrac{abc}{4\,r}$; derhalve $r = \frac{1}{4}\,\dfrac{abc}{\text{Inh. } \Delta}$.

Of door dit Voorstel.

$$r = \frac{\frac{1}{4}\,a \cdot b \cdot c}{\sqrt{\frac{1}{2}p\,(\frac{1}{2}p - a)\,(\frac{1}{2}p - b)\,(\frac{1}{2}p - c)}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{p\,(p - 2a)\,(p - 2b)\,(p - 2c)}}.$$

Door

Door VI. 3. Gev. 2. is $\triangle$ ABC = (AB + AC + BC) × ½ LM.

derhalve $LM = \dfrac{2 \triangle ABC}{AB + BC + AC} =$

$$\frac{2 \sqrt{\tfrac{1}{2} p (\tfrac{1}{2} p - a)(\tfrac{1}{2} p - b)(\tfrac{1}{2} p - c)}}{\sqrt{p^2}} =$$

$$\frac{2 \sqrt{p (p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}}{\sqrt{16 p^2}} =$$

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}{p}}.$$

X. VOORSTEL. Fig. 66.

De ſom der *ſinusſen* van de drie hoeken eens driehoeks ſtaat tot den *ſinus* van eenen hoek, zoo als de ſom der drie zijden, of de omtrek des driehoeks, tot de zijde over den gemelden hoek ſtaande.

BEREIDING. Trek CI ⊥ op AB; en uit B, BD ⊥ op AC en zij AB + AC + BC = p.

BEWIJS. In de $\triangle\triangle$ CBI en CIA is

CB : CI = *coſec.* ∠ B : 1

CI : CA = 1 : *coſec.* ∠ A

dus CB : CA = *coſec.* ∠ B : *coſec.* ∠ A

CB + CA : CB = *coſec.* B + *coſec.* A : *coſec.* B.

Gelijkerwijze CB : AB = *coſec.* C : *coſec.* A:

en dus

CB + CA : AB = (*coſec.* B + *coſec.* A) *coſec.* C : *coſec.* ∠ B × *coſec.* ∠ A:

CB + CA + AB : AB = (*coſec.* B + *coſec.* A) *coſec.* C + *coſec.* B × *coſec.* A : *coſec.* B × *coſec.* A.

d. i. VIII. 32. N°. 88.

$$p : AB = \left(\frac{1}{\text{ſin. B}} + \frac{1}{\text{ſin. A}}\right) \times \frac{1}{\text{ſin. C}} + \frac{1}{\text{ſin. B}} \times \frac{1}{\text{ſin. A}} : \frac{1}{\text{ſin. B}} \times \frac{1}{\text{ſin. A}}$$

$$= \frac{\text{ſin. C} + \text{ſin. A} + \text{ſin. B}}{\text{ſin. B . ſin. A . ſin. C}} : \frac{\text{ſin. C}}{\text{ſin. B . ſin. A . ſin. C}}$$

dat is

p : AB = *ſin.* C + *ſin.* A + *ſin.* B : *ſin.* C

of

ſin. C + *ſin.* A + *ſin.* B : *ſin.* C = p : AB.

III. AFDEELING.

OVER DE OPLOSSING DER DRIEHOEKEN IN BIJZONDERE GEVALLEN, WANNEER SLECHTS TWEE HOEKEN, OF ZIJDEN, EN HET VERSCHIL, OF DE SOM, VAN TWEE ANDERE HOEKEN, OF ZIJDEN, GEGEVEN ZIJN.

XI. VOORSTEL. Fig. 180.

Gegeven zijnde twee zijden AB, BC, en het verschil der tegenovergestelde hoeken K en A, den driehoek optelossen.

CAGNOLI. §. 237.

OPLOSSING.

$$\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{begrepen hoek} = \frac{\textit{Cot.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{geg. verschil} \times \text{verschil geg. zijden.}}{\text{som der gegeven zijden.}}$$

waaruit het overige door het I. Geval gevonden wordt.

BEWIJS. Uit het 3. Gev. van het IV. Voorstel is

$$BC - AB : BC + AB = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ B : \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ (A - C)$$

en dus $\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ B = \dfrac{\textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ (A - C) \times (BC - AB)}{BC + AB}$.

XII. VOORSTEL. Fig. 180.

Gegeven zijnde de hoeken, en de som, of het verschil, van twee zijden, den driehoek optelossen.

CAGNOLI. §. 238.

OPLOSSING.

$$\text{I. Verschil der geg. zijden} = \frac{\text{som geg. zijden} \times \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{begr. hoek.}}{\textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{verschil der overige hoeken.}}$$

II.

II. Som der geg. zijden $=$

$$\frac{\text{Verschil geg. zijden} \times \text{cot. } \tfrac{1}{2} \text{ begr. hoek}}{\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ verschil der overige hoeken.}}$$

BEWIJS. Uit het IV. Voorstel Gev. 3. is

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}\, B = \frac{\text{cot } \tfrac{1}{2}(A - C) \times (BC - AB)}{BC + AB}$$

$$\text{dus } BC - AB = (BC + AB) \times \frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2} B}{\text{cot. } \tfrac{1}{2}(A - C)}$$

en

$$BC + AB = (BC - AB) \times \frac{\text{cot. } \tfrac{1}{2}(A - C)}{\text{tang. } \tfrac{1}{2} B} =$$

$$(BC - AB) \times \frac{\text{cot. } \tfrac{1}{2} B}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A - C)} \text{ (VIII. 26. Gev. 1.)}$$

I. GEVOLG.

Indien de driehoek regthoekig was in A, en men kende éénen scherpen hoek, (dus alle de hoeken) en boven dien de som, of het verschil, van de *hypotenusa* BC en eene zijde AB; dan hadt men:
$\angle A - \angle C = 90^\circ - \angle C = \text{comp. } \angle C = \angle B$ en dus $\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A - C) = \text{tang } \tfrac{1}{2} B$: en $\text{cot. } \tfrac{1}{2}(A - C) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} B$

en dus

$$BC - AB = \frac{\overline{BC + AB} \times \text{tang. } \tfrac{1}{2} B}{\text{cot. } \tfrac{1}{2} B} = \overline{BC + AB} \times \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} B$$

en

$$BC + AB = \overline{BC - AB} \times \frac{\text{cot. } \tfrac{1}{2} B}{\text{tang. } \tfrac{1}{2} B} = \overline{BC - AB} \times \text{cot.}^2 \tfrac{1}{2} B.$$

Het welk reeds Voorstel I. Gev. 4. uit andere gronden is afgeleid.

Waar uit, het zij BC + AB, het zij BC — AB, gegeven is, BC en AB afzonderlijk te vinden zijn; en daaruit AC.

AANMERKING. Men zoude ook AC onmiddelijk kunnen vinden, door het 4. Gev. van het I Voorstel: want volgens het zelve heeft men in onze figuur (altijd den $\angle$ A regt stellende),

$$\frac{BC - AB}{BC + AB} = (\text{tang. } B)^2 \text{: en dus}$$

$$\frac{BC - AB}{BC + AB} \times \overline{AC}^2 = (\text{tang. } \tfrac{1}{2} B)^2 \times \overline{AC}^2 \text{: of (II. 16. Gev. 1.)}$$

$$\frac{\overline{BC - AB} \times (\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)}{BC + AB} = (\text{tang. } \tfrac{1}{2} B)^2 \times \overline{AC}^2 \text{: of}$$

dus

door II. 10.

$$\frac{(BC - AB)(BC + AB)(BC - AB)}{BC + AB} = tang.^2 \tfrac{1}{2} B \times \overline{AC}^2$$

of $AC = \frac{(BC - AB)}{tang. \frac{1}{2} B}$

Indien men door $\overline{AC}^2$ *divideert* in plaats van te *multipliceeren*, heeft men

$$AC = tang. \tfrac{1}{2} B \times (BC + AB).$$

CAGNOLI, §. 218.

II. GEVOLG.

Indien de Δ CAB niet in A, maar in B bij voorbeeld, regthoekig was, en men kende de hoeken, en de som, of het verschil, der regthoeks-zijden, hadt men $\frac{1}{2} \angle B = 45^\circ$: en dus $tang. \frac{1}{2} \angle B = radius = 1$: gevolgelijk, daar $A + C = 90^\circ$, is $A = 90^\circ - C$; en $A - C = 90^\circ - 2C$: dus $\frac{1}{2}(A - C) = 45^\circ - C$:
Waaruit de oplossing wordt

$$BC - AB = \frac{BC + AB}{cot. (45^\circ - C)} \text{ en (VIII. 26. Gev. 1.)}$$

$$BC + AB = \frac{BC - AB}{tang. (45^\circ - C)}.$$

CAGNOLI. §. 219.

XIII. VOORSTEL. Fig. 180.

Gegeven zijnde een hoek [B], de tegenovergestelde zijde [AC] en de som, of het verschil, der beide andere [BC, AB]; den driehoek optelossen.

OPLOSSING.

$$Sin. \tfrac{1}{2} \text{ versch. der onbek. h.} = \frac{\text{verschil der zijd.} \times cos. \tfrac{1}{2} \text{ geg. hoek.}}{\text{geg. zijde.}}$$

$$Cos. \tfrac{1}{2} \text{ versch. der onbek. h.} = \frac{\text{som der zijden} \times sin. \tfrac{1}{2} \text{ geg. hoek.}}{\text{geg. zijde.}}$$

CAGNOLI, §. 239.

BEWIJS. $BC : AB = sin. A, sin. C$; dus
$BC - AB : sin. A - sin. C = BC : sin. A = AC : sin. B$:
en dus

$$BC - AB = \frac{AC \cdot (sin. A - sin. C)}{sin. B} = \text{(door VIII. 32. N°. 34.)}$$

$=$

$$= \frac{AC \times 2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C)\, cos.\, \tfrac{1}{2}(A + C)}{sin.\, B.}$$

$$= \frac{AC \times 2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C) \times cos.\, \tfrac{1}{2}(A + C)}{sin\ suppl.\ (A + C).}$$

= (VIII. Bep. 3. Gev. 1.)

$$= \frac{AC \times 2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C) \times cos.\, \tfrac{1}{2}(A + C)}{sin.\, (A + C).}$$

$$= \frac{AC \times 2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C) \times cos.\, \tfrac{1}{2}(A + C)}{2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(A + C)\, cos.\, \tfrac{1}{2}(A + C)} \text{ (Uit VIII. 32. N°. 88.) } =$$

$$= \frac{AC \times sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C)}{sin.\, \tfrac{1}{2}(A + C)} = \frac{AC \times sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C)}{cos.\, \tfrac{1}{2}B.}$$

om dat $\tfrac{1}{2}(A + C) = \tfrac{1}{2}(180° - B) = 90° - \tfrac{1}{2}B.$

en dus is

$$\overline{BC - AB} \times cos.\, \tfrac{1}{2}B = AC \times sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C)$$

en derhalve

$$AC : BC - AB = cos.\, \tfrac{1}{2}B : sin.\, \tfrac{1}{2}(A - C)$$

en op de zelfde wijze, nemende $BC + AB$ in plaats van $BC - AB$, vindt men

$$AC : BC + AB = sin.\, \tfrac{1}{2}B : cos.\, \tfrac{1}{2}(A - C).$$

GEVOLG.

Indien de hoek B regt was, en men kende dus in een' regthoekigen driehoek (buiten den regten hoek) de *hypotenusa* [AC], en de som, of het verschil, der regthoeks-zijden, hadt men

$$AC : BC \mp AB = 1 : sin.\, (45° \mp C) \times \sqrt{2}.$$

CAGNOLI. §. 220.

BEWIJS. $Cos.\, \tfrac{1}{2}B = sin.\, \tfrac{1}{2}B = sin.\, 45° = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$A + C = 90°$: dus $A - C = 90° - 2C$: en

$\tfrac{1}{2}(A - C) = 45° - C$:

en dus $cos.\, \tfrac{1}{2}(A - C) = sin.\ compl.\ (45° - C) =$

$sin.\, (90° - 45° + C) = sin.\, (45° + C).$

en dus heeft men

$$AC : BC \mp AB = \frac{1}{\sqrt{2}} : sin.\, (45° \mp C).$$

XIV. VOORSTEL. Fig. 180.

Gegeven zijnde een hoek [C], eene der aangrenzende zij-

zijden [AC], en de som der twee andere [AB + BC], den driehoek optelossen.

OPLOSSING.

$$Cot. (\tfrac{1}{2} \text{ hoek die aan de geg. zijde grenst}) = tang. \tfrac{1}{2} \text{ geg. hoek} \times \frac{\text{geg. som} + \text{geg. zijde}}{\text{geg. som} - \text{geg. zijde}}.$$

CAGNOLI, §. 240.

BEREIDING. Zij BE = AB: en dus CE = CB + AB, bekend. En dus ook

$\angle CAE - \angle E = \angle CAE - \angle BAE = \angle CAB.$

BEWIJS. In den $\triangle$ CAE is door de eerste oplossing van het derde Geval,

$Tang. \tfrac{1}{2} (\angle CAE - \angle E)$, of hier,

$$Tang. \tfrac{1}{2} \angle CAB = cot. \tfrac{1}{2} C \times \frac{CB + AB - AC}{CB + AB + AC};$$

of (VIII. 32. N°. 51, 52.)

$$Cot. \tfrac{1}{2} \angle CAB = tang. \tfrac{1}{2} C \times \frac{CB + AB + AC}{CB + AB - AC}.$$

XV. VOORSTEL. Fig. 180.

In een' driehoek [ABC] gegeven zijnde eén hoek [C], eene der aangrenzende zijden [AC] en het verschil der overige zijden [CB − AB], den driehoek optelossen.

OPLOSSING.

$$Tang. \tfrac{1}{2} (\text{hoek die aan de gegev. zijde grenst}) = Tang. \tfrac{1}{2} \text{ hoek} \times \frac{\text{gegev. zijde} + \text{gegev. verschil}}{\text{gegev. zijde} - \text{gegev. verschil}}.$$

CAGNOLI, §. 241.

BEREIDING. Zij BD = BA: dus 1°. CD = CB − AB: dus 2°. $\angle DAB = \angle ADB$: 3°. $\angle CDA - \angle CAD = 180° - \angle ADB - \angle CAD = 180° - (\angle ADB + \angle CAD) = 180° - (\angle DAB + \angle CAD) = 180° - \angle CAB$: dus $\tfrac{1}{2} (\angle CDA - \angle CAD) = 90° - \tfrac{1}{2} \angle CAB = compl. \tfrac{1}{2} \angle CAB.$

BEWIJS. In den $\triangle$ CAD is door de I. Oplossing van het III. Geval, $tang. \tfrac{1}{2} (\angle CDA - \angle CAD) = cot. \tfrac{1}{2} \angle CAB =$

=

$$= \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2} \angle C \times \frac{CA - CD}{CA + CD}$$

$$= \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2} \angle C \times \frac{CA - (CB - AB)}{CA + (CB + AB)} : \text{dus}$$

$$\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2} \angle CAB = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2} C \times \frac{CA + \overline{(CB \pm AB)}}{CA - \overline{(CB \mp AB)}}.$$

XVI. VOORSTEL. Fig. 184.

Gegeven zijnde de drie hoeken, en de grondlijn [AC] de ſtukken die op dezelve door de loodlijn gemaakt worden te bepalen.

OPLOSSING.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Verſchil}\\ \text{of}\\ \text{ſom}\end{array}\right\}\ \text{der ſtukken} = \frac{\text{grondl.} \times \textit{ſin.}\ \text{verſch. hoek. op de grondl.}}{\textit{ſin.}\ \text{tophoek.}}$$

CAGNOLI, §. 243.

BEREIDING. Men deele CA in twee gelijke deelen in E; rigte de loodlijnen, EF en BD op en trekke CF: waar door CF = FA.

BEWIJS. *Sin.* ∠ FCB : *ſin.* ∠ CBA = BF : CF = BF : AF = DE : EA = DE : ½ CA = ½ CA ∓ DC : ½ CA = CA ∓ 2 DC : CA = DA ∓ DC : CA: Maar ∠ FCB = ∠ BCA − ∠ FCA = ∠ BCA − ∠ A:

derhalve *ſin.* (∠ BCA − ∠ A) : *ſin.* ∠ CBA = DA ∓ DC : CA

$$\text{en } DA \mp DC = \frac{CA \times \textit{ſin.}\ (\angle BCA - \angle A)}{\textit{ſin.}\ \angle CBA}$$

NB. − indien ∠ BCA ſcherp: + indien ∠ BCA ſtomp.

I. AANMERKING. Ik ben dit zeer eenvoudig Bewijs aan den Heer REHUEL LOBATTO verſchuldigd.

GEVOLG.

Indien de tophoek regt is, is het verſchil der ſtukken = grondlijn × *ſin.* verſchil der hoeken op de grondlijn.

of AD − CD = AC *ſin.* (C − A)

doch om dat C + A = 90°: is C − A = 90° − 2 A = compl. 2 A

derhalve AD − CD = *coſ.* 2 A, indien de *radius* AC = 1.

en, daar DA = ½ (AC + $\overline{DA - CD}$)
en CD = ½ (AC − $\overline{AD - CD}$) (IV. Geval 1. Opl.)

 is

is $DA : CD = 1 + cof.\ 2A : 1 - cof.\ 2A$

en door (VIII. 32. N°. 17.)

$= 1 + 2\,\overline{cof.\ A}^2 - 1 : 1 - 2\,\overline{cof.\ A}^2 + 1$

$= 2\,\overline{cof.\ A}^2 : 2 - 2\,\overline{cof.\ A}^2$

$= \overline{cof.\ A}^2 : 1 - \overline{cof.\ A}^2 = \overline{cof.\ A}^2 : (fin.\ A)^2$

$= 1 : \dfrac{\overline{fin.\ A}^2}{\overline{cof.\ A}^2} = 1 : \overline{tang.\ A}^2.$

insgelijks,

$AC : DA - CD = 1 : fin.\ (C - A).$

Welke beide uitdrukkingen men voor den regthoekigen driehoek, en dus in een bijzonder geval, onmiddellijk en korter had kunnen bekomen.

CAGNOLI. §. 221,

II. AANMERKING Het geval waarin men de ftukken van de grondlijn vraagt als de drie zijden van den driehoek gegeven zijn, is de I. Oplosfing van het IV. Geval.

XVII. VOORSTEL. Fig. 66.

Wanneer in een' driehoek [ABC] de tophoek, en de zijden [AB, CB] om dien hoek gegeven zijn, de ftukken te vinden in welke eene loodlijn uit dien hoek op de tegenovergeftelde zijde nedergelaten dien hoek verdeelen zal.

OPLOSSING.

Tang. $\frac{1}{2}$ {verfchil / of / fom} der deelen van den hoek.

$= cot.\ \frac{1}{2}$ gegev. hoek $\times \dfrac{\text{verfchil der gegev. zijden.}}{\text{fom dier zijden.}}$

CAGNOLI, §. 245

BEWIJS. $AB : BD = 1 : cof.\ \angle ABD :$

$BD : CB = cof\ \angle CBD : 1$

dus $AB : BC = cof.\ \angle CBD : cof.\ \angle ABD :$ en

$AB + BC : BA - BC = cof.\ \angle ABD + cof.\ \angle CBD :$
$cof.\ \angle CBD - cof.\ \angle ABD.$

$\dfrac{BA - BC}{AB + BC} = \dfrac{cof.\ \angle CBD - cof.\ \angle ABD}{cof.\ \angle ABD + cof.\ \angle CBD}$

$= \dfrac{tang.\ \frac{1}{2}\,(\angle ABD - \angle CBD)}{cot.\ \frac{1}{2}\,(\angle CBD + \angle ABD)}$: (VIII. 32. N°. 33.)

dus

dus zoo $\angle$ C scherp

$$tang.\ \tfrac{1}{2}\ (\angle ABD - \angle CBD) = cot.\ \tfrac{1}{2}\ (\angle CBD + \angle ABD) \times \frac{BA - BC}{BA + BC}$$

$$= cot.\ \tfrac{1}{2}\ \angle ABC \times \frac{BA - BC}{BA + BC}.$$

en zoo de hoek C stomp

$$\frac{1}{cot.\ \tfrac{1}{2}(\angle CBD + \angle ABD)} = \frac{1}{tang.\ \tfrac{1}{2}\ (\angle ABD - \angle CBD)} \times \frac{BA - BC}{BA + BC}$$

of

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(\angle CBD + \angle ABD) = cot.\ \tfrac{1}{2}\ (\angle ABD - \angle CBD) \times \frac{BA - AC}{BA + BC}$$

$$= cot.\ \tfrac{1}{2}\ \angle CBA \times \frac{BA - BC}{BA + BC}.$$

GEVOLG.

Indien $\angle$ ABC regt; is $cot.\ \tfrac{1}{2}\ \angle ABC = 1$
en dus

$$tang.\ \tfrac{1}{2}\ (\angle ABD - \angle CBD) = \frac{BA - BC}{BC + AB}.$$

XVIII. VOORSTEL. Fig. 67.

Te vinden de stukken welke op de zijde [AB] eens driehoeks [ACB] gemaakt worden door eene lijn CH, die den overgestelden hoek [ACB] in twee gelijke deelen deelt: het zij men in dien driehoek de hoeken en de verdeelde zijde AB, het zij men de zijden, kenne.

OPLOSSING.

I. Versch. der stukken =

$$\frac{\text{verdeelde zijde} \times tang.\ \tfrac{1}{2}\ \text{versch. aangr. hoeken}}{tang.\ \tfrac{1}{2}\ \text{som van die hoeken.}}$$

II. Versch. der stukken =

$$\frac{\text{verdeelde zijde} \times \text{verschil der andere zijden}}{\text{som van die andere zijden.}}$$

CAGNOLI, §. 244.

BEWIJS. BH : CH = *sin.* $\angle$ BCH : *sin.* $\angle$ B :
CH : AH = *sin.* $\angle$ A : *sin.* $\angle$ ACH of *sin.* $\angle$ BCH
dus
BH : AH = *sin.* $\angle$ A : *sin.* $\angle$ B :
BH + AH : BH − AH = *sin.* $\angle$A + *sin.* $\angle$B : *sin.* $\angle$A − *sin.* $\angle$B
en

en dus

$$BH - AH = \frac{\overline{BH + AH} \times (\sin. \angle A - \sin. \angle B)}{\sin. \angle A + \sin. \angle B}$$

$$= AB \times \frac{tang. \frac{1}{2} (\angle A - \angle B)}{tang. \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)}$$ (VIII. 32. N°. 82.)

maar

$AC + BC : BC - AC = tang. \frac{1}{2} (\angle A + \angle B) : tang. \frac{1}{2} (\angle A - \angle B)$
(door het IV. Voorst.)

dus

$$\frac{tang. \frac{1}{2} (\angle A - \angle B)}{tang. \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)} = \frac{BC - AC}{BC + AB}$$: en

$$BH - AH = AB \times \frac{BC - AC}{BC + AC}.$$

I. GEVOLG. Fig. 67.

Indien de driehoek regthoekig is in C, is $\angle A + \angle B = 90°$: dus $\frac{1}{2} (\angle A + \angle B) = 45°$: en $\frac{1}{2} (\angle A - \angle B) = 45° - \angle B$: maar $BH = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} (BH - AH)$, en $AH = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} (BH - AH)$; en gevolgelijk

$$BH : AH = \tfrac{1}{2} AB \left(1 + \frac{tang. \frac{1}{2} (\angle A - \angle B)}{tang. \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)}\right) : \tfrac{1}{2} AB \times \left(1 - \frac{tang. \frac{1}{2} (\angle A - \angle B)}{tang. \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)}\right)$$

$$= tang. \tfrac{1}{2} (\angle A + \angle B) + tang. \tfrac{1}{2} (\angle A - \angle B) : tang. \tfrac{1}{2} (\angle A + \angle B) - tang. \tfrac{1}{2} (\angle A - \angle B)$$

$$= tang. 45° + tang. (45° - \angle B) : tang. 45° - tang. (45° - \angle B)$$ (VIII. 32. N°. 68)

$$= 1 + \frac{1 - tang. B}{1 + tang. B} : 1 - \frac{1 - tang. B}{1 + tang. B}$$

$$= 1 + tang. B + 1 - tang. B : 1 + tang. B - 1 + tang. B$$

$$= 2 : 2\, tang. B = 1 : tang. B.$$

CAGNOLI. §. 222.

II. GEVOLG.

Indien de driehoek gelijkbeenig is, namelijk zoo $AC = BC$: is $BH - AH = 0$ of $BH = AH$; het geen men reeds van elders weet: namelijk uit I. 27.

XIX. VOORSTEL. Fig. 67.

Indien twee zijden [AC, BC], en de hoek tusschen de-

zelven begrepen, gegeven zijn, en die hoek door eene lijn, welke de derde zijde in twee gelijke deelen ſnijdt, verdeeld wordt, de ſtukken van dien hoek te vinden.

OPLOSSING.

$$\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{verſch. der ſtukken van den hoek} = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{geg. hoek} \times \frac{\text{verſchil der geg. zijden}}{\text{ſom der geg. zijden.}}$$

CAGNOLI, §. 246.

BEWIJS. $AH : CH = \textit{ſin.}\ \angle ACH : \textit{ſin.}\ \angle A :$

$BH \text{ of } (AH) : CH = \textit{ſin}\ \angle HCB : \textit{ſin.}\ \angle B :$

en dus

$\textit{ſin.}\ ACH : \textit{ſin.}\ HCB = \textit{ſin.}\ \angle A : \textit{ſin.}\ \angle B = CB : AC.$

en dus

$CB + AC : CB - AC = \textit{ſin.}\ \angle ACH + \textit{ſin.}\ \angle HCB : \textit{ſin.}\ \angle ACH - \textit{ſin.}\ \angle HCB$

en

$$\frac{CB - AC}{CB + AC} = \frac{\textit{ſin.}\ \angle ACH - \textit{ſin.}\ \angle HCB}{\textit{ſin}\ \angle ACH + \textit{ſin.}\ \angle HCB} =$$

$$= \frac{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (\angle ACH - \angle HCB)}{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (\angle ACH + \angle HCB)}\ \text{(VIII. 82. N°. 82.)}$$

dus

$$\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (\angle ACH - \angle HCB) = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \angle ACB \times \frac{CB - AC}{CB + AC}.$$

IV. AFDEELING.

AANMERKINGEN OVER EENIGE BIJZONDERE GEVALLEN IN DE PRAKTIJK.

Tot de praktijk van Landmeten behooren goede werktuigen om hoeken te meten, en eene naauwkeurige maatſtaf om lengten op het terrein te kunnen bepalen. Een werk dat, wil men de vereischte naauwkeurigheid in acht nemen, vele voorzorgen en veel oplettendheid vereischt. Dit betreft de praktijk zelve, en behoort dus niet tot ons beſtek. Wij zullen alleen eenige algemene aanmerkingen maken op de verſchillende ſoorten van gevallen die men aantreft.

Men meet hoogten, afſtanden, of geheele terreinen.

I. Wanneer men (Fig. 97. *a*) de hoogte B C moet bepalen, en men kent, of heeft gemeten, den afstand C A, die onderfteld wordt waterpas te liggen, zoo dat ∠ BCA = L; heeft men niets meer te doen dan den hoek BAC te meten: immers dan is
r: *tang.* ∠ BAC = CA: BC: welke daar door bekend is.

II. Zoo de afstand CA onbekend, of ongenaakbaar, mogt zijn; moet men eene grondlijn AE meten, waarvan de uiteinden E en A in eene en dezelfde rigting liggen met het voorwerp BC. Men meet dan de hoeken BEC, en BAC: waar door het *fupplement* van deze, of ∠ BAE bekend is: en derhalve in den Δ ABE ook de hoek ABE: dan is *fin.* ∠ B; AE = *fin.* ∠ E: BA: (Voorftel III.) welke zijde BA derhalve bekend wordt: en dan in Δ BAC is
r: *fin.* ∠ BAC = BA: BC: welke dus, door die twee berekeningen bekend wordt.

III. Ook komt de oplosfing der regthoekige driehoeken dagelijks in de Stuurmanskunst te pas, om, gelijk reeds gezegd is, uit de bezeilde koers en verheid de verandering in lengte en breedte te berekenen.

IV. De oplosfing der fcheefhoekige driehoeken is in de praktijk van het landmeten ten hoogften noodzakelijk. Het eerfte geval dient om (Fig. 184.) te bepalen op welken afftand CA, of CB, men zich van een ongenaakbaar voorwerp C bevindt: mits men uit twee plaatfen van eene bekende, of daartoe opzettelijk gemeten, *bafis* AB, de hoeken meten kan, welke het gemelde voorwerp, uit die plaatfen gezien, met de *bafis* maakt; te weten de hoeken CBA, en BAC: immers, dan is ∠ C daar door bekend, en *fin.* ∠ B: AC = *fin.* ∠ A: BC = *fin.* C: AB. Kan men er dan nog bij bepalen den hoek, dien het voorwerp, uit A of uit B gezien, boven de kim maakt, dan zal men, den afftand CA, of CB, eerst berekend hebbende, de hoogte van dat voorwerp kunnen bepalen, door het I. geval van de regthoekige driehoeken, en het zoo even gezegde in N°. I.

V. Het derde geval dient om den onderlingen afftand CD van twee ongenaakbare voorwerpen C en D te bepalen, mits men de hoeken gemeten hebbe (Fig. 183.) die zij, uit de uiteinden van de gemeten *bafis* AB gezien, met dezelve maken: te weten ∠ CAB, ∠ DAB; en ∠ DBA, ∠ CBA: immers dan zijn in ΔΔ ACB en ADB, daar door de hoeken ACB en ADB bekend: dan is 1°. in Δ ACB; *fin.* ∠ ACB: AB = *fin.* ∠ CAB: CB = *fin.* ∠ CBA: AC; waar door CB en AC bekend worden; 2°.

in

in △ ADB, is *fin.* ∠ ADB: AB = *fin.* ∠ DAB: BD = *fin.* ∠ ABD: AD, en AD en DB worden bekend. Eindelijk kent men dan, in △ CAD, ∠ CAD = ∠ CAB — ∠ DAB, de beide zijden CA, AD reeds berekend; en insgelijks in △ CBD, ∠ CBD = ∠ DBA — ∠ CBA, CB en BD: men kan dan uit een van beiden, waarin twee zijden en de begrepen hoek bekend zijn, door eene der oplossingen van het derde geval, de gevraagde lijn CD berekenen.

VI. Indien er nog andere voorwerpen waren, gelijk E, D en F, zoude men, met de hoeken EAB, FAB, DBA, EBA, te meten, de △△ EAB, FAB kunnen oplossen, en daar door de lijnen EA, FA, EB, FB kennen: waaruit in ieder der driehoeken CAE, CAF, EAF, EAB, FAD, en CBE, EBF, FBD, EBD, de lijnen, EF, FD, DC, door een dubbeld stel, of door een van die stellen driehoeken, berekend kunnen worden: zoo dat men dan alle de zijden CE, EF, FD, CD, kent; dat is de afstanden op welke die voorwerpen van elkander staan.

VII. Ook kent men daar door hunne onderlinge rigting: want in het berekenen der △△ DAC en CAE, worden de ∠∠ ACD en CAE bekend: dan is ook bekend ∠ ECD = ∠ ECA — DCA. In het berekenen der △△ zijn ook ∠ AEF en ∠ EFA bekend geworden. Derhalve is ook ∠ CEF = ∠ CEA + ∠ FEA bekend. Insgelijks uit △△ DAF, FBD en EBF worden de hoeken AFD, ADF, BFD, FDB, BED, EDB bekend; en derhalve ook ∠ EFD = ∠ AFE + ∠ AFD; ∠ CDE = ∠ EDB — ∠ CDB; ∠ EDF = ∠ CDF — ∠ CDE: zoo dat zoo wel de afstanden der plaatsen C, E, F, D, bekend zijn als derzelver rigting, het zij onder haar vieren, het zij drie aan drie genomen, zoo als C, E, D: E, F, D, en ook C, F, D.

VIII. Het vierde geval dient eigenaartig, om de rigting der voorwerpen te bepalen, als men derzelver afstand kent. Indien men (Fig. 191) den onderlingen afstand van drie plaatsen A, I, C, dat is de drie zijden AI, IC, AC van den △ AIC kent: zal derzelver rigting bekend zijn als men de hoeken IAC, AIC, ICA, zal berekend hebben, het geen door het vierde geval geschied.

IX. Men is dan in staat om, door meting van eene *basis*, of grondlijn, en voorts van hoeken, een geheel land optenemen en in kaart te brengen. Dan komt het zeer dikwerf te pas om de hoegrootheid van dat Land, of van dat stuk lands, in eene bepaalde maat, quadraat-voeten of roeden; of in mijlen, of in morgens enz. uittedrukken; dit geschiedt door

door het geen in Voorst. XL. van het II. Boek geleerd is; de uitdrukkingen gebruikende die het 6 Gev. van het IX. Voorstel des vierden Boeks aan de hand geeft.

Indien men namentlijk een stuk lands (fig. 186.) ABCDE gemeten heeft, door middel der *basis* AB en der hoeken ABC, BCD, CDE, DEA, EAB: kan men, getrokken hebbende de diagonalen AC, AD, de lengte derzelve uit de driehoeken CAB, CDA of DAE opmaken, waartoe, in ieder derzelve genoegzame gegevene zaken zijn; en dan wederom de loodlijnen BF, DG, EH, welke noodig geacht worden om den inhoud der driehoeken BCA, CDA, DAE te vinden, die te famen den inhoud van het geheele stuk uitmaken: waar van de inhoud derhalve zijn zal

$$\frac{AC \times (BF + DG) + AD \times HE}{2}.$$

Maar alle die berekeningen zijn werkelijk; men zal echter het werk veel verkorten, indien men op het land zelf ook de hoeken BAC, CAD, DAE waarneemt: want dan valt de berekening der zijden BC, CD, DE en der diagonalen AC, DA, vrij wat gemakkelijker: en men kan met het VIII. Voorstel te gebruiken, de LL BF, DG, EH missen, waarvan de berekening ook al omslagtig is: te weten $\triangle ABC = \frac{BA \cdot CA \cdot fin.\ BAC}{2}$: zoo dat de inhoud van het geheele stuk zijn zal,

$$\frac{BA \cdot CA \cdot fin. \angle BAC + CA \cdot AD \cdot fin. \angle CAD + AD \cdot AE \cdot fin. \angle DAE}{2}.$$

X. Wanneer men een geheel land, of een aanzienlijk gedeelte daarvan, opneemt, zoude men in grove feilen kunnen vervallen, indien men niet vele voorzorgen gebruikte om het ophoopen van feilen, die van alle waarnemingen onafscheidelijk zijn, te beletten. Veel hangt af van de naauwkeurigheid der werktuigen die men gebruikt, en van de voorzorgen des waarnemers: en in uitgestrekte metingen moet hij nimmer afzijn om, van de voornaamste driehoeken, ten minsten, de drie hoeken te meten, welke te famen twee regte hoeken of 180° moeten uitmaken: zoo het verschil aanmerkelijk ware is er eene feil in de waarnemingen: zoo het gering is, moet het verschil gelijkelijk tusschen de drie hoeken verdeeld worden, om deze daar door te verbeteren, ten zij er redenen waren om een grooter gedeelte der verbetering tot eenen hoek, dan tot eenen anderen te brengen. Een voordeel dat men mist als men slechts twee hoeken meet, en den derden uit deze besluit: dan valt op dien derden de geheele som der feilen in de twee overige misschien begaan.

XV. Wanneer alle de opgenomen hoeken een geheel famenftel uitmaken, en eenige van derzelver zijden eenen veelhoek, binnen hetwelk de top Z van de waargenomen hoeken valt: kan de juistheid der meting getoest worden door dit

XX. VOORSTEL. Fig. 185.

In alle veelhoeken, welke door lijnen [ZA, ZE, ZD enz.], uit een ftip Z, binnen het zelve getrokken, in driehoeken verdeeld worden; zijn dezelve zoo gefteld dat 1°. alle de hoeken om dat ftip [Z] te famen vier regte, of 360 graden, uitmaken: en 2°. dat het product der *finusfen* van de even hoeken op de *bafis* (van de 2, den 4, den 6 enz.) gelijk is aan het product der *finusfen* van de oneven hoeken (den 1, 3 enz.)

BEWIJS. VOOR HET EERSTE. Uit I. 5. Gevolg.

VOOR HET TWEEDE. In de △△ AZE, EZD, enz. is door Voorft III.

ZA: ZE = *fin.* ∠ ZEA: *fin.* ∠ ZAE

ZE: ZD = *fin.* ∠ ZDE: *fin.* ∠ ZED

ZD: ZC = *fin.* ∠ ZCD: *fin.* ∠ ZDC

ZC: ZB = *fin.* ∠ ZBC: *fin.* ∠ ZCB

ZB: AZ = *fin.* ∠ ZAB: *fin.* ∠ ZBA.

Daar nu de producten der twee eerfte kolommen gelijk zijn: zijn het ook die der twee laatfte: d. i.

fin. ∠ ZEA × *fin.* ∠ ZDE × *fin.* ∠ ZCD × *fin.* ∠ ZBC × *fin.* ∠ ZAB

=

fin. ∠ ZAE × *fin.* ∠ ZED × *fin.* ∠ ZDC × *fin.* ∠ ZCB × *fin.* ∠ ZBA

dat is

fin. II. hoek × *fin.* IV. hoek × *fin.* VI. hoek × *fin.* VIII. hoek × *fin.* X. hoek

=

fin. I. hoek × *fin.* III. hoek × *fin.* V. hoek × *fin.* VII. hoek × *fin.* IX. hoek.

Welk Voorftel een beproevingsmiddel is, waarvan de Generaal KRAAIJENHOFF in zijne *Geodetifche metingen* van dit Land, onder anderen, gebruik heeft gemaakt. Men zie zijn keurig werk getijteld *Précis historique des Opérations Géodéfiques*, etc.

Het fpreekt van zelf dat wanneer men door Logarithmen werkt, dan voor de fom der Logarithmen-*finus*, geldt, het geen van het product der *finusfen* gezegd is.

AANMERKING. Wij flippen dit alles maar ter loops aan, de ontvouwing behoort tot de praktijk. Deze beftaat, of in het gewoon Landmeters werk, als wanneer men zich veelligt met de fchriften van MORGENSTER, GREGORY, OZANAM, SAUVEUR, LA GRIVE, enz. zal kunnen vergenoegen: of wel tot de GEODESIE in hare geheele omvang, ook tot het opnemen van geheele Landen: waar over twee voortreffelijke werken voorhanden zijn; te weten, een van SNELLIUS in het Hoog-

Hoogduitsch, het ander, van PUISSANT, in het Fransch: dit laatste overtreft verre alles wat daar omtrent tot mijne kennis is gekomen.

XII. Wanneer men eenmaal de belangrijkste voorwerpen met de vereischte naauwkeurigheid opgenomen heeft, valt het gemakkelijk andere, met eene genoegsame naauwkeurigheid te bepalen. Twee belangrijke gevallen doen zich deswegens op, die het der moeite waardig zijn zal nader te ontvouwen.

EERSTE BELANGRIJK GEVAL.

XXI. VOORSTEL. Fig. 187, 188, 189, 190, 191, 192.

Gegeven zijnde de onderlinge afstand van drie voorwerpen, A, I, C, mitsgaders een stip B waaruit men, op de voorwerpen A, I, C mikkende, de hoeken ABI, ABC, IBC, meet: te bepalen den afstand des gemelden stips B van ieder dér voorwerpen: dat is, AB, BI, BC?

SNELLIUS, *Eratosthenes Batavus*, *Cap.* X.

UITLEGGING. De gegeven voorwerpen maken met elkander den △ AIC: waarvan de drie zijden gegeven zijn. Dit Voorstel door SNELLIUS uitgedacht, en door hem werkelijk gebruikt, mogt wel den naam van het Voorstel van SNELLIUS dragen: in latere tijden heeft men er veel gebruik van gemaakt, waar door het meerder roem heeft gekregen, en vele Wiskundigen hebben er oplossingen van gegeven: onder anderen reeds in 1671, COLLINS *Phil. Transact*, vol. 6. N°. 69. Later, in 1755 BOSCOVISCH, *Voyage Astronomique*, *Liv.* III. §. 17. in 1765. LAMBERT in zijne *Beytrage zum gebrauche der Mathemat.*, I. Band N°. 1. §. 107—117, en in de laatste tijden, DELAMBRE, *Methodes Analytiques*, *etc.* en *Base du systéme métrique*: L'HUILIER *Elémens d'Analyse Géometrique*, §. 138 Ik zal drie Oplossingen voordragen: eene *Graphische*, eene *Trigonometrische*, eene *Algebraische*: na alvorens te hebben opgemerkt dat er twee algemeene gevallen zijn; want het stip B valt binnen of buiten den driehoek: het geen echter in de oplossing zelve geen wezenlijk onderscheid te weeg brengt.

GRAPHISCHE OPLOSSING. Fig. 190, 191.

Deze oplossing is door SNELLIUS gebruikt.

1°. Stel op de lijn AI een cirkelstuk IBA bekwaam om een' hoek te bevatten gelijk aan den hoek door den waarnemer tusschen A en I uit B gemeten: (Werkstukken V. 5.)

2°. Stel op CI een cirkelstuk CBI bekwaam om een' hoek gelijk aan den hoek door den waarnemer tusschen I en C uit B gemeten, te bevatten.

Het stip B, waaruit men de waarneming gedaan heeft, moet zoo wel in den omtrek van het eene cirkelstuk zijn als in dien van het ander: het ligt derhalve in de snijding der beide omtrekken, of in B, en is bepaald.

Zoodanige Graphische oplossing in zeer nuttig om, de zijden des driehoeks AIC, door middel van eene pleinschaal

ſchaal in hare betrekkelijke grootte geſteld zijnde, ook na het vervaardigen van eene naauwkeurige figuur, op de plein-ſchaal de afſtanden AB, BI, BC, en op een *transporteur* de hoeken IAB, AIB, BIC, ICB, BAC, en ACB te meten, en het begeerde dus, met eene, wel is waar niet groote, doch echter redelijke, en ſomtijds voldoende, naauwkeurigheid te kennen.

TRIGONOMETRISCHE OPLOSSING. Fig. 187 (*).

I. Daar in den driehoek AIC de drie zijden bekend zijn, bereekent men eerst de hoeken IAC, AIC, en ICA, door het vierde geval.

II. Men onderſtelle dat de cirkel BADC om den driehoek ABC beſchreven zij: (VI. 3.) men trekke de lijn BI welke den omtrek in D ſnijdt: vervolgens AD, en CD, dan is:

1°. ∠ DCA = ∠ ABD } (V. 6.) dus bekend.
2°. ∠ DAC = ∠ DBC }

3° Maar ∠ IAD = verſchil of ſom van ∠ DAC en ∠ IAC.
4°. en ∠ ICD = verſchil of ſom van ∠ DCA en ∠ ICA
dus zijn ook die beide hoeken IAD en ICD bekend.

III. Gevolgelijk zijn in den △ ADC bekend de drie hoeken en de zijde AC; dus vindt men AD en DC door het I. Geval.

IV. In den driehoek DAI zijn bekend AI door de onderſtelling, AD uit N°. III. ∠ IAD uit N°. II. 3°. dus vindt men ∠ ADI door het III. Geval: en insgelijks ∠ CDI in den driehoek DCI.

V. Maar ∠ AIB = ∠ DAI + ∠ ADI } I. 15.
en ∠ BIC = ∠ IDC + ∠ DCI }
en zoo I buiten den cirkel valt is
∠ AIB = ſuppl. (∠ DAI + ∠ ADI } I. 15.
∠ BIC = ſuppl. (∠ IDC + ∠ DCI }
Dus zijn die hoeken bekend.

VI. Gevolgelijk zijn in △ AIB bekend, ∠ AIB, door N°. V. ∠ ABI en IA door de onderſtelling: dus vindt men AB, IB, en ∠ IAB door het I. Geval.

Insgelijks vindt men in den △ ICB, de zijde CB, en ∠ ICB: waaruit dan ook de hoeken CAB en ACB afgeleid worden, en dus het geheele Geval opgelost is.

AANMERKING Deze oploſſing is vrij lang, want zij vereischt dat men, buiten den driehoek AIC, vijf driehoeken oploſſe.

SNEL-

(*) Deze oploſſing is door mij overgenomen uit de lesſen van wijlen mijnen zeer geëerden amptgenoot den Heer Profesſor N. YPEY.

E e

Snellius heeft ook eene trigonometrische oplossing uit zijne graphische afgeleid.

I. ANALYTISCHE OPLOSSING (*).

Het eerste voorwerp, van de regter hand af te tellen, wordt genoemd C, het tweede I, het derde, of het eerste aan de linker hand, A.

I. Als de waarnemer buiten den △ AIC (Fig. 189.) staat

$$\text{is } tang. \angle ACB = \frac{-AI.\,fin.\angle ABC.\,fin.[\angle IBC \mp \angle IAC]}{AI.\,fin.\angle ABC.\,cof.[\angle IBC \mp \angle IAC] - AC.\,fin.\angle ABI}$$

II. En als de waarnemer binnen den △ AIC staat (Fig. 192.) is $tang. \angle ACB =$

$$\frac{-AI.\,fin.\angle ABC\,fin.[\angle IBC \mp \angle IAC]}{AI.\,fin.\angle ABC.\,cof.[\angle IBC \mp \angle IAC] + AC\,fin.\angle ABI]}$$

OphelderING. 1°. Wanneer de teller *negatief* en de noemer *positief* is, is *tang.* ∠ ACB *negatief* en dus ∠ ACB > 90°. Men moet dan voor ∠ ACB het supplement nemen van den hoek die in de Tafel staat naast *tang.* ∠ ACB. 2°. Wanneer de teller en de noemer, beide *positief*, of beide *negatief* zijn, is *tang.* ∠ ACB *positief*; en dus die hoek < 90°.

I. AANMERKING: Deze Analytische Oplossing gaat in de bewerking veel spoediger voort dan men in den eersten opslag zoude denken: om dat de noemer van de breuk gedeeltelijk uit de zelfde getallen bestaat als de teller, gelijk AI, *fin.* ∠ ABC: of uit een' hoek [∠ IBC ∓ ∠ IAC] wiens *finus* en *cofinus* op de zelfde bladzijde der Tafels gevonden worden. Het eenige dat lastig valt is de oplettendheid op de teekens: de gewoonte alleen kan dit gemakkelijk doen worden.

OPLOSSING voor het eerste Geval, wanneer de waarnemer buiten den driehoek staat. Fig. 189.

1°. In △ ABC is *fin.* ∠ ABC : AC = *fin.* ∠ BCA : AB;

$$\text{en derhalve } 1^{\circ}.\ AB = \frac{AC.\,fin.\angle BCA}{fin.\angle ABC}$$

In △ ABI is *fin.* ∠ ABI : AI = *fin.* ∠ AIB : AB:

$$\text{gevolgelijk } 2^{\circ}.\ AB = \frac{AI.\,fin.\angle AIB}{fin.\angle ABI}.$$

Maar in de △△ AZI en ZBC is ∠ AIB + ∠ IAC = ∠ ACB + ∠ IBC, en gevolgelijk ∠ AIB = ∠ ACB + ∠ IBC − ∠ IAC; voor Fig. 188. is ∠ AIB = ∠ IAC + ∠ AZB en ∠ AZB =

∠

(*) Ik gaf deze Oplossing, doch minder uitgewerkt, en zoo als zij in de eerste uitgave van dit werk verschenen is, in 1772. aan een' vriend welke mij dit vraagstuk had voorgesteld.

$\angle IBC + \angle ACB$: derhalve $\angle AIB = \angle IAC + \angle IBC + \angle ACB$:

en dus in het algemeen.

3°. $\angle AIB = \angle ACB + [\angle IBC \mp \angle IAC]$ (*):
stellende deze waarde in N°. 2. komt

4° $\dfrac{AI \times \text{sin.}\,(\angle ACB + [\angle IBC \mp \angle IAC])}{\text{sin.}\,\angle ABI} = AB = \dfrac{AC \times \text{sin.}\,\angle BCA}{\text{sin.}\,\angle ABC}$ uit N°. 1.

waaruit volgt

5°. $AI\,.\,\text{sin.}\,\angle ABC\,.\,\text{sin.}\,(\angle ACB + [\angle IBC \mp \angle IAC]) = AC\,.\,\text{sin.}\,\angle BCA\;\text{sin.}\,\angle ABI$

maar

$\text{sin.}\,[\angle ACB + (\angle IBC \mp \angle IAC)] = \text{sin.}\,\angle ACB \times \text{cos.}\,[\angle IBC \mp \angle IAC] + \text{cos.}\,\angle ACB \times \text{sin.}\,[\angle IBC \mp \angle IAC]$.
Met dit in N°. 5. te stellen komt

6°. $AI\,.\,\text{sin.}\,\angle ABC\,.\,\text{sin.}\,\angle ACB\,.\,\text{cos.}\,[\angle IBC \mp \angle IAC] + AI\;\text{sin.}\,\angle ABC\,.\,\text{cos.}\,\angle ACB\,.\,\text{sin.}\,[\angle IBC \mp \angle IAC] = AC\,.\,\text{sin.}\,\angle ACB\,.\,\text{sin.}\,\angle ABI$: derhalve

7°. $\text{Sin}\,\angle ACB \times AI\,.\,\text{sin.}\,\angle ACB\,.\,\text{cos.}\,[\angle IBC \mp \angle IAC] - \text{sin.}\,\angle ACB\,.\,AC\,.\,\text{sin.}\,\angle ABI = - \text{cos.}\,\angle ACB\,.\,AI\,.\,\text{sin.}\,\angle ABC\,.\,\text{sin.}\,(\angle IBC \mp \angle IAC)$

waaruit volgt

8°. $\dfrac{\text{Sin.}\,\angle ACB}{\text{Cos.}\,\angle ACB} = \text{tang.}\,\angle ACB = \dfrac{- AI\,.\,\text{sin.}\,\angle ABC\,.\,\text{sin.}\,(\angle IBC \mp \angle IAC)}{AI\,.\,\text{sin.}\,\angle ABC\,.\,\text{cos.}\,(\angle IBC \mp \angle IAC) - AC\,.\,\text{sin.}\,\angle ABI}$.

9°. Zoodra nu $\angle ACB$ gevonden is kent men in den $\triangle ACB$, den gevonden hoek ACB, den gegeven hoek $\angle ABC$, de zijde AC: en derhalve berekent men daar uit den $\angle CAB$, en de zijden AB en BC: en daarna in $\triangle AIB$, de zijde IB, den $\angle AIB$, en eindelijk den $\angle BIC$.

II. AANMERKING. Wij hebben de uitdrukking $\angle AIB = \angle ACB + [\angle IBC + \angle IAC]$ voor fig. 188 uit den aard van die figuur afgeleid: maar ze kan gemakkelijk uit de uit de uitdrukking voor fig. 189, te weten uit $\angle AIB = \angle ACB + [\angle IBC - \angle IAC]$ afgeleid worden: want in die figuur valt $\angle IAC$ boven AC, en in fig. 188. onder AC: gevolgelijk is aldaar $\angle IAC$ *negatief*, indien dezelve in fig. 189. als *positief* wordt aangemerkt: en dus moet het teeken $-$ in $+$ veranderd worden: en men heeft $\angle AIB = \angle ACB + [\angle IBC + \angle IAC]$.

II.

(*) NB. Het bovenste teeken zoo I boven; het onderste zoo I onder AC valt.

III. AANMERKING. Het kan gebeuren dat $\angle$ IBC = $\angle$ IAC: dan is in fig. 189. $\angle$ IBC − $\angle$ IAC = o: derhalve *fin.* [$\angle$ IBC − $\angle$ IAC] = o: en dus de *teller* = o: maar in dat geval is de *noemer* ook = o: want dan is *cof.* [$\angle$ IBC − $\angle$ IAC] = *cof.* o = 1: dus wordt de *noemer* AI *fin.* ABC − AC *fin.* ABI: maar uit N°. 3. is $\angle$ AIB = $\angle$ ACB + [$\angle$ IBC − $\angle$ IAC] dat is, hier, $\angle$ AIB = $\angle$ ACB: en gevolgelijk wordt in N°. 3. $\frac{AC}{fin.\ \angle\ ABC} = \frac{AI}{fin.\ \angle\ ABI}$: en AC × *fin.* $\angle$ ABI = AI × *fin.* $\angle$ ABC: waar door de noemer wordt = o: en derhalve *tang.* $\angle$ ACB = $\frac{o}{o}$: gevolgelijk is als dan die hoek onbepaald. Dit volgt ook uit de *graphische* oplossing: want om dat in dit geval, Fig. 190., de $\angle\angle$ IAC en IBC aan elkander gelijk zijn, en op de zelfde choorde rusten, moeten zij in één en het zelfde cirkelstuk geplaatst zijn: derhalven smelten, in dit geval, de twee cirkelstukken ICB en IAB in één; en gevolgelijk, waar ook het stip C zich in den omtrek van dien cirkel bevinde, blijven de $\angle\angle$ ABI, IBC, ABC dezelfde hoe veel ook door de verschillende plaatsing van B de $\angle\angle$ ACB, CAB, AIB, BIC, en de lijnen AB, BI, CB, verschillende mogen worden.

IV. AANMERKING. Wanneer de drie voorwerpen A, I, C in ééne regte lijn zijn, is $\angle$ IAC = o: $\angle$ ICA = o: en de formule wordt

$$tang.\ \angle\ ACB = \frac{-\ AI\ .\ fin.\ \angle\ ABC\ .\ fin.\ \angle\ IBC}{AI\ .\ fin.\ \angle\ ABC\ .\ cof.\ \angle IBC - AC\ fin.\ \angle ABI}.$$

OPLOSSING van het tweede geval, wanneer de waarnemer binnen den driehoek ACI staat. Fig. 192.

Men kan dit geval onmiddelijk bewijzen, op den zelfden voet als voor het eerste geschied is. Maar wij zullen ons vergenoegen met het bewijs uit dat van het eerste geval te ontleenen, en te doen aanmerken dat in het tweede geval de $\angle$ ABI, ten opzigte der lijnen AB en BC, aan den anderen kant valt van het stip met betrekking tot het eerste geval, of tot Fig. 189 en 188: dat gevolgelijk die hoek *negatief* wordt: waar door zijn *finus* ook *negatief* is: en dus moet men in den noemer stellen + AC . *fin.* $\angle$ ABI in plaats van − AC *fin.* ABI.

I. AANMERKING. In dit geval is $\angle$ IBC altijd grooter dan $\angle$ IAC: en derhalve kan het geen in de tweede Aanmerking op het eerste geval gezegd is hier geen plaats hebben.

II AANMERKING. Daar in dit geval $\angle$ ABI + $\angle$ ABC + $\angle$ IBC = 360°, is $\angle$ ABI + $\angle$ IBC = 360° − $\angle$ ABC = 180° + 180° − $\angle$ ABC = 180° + $\angle$ ABC + $\angle$ BAC + $\angle$ ACB − $\angle$ ABC = 180° + $\angle$ BAC + $\angle$ ACB: derhalve $\angle$ ABI + $\angle$ IBC > 180°. In het eerste geval in tegendeel is $\angle$ ABI + $\angle$ IBC < 180°. Derhalve, kan men daar uit alléén weten, al wist men het niet van elders, of B binnen dan wel buiten den driehoek AIC valt.

Indien $\angle$ ABI + $\angle$ IBC = 180°: zoude B op de lijn AC vallen: dan zoude $\angle$ ABC = 2 L zijn: $\angle$ ACB = o: en derhalve *tang.* ACB = o.

L.

I. ALGEMEENE AANMERKING. Dit Voorstel is van een zeer groot nut, om op zee en op land door eene enkele waarneming den afstand en ligging van de plaats waar men zich bevindt, te bepalen, mits men drie voorwerpen hebbe, waarvan de afstand bekend is. En indien men in Fig. 187. uit een tweede stip G (en insgelijks uit meerdere stippen) de zelfde waarnemingen als uit B doet, zal men in den driehoek BAG de zijden AB, AG, en den hoek BAG bekend hebben: en dus ook BG en de hoeken ABG, AGB kunnen bepalen al kan men B uit G niet zien.

II. ALGEMEENE AANMERKING. Men vergunne mij de oplossing van den Heer DELAMBRE hier bij te voegen, zoo wel om dat zij in zich zelve uitmuntende is, als om dat zij door schrandere Wiskundigen voor de gemakkelijkste van alle gehouden wordt.

II. ANALYTISCHE OPLOSSING.

$$BI = \frac{IC\ sin.\ \angle ICB}{sin.\ \angle IBC} = \frac{AI\ sin.\ \angle IAB}{sin.\ \angle ABI}\ \text{(III. Voorst.)}$$

dus $IC\ sin.\ \angle ABI.\ sin.\ \angle ICB = AI\ sin.\ \angle IBC.\ sin.\ \angle IAB$

of $sin.\ \angle IAB : sin.\ \angle ICB = IC\ sin\ \angle ABI : AI\ sin.\ IBC$ (III. 5.)

en $sin.\ \angle IAB + sin.\ \angle ICB : sin.\ \angle IAB - sin.\ \angle ICB = IC\ sin.\ \angle ABI + AI\ sin.\ \angle IBC : IC\ sin.\ \angle ABI - AI\ \angle\ sin.\ IBC$ (III. 8.)

maar $\frac{sin.\ \angle IAB - sin.\ \angle ICB}{sin.\ \angle IAB + sin.\ \angle ICB} = \frac{tang.\ \frac{1}{2}(\angle IAB - \angle ICB)}{tang.\ \frac{1}{2}(\angle IAB + \angle ICB)}$ (VIII. 32. N°. 82.)

dus $\frac{tang.\ \frac{1}{2}(\angle IAB - \angle ICB)}{tang.\ \frac{1}{2}(\angle IAB + \angle ICB)} = \frac{IC\ sin.\ \angle ABI - AI\ sin.\ \angle IBC}{IC\ sin.\ \angle ABI + AI\ sin.\ \angle IBC}$

stel $tang.\ p = \frac{AI\ sin.\ \angle IBC}{IC\ sin.\ \angle ABI}$

dan is $tang.\ \frac{1}{2}(\angle IAB - \angle ICB) = tang.\ \frac{1}{2}(\angle IAB + \angle ICB)\ tang.\ (45^\circ - p)$, (VIII. 37.)

nu is $\angle IAB + \angle ICB = 360^\circ - (\angle ABC + \angle AIC)$ (Fig 188, 189.) (II. 29.)

$\angle IAB + \angle ICB = \angle AIC + \angle ABC$ (Fig. 190)

$\angle IAB + \angle ICB = \angle ABC - \angle AIC$ (Fig. 191)

De som der hoeken IAB en ICB is dus in alle gevallen bekend,

kend, en het verschil der hoeken bereekend: men kan derhalve iederen hoek afzonderlijk vinden, en dus het overige volgens het III. Voorstel bereekenen.

AANMERKING. 1°. Indien $p > 45°$ is, is *tang.* $(45° - p)$ *negatief*, en zoo in dit geval *tang.* $\frac{1}{2}$ ($\angle$ IAB + $\angle$ ICB) ook *negatief* is, is *tang.* $\frac{1}{2}$ ($\angle$ IAB − $\angle$ ICB) *positief.*

2°. Indien $p > 45°$, maar *tang.* $\frac{1}{2}$ ($\angle$ IAB + $\angle$ ICB) *positief*: is *tang.* $\frac{1}{2}$ ($\angle$ IAB − $\angle$ ICB) *negatief*: en dus $\angle$ ICB > $\angle$ IAB: want $\frac{1}{2}$ ($\angle$ IAB − $\angle$ ICB) kan niet > 90° zijn.

3°. Indien $p < 45°$: en dus *tang.* $(45° - p)$ *positief*, en *tang.* $\frac{1}{2}$ ($\angle$ IAB − $\angle$ ICB) *negatief*: is ook $\angle$ ICB > $\angle$ IAB.

ALGEMEENE AANMERKING *over het eerste belangrijke geval.* De Heer PICTET, Hoogleeraar te *Geneve*, heeft een instrument uitgedacht, waar door men bij het vervaardigen van kaarten, waarop reeds de hoofdpunten met de grootste naauwkeurigheid geplaatst zijn, het invullen van het overige zeer gemakkelijk, en met eene genoegsame naauwkeurigheid verrigt. Zie hier de beschrijving die er van gegeven is in de *Bibliothèque Britannique*, voor het jaar 1811, vol. XLII. p. 110.

Het werktuig bestaat uit een' halven cirkel waarvan de middellijn zich ver buiten den omtrek uitstrekt, als een liniaal, doch waarvan de eene kant door het middelpunt, gaat, het welk door een keepje wordt aangewezen. Om hetzelve middelpunt bewegen zich nog twee linialen, die verlengde *radii* van den zelfden halven cirkel zijn, zich even ver als de eerste buiten den omtrek uitstrekken, en eenen *nonius* dragen, welke van 5′ tot 5′ aanwijst.

Bij het gebruik, schikt men de linialen zoo dat zij onderling hoeken maken gelijk aan die welke uit het bewuste stip dat op de kaart gesteld moet worden, tot drie andere plaatsen, reeds op de kaart te vinden, waargenomen zijn geworden. Het werktuig wordt op de kaart geschikt en verschikt, tot dat de drie linialen gaan door de gegeven plaatsen, ieder namelijk door die welke hij behoort aantewijzen. Als dit plaats heeft is het middelpunt des werktuigs het te bepalen stip. Hier door vermijdt men de geometrische constructiën, die anders nog al lastig vallen, en veel oplettenheid vereischen.

TWEE-

TWEEDE BELANGRIJK GEVAL IN DE PRAKTIJK.

XXII. VOORSTEL. Fig. 184 (*).

Gegeven zijnde de afſtand CD, indien men uit A en B de hoeken CAB, DAB, CBA, DBA meet, vraagt men de lengte van AB en de afſtanden CA, CB, DA, DB.

I. OPLOSSING.

$$\textit{Tang.}\ \angle CDA = \frac{\textit{ſin.}\ \angle CAD.\ \textit{ſin.}\ \angle CBA.\ \textit{ſin.}\ \angle ADB}{\textit{ſin.}\ \angle ABD\ \textit{ſin.}\ \angle ACB \mp \textit{cof.}\ \angle CAD.\ \textit{ſin.}\ \angle CBA.\ \textit{ſin.}\ \angle ADB.}$$

— zoo $\angle$ CAD ſcherp: + zoo $\angle$ CAD ſtomp is.

$$AB = \frac{\textit{ſin.}\ \angle ACB.\ \textit{ſin.}\ \angle CDA}{\textit{ſin.}\ \angle CBA.\ \textit{ſin}\ \angle CAD} \times CD.$$

BEWIJS. In de driehoeken ACB, ADB zijn de hoeken ACB en ADB bekend, dewijl de beide overige hoeken in elken driehoek bekend zijn.

Door de II. Oploſſing van het III. Geval is

$$\textit{tang.}\ \angle CDA = \frac{CA \times \textit{ſin.}\ \angle CAD}{AD \mp CA \times \textit{cof.}\ \angle CAD}$$

$$= \frac{\textit{ſin.}\ \angle CAD}{\frac{AD}{CA} \mp \textit{cof.}\ \angle CAD.}$$

maar

$$\textit{ſin.}\ \angle ACB : \textit{ſin.}\ \angle CBA = AB : AC$$
$$\textit{ſin.}\ \angle ABD : \textit{ſin.}\ \angle ADB = AD : AB$$

dus

$$AD : AC = \textit{ſin.}\ \angle ABD.\ \textit{ſin.}\ \angle ACB : \textit{ſin.}\ \angle CBA.\ \textit{ſin}\ \angle ADB.$$

en

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\textit{ſin.}\ \angle ABD.\ \textit{ſin.}\ \angle ACB}{\textit{ſin.}\ \angle CBA.\ \textit{ſin.}\ \angle ADB}:$$

en dus

$$\textit{Tang.}\ \angle CDA = \frac{\textit{ſin}\ \angle CAD}{\frac{\textit{ſin.}\ \angle ABD.\ \textit{ſin.}\ \angle ACB}{\textit{ſin.}\ \angle CBA.\ \textit{ſin.}\ \angle ADB} \mp \textit{cof.}\ \angle CAD}$$

=

(*) Zie over dit Voorſtel en eenige andere *Phil. Tranſ.* N°. 177 p. 1231.

$$= \frac{\text{sin. } \angle \text{ CAD. sin. } \angle \text{ CBA. sin. ADB}}{\text{sin. } \angle \text{ ABD. sin. } \angle \text{ ACB} \mp \text{cos. } \angle \text{CAD. sin. } \angle \text{CBA. sin. } \angle \text{ADB.}}$$

Dus wordt ∠ CDA bekend: waaruit ∠ ACD volgt: en voorts

$$\text{AC} = \frac{\text{sin. } \angle \text{ CDA} \times \text{CD}}{\text{sin. } \angle \text{ CAD}}$$

doch

$$\text{AB} = \frac{\text{sin. } \angle \text{ ACB} \times \text{AC}}{\text{sin. } \angle \text{ CBA.}}$$

en dus eindelijk

$$\text{AB} = \frac{\text{sin } \angle \text{ ACB} \times \text{sin. } \angle \text{ CDA} \times \text{CD}}{\text{sin. } \angle \text{ CBA. sin. } \angle \text{ CAD.}}$$

waaruit al het overige bekend wordt.

II. OPLOSSING.

Men kan dit Voorstel ook oplossen door het Gevolg van de eerste oplossing des derden Gevals voor de scheefhoekige driehoeken, te weten

$$\text{AD} = \frac{\text{AB. sin. } \angle \text{ ABD}}{\text{sin. } \angle \text{ ADB}}.$$

$$\text{AC} = \frac{\text{AB. sin. } \angle \text{ ABC}}{\text{sin. } \angle \text{ ACB}} \text{: derhalve}$$

$$\frac{\text{AD}}{\text{AC}} = \frac{\text{sin. } \angle \text{ ABD. sin. } \angle \text{ ACB}}{\text{sin. } \angle \text{ ABC. sin. } \angle \text{ ADB}}.$$

Dewijl alle grootheden in het tweede lid bekend zijn; stelle men

$$\frac{\text{sin. } \angle \text{ ABD . sin. } \angle \text{ ACD}}{\text{sin. } \angle \text{ ABC . sin. } \angle \text{ ADB}} = \text{tang. } a$$

dan is $\frac{\text{AD}}{\text{AC}} = \text{tang. } a$: en derhalve

(III. Geval: Opl. II.)

$$\text{cot } \tfrac{1}{2} (\angle \text{ ADC} - \angle \text{ ACD}) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} \angle \text{ CAD} \times \text{tang. } (45^\circ + a).$$

Waaruit de hoeken ADC en ACD bekend worden: en vervolgens al het overige kan worden bereekend.

AANMERKING. Men moet in het nemen van den *cotangent* van het halve verschil der hoeken met oplettendheid te werk gaan: en stellen het verschil der hoeken over *noemer* en *teller*, dus in dit

dit voorbeeld moet men nemen *cot.* $\frac{1}{2}(\angle ADC - \angle ACD)$ en niet *cot.* $\frac{1}{2}(\angle ACD - \angle ADC)$, om dat men anders ligtelijk in dwaling kan vervallen: want indien $\frac{AD}{AC} =$ *tang.* $a >$ *tang.* 45° is; is $AD > AC$: en dus $\angle ACD > ADC$: hadt men nu gesteld *cot.* $\frac{1}{2}(\angle ACD - \angle ADC) =$ *tang.* $\frac{1}{2}\angle CAD \times$ *tang.* $(45^\circ + a)$ zoude *cot.* $\frac{1}{2}(\angle ACD - \angle ADC)$ *negatief* zijn: dus zoude deze *cotangent*, *cotangent* moeten zijn van een' *negatieven* boog, en derhalve $\angle ADC > \angle ACD$: dat ongerijmd is zoodra $AD > AC$.

Indien $\frac{AD}{AC} =$ *tang.* $a <$ *tang.* $\angle 45^\circ$, en men stelde *cot.* $\frac{1}{2}(\angle ACD - \angle ADC) =$ *tang.* $\frac{1}{2}\angle CAD \times$ *tang.* $(45^\circ + a)$ moet dit product *negatief* zijn; om dat als dan $\angle ADC > \angle ACD$.

TIENDE BOEK.

OVER DE LIGGING EN SNIJDING DER VLAKKEN.

I. BEPALING. Fig. 193.

Eene regte lijn [FE] ſtaat loodregt op een vlak [RS] wanneer zij loodregt ſtaat op alle de lijnen [AB, DC], die in het gemelde vlak liggen en elkander ſnijden in het ſtip daar de lijn FE het vlak ontmoet.

EUCL. XI Bep. 3. — St. IX. def. 10. — L. G. V. Bep. 1.

AANMERKING. Men houde hier beſtendig de 3de en 7de Bepaling van het I. Boek in het oog: uit welke het klaarblijkelijk volgt dat eene regte lijn geheel in één en het zelfde vlak ligt: hoewel anderen zulks opzettelijk bewezen hebben.

EUCL. XI. pr. 1. — St. IX. 1. — L. G. V. 1.

II. BEPALING. Fig. 194 en 195.

Wanneer een vlak [AV] op een ander vlak [PQ] ſtaat, of hetzelve ſnijdt; wordt de lijn [UV] die aan beide de vlakken gemeen is, de *gemeene ſnede* van die vlakken genoemd.

EUCL. XI. 3. — St. IX. pr. 2.

AANMERKING. Deze Bepaling vooronderſtelt dat de *gemeene ſnede* eene regte lijn is: het geen wederom klaarblijkelijk uit de bepaling van een vlak volgt: anderen hebben dit echter bewezen.

EUCL. XI. 3. — St. IX. 2.

III. BEPALING. Fig. 194.

Een vlak [AV] ſtaat loodregt op een ander vlak [PQ] wanneer de lijnen [EF, DG] die, in een der vlakken liggende, op de gemeene ſnede [UV] loodregt ſtaan, ook tevens loodregt op het andere vlak [AV] ſtaan.

EUCL. XI. Bep. 4. — St. IX. def. 13. — L. G. V. Bep. 5.

IV.

IV. BEPALING. Fig. 196.

De helling van eene regte lijn [FC] op een vlak [PQ] is de scherpe hoek [FCE] welke die lijn [FC] maakt met de lijn [CE], die in het gemelde vlak uit het uiteinde [C] der gegeven lijn getogen wordt tot het stip [E], daar de loodlijn, [FE] uit het andere einde [F] van de gegeven lijn nedergelaten, het vlak ontmoet.

EUCL. XI. Bep. 5. — St. IX. def. 11. — L. G. V. 17.

V. BEPALING. Fig. 195.

De helling van een vlak [AV] op een ander vlak [PQ] is de scherpe hoek [BEF], welke gevormd wordt door twee lijnen [BE, EF] uit het zelfde stip E van de gemeene snede [UV] in ieder vlak loodregt op die snede opgerigt.

EUCL. XI. Bep. 6. — St. IX. Bep. 12. — L. G. Bep. 4. pr. 17.

VI. BEPALING.

Hierom worden vlakken gezegd *gelijkelijk* op andere vlakken te hellen, wanneer zij onderling gelijke hellingen hebben: en *evenwijdige* vlakken worden die genoemd, welke op een derde vlak gelijkelijk hellen, dat is, met eene en de zelfde lijn, die in dat derde vlak loodregt op de beide gemeene sneden staat, gelijke hoeken naar den zelfden kant maken.

I. AANMERKING. Anderen zeggen, dat twee vlakken onderling evenwijdig zijn, indien zij zich nimmer ontmoeten of snijden. EUCL. XI. Bep. 8. — Anderen noemen evenwijdige vlakken die welke overal den zelfden afstand van elkander hebben. — St. IX. def. 14. — L. G. V. Bep. 3

Zie hier over het geen wij gezegd hebben van dergelijke Bepalingen in de Aanmerking op de VIII. en op de X. Bepaling van het I. Boek.

II. AANMERKING. Zoo ook noemen sommigen eene lijn evenwijdig aan een vlak, als zij het zelve, hoe ook verlengd, nimmer ontmoet.

L. G. V. Bep. 2.

I. VOORSTEL. Fig. 197.

Een driehoek ligt altoos in één vlak.

EUCL. XI. 2. — St. IX. 3. Gev. 1.

BEWIJS. Door de eerſte bepaling: of regtſtreeks, of uit het ongerijmde: in het laatſte geval onderſtelt men dat het gedeelte ACKI in één vlak, het gedeelte IEK in een ander vlak ligt.

I. GEVOLG.

Wanneer drie ſtippen naar welgevallen gegeven zijn, kan men altijd onderſtellen dat er een vlak door dezelve gaat: en de ligging van dat vlak is bepaald.

St. IX. 1. Gev. 2.

II. GEVOLG. Fig. 197.

Twee lijnen [AB, DC] die elkander ſnijden, liggen in een en het zelfde vlak.

EUCL. XI. 2. — St. IX. 3. — L. G. V. pr. 2.

III. GEVOLG.

Men kan altijd een vlak langs twee gegeven lijnen laten gaan; en deszelfs rigting is bepaald, door de ligging der lijnen.

L. G. V. 2.

II. VOORSTEL. Fig. 193.

Indien eene regte lijn [EF] in het ſtip [E], daar twee lijnen [AB, DC] zich ſnijden, loodregt op dezelve ſtaat, ſtaat zij ook loodregt op alle de lijnen die in het vlak liggen dat door de twee gegeven lijnen gaat, en dus ook op dat vlak zelve.

EUCL. IX. 4. — St. IX. 4. — L. G. V. 4.

BEREIDING. Maak EA = EB, EC = ED:
Trek AD, CB, en door E de lijn PEQ naar willekeur, vervolgens FA, FP, FD, FC, FQ, FB:

BEWIJS. Uit I. 21. is in ΔΔ AED en CEB: 1°. AD = BC. 2°. ∠ DAE = ∠ EBC.
Uit I. 21. en 1°. en 2°. is in ΔΔ APE en EBQ. 3°. AP = BQ. 4°. PE = EQ.
Uit I. 21. is in ΔΔ AEF en FBE. 5°. AF = FB.
Uit I. 21. is in ΔΔ DFE en EFC: 6°. DF = FC.
Uit I. 26. en 1°., 5°., 6°., is 7°. ∠ DAF = ∠ FBC.
Uit I. 21. 7°., 3°., 5°. is in ΔΔ APF en BFQ. 8°. PF = FQ.

Uit

Uit I. 26. en 8°, 4°. is in ΔΔ PEF en FEQ, 9°. ∠ PEF = ∠ FEQ.

d. i. I. Bep. 9. EF staat loodregt op PQ: en dus ook op alle lijnen welke door E gaan en in het vlak RS liggen.

I. GEVOLG.

Uit een en het zelfde stip, het zij [F] boven het vlak, het zij [E] in het vlak, kan men maar ééne éénige lijn [FE] trekken, die loodregt op het vlak is.

EUCL. XI. 13. — St. IX. def. 10. Gev. — L. G. V. 4. Gev. 2.

II. GEVOLG.

De loodregte lijn is de kortste van alle de lijnen die men uit een stip [F] boven een vlak op het vlak kan laten vallen.

L. G. V. 4. Gev. 1.

I. AANMERKING. Fig. 196. Het blijkt, dat zoo men eene lijn DI naar welgevallen in een vlak trekt, daarop uit een stip F boven het vlak de lijn FC loodregt laat vallen: verder uit C op DI de loodlijn CE in het vlak trekt, en dan uit F de lijn FE loodregt op CE; dat dan de lijn FE ook loodregt op het vlak zijn zal.

EUCL. XI. 11. — St. IX. 11.

III. GEVOLG.

De schuinsche lijnen [bijv. AF, FB Fig. 193] uit een stip F boven het vlak getogen, die even ver van de loodlijn afstaan, en dus ook met dezelve gelijke hoeken [AFE, BFE] maken, zijn even lang; en alle die even lang zijn, staan in den omtrek van een' cirkel, uit het stip F met eenen *radius* [FA] gelijk aan eene dier lijnen, in het vlak zelve getrokken. En zoo twee schuinsche lijnen onderling ongelijk zijn, is die de kortste die, welke den kleinsten hoek met de loodlijn maakt.

St. IX. Bep. 10. Gev. — L. G. V. 5.

IV. GEVOLG. Fig. 194.

Indien eene lijn BD loodregt op een vlak staat, staat ook alle de vlakken [zoo als AV] welke langs die lijn gaan loodregt op het zelfde vlak.

EUCL. XI. 18. — St. IX. Bep. 13. Gev. 7. — L. G. V. 18.

V.

V. GEVOLG.

Indien men uit een stip B van een vlak AV dat loodregt op een ander vlak PQ staat eene loodlijn op dat laatstgemelde vlak nederlaat, zal die lijn in de gemeene snede vallen.

EUCL. XI. 38.

VI. GEVOLG. Fig. 198.

Indien twee vlakken CD, AB, die elkander snijden, beide loodregt op een derde vlak PQ staan, staat derzelver gemeene snede EF ook loodregt op dat vlak.

EUCL. XI. 19. — St. IX. 6. — L. G. V. 19.

III. VOORSTEL. Fig. 199.

Indien eene regte lijn [FE] loodregt staat op drie lijnen [EA, EG, EC], in dat stip [E] waar die drie lijnen elkander snijden; liggen die lijnen in het zelfde vlak.

EUCL. XI. 5. — St. IX. 4. Gev.

BEWIJS. Uit het ongerijmde door het II. Voorstel: stellende bijv. dat de lijn EA in een vlak ligt dat van het vlak PQ, waarin de beide andere EG, EC liggen, verschillend is, en latende door FE en EA een vlak gaan, waarvan EO de gemeene snede is met het vlak PQ.

IV. VOORSTEL. Fig. 200.

Indien twee regte lijnen [AB, CD] loodregt op het zelfde vlak [PQ] staan, zijn zij onderling evenwijdig. En omgekeerd; indien twee regte lijnen onderling evenwijdig zijn, en eene derzelve staat loodregt op een vlak, is de andere ook loodregt op dat vlak.

EUCL. XI. 6, 8. — St. IX. 7. — L. G. V. 7. en 1. Gev.

BEREIDING. Men stelt dat door de lijnen AB, CD een vlak ACDB gaat, waarvan BD de gemeene snede met PQ is.

BEWIJS. Uit het 4. Gev. van het II. Voorstel; en I. Bep. 10. Voor het II. uit het 3. Gev. van het II. Voorstel, en I. Bep. 10.

AANMERKING. Hieruit volgt wederom, dat, indien men uit eenig stip B in een vlak een loodlijn BA op dat vlak wil oprigten, men eerst uit eenig stip C buiten het vlak eene loodlijn CD op het zelve moet laten vallen, en dan uit het gegeven stip B eene lijn trekken die met de gemelde loodlijn evenwijdig is.

EUCL. XI. 12. — St. IX. 12.

V.

V. VOORSTEL. Fig. 201.

Twee lijnen [AB, CD], die elk evenwijdig zijn aan eene en dezelfde derde lijn [EF], hoewel deze niet met de twee anderen in het zelfde vlak ligt, zijn ook onderling evenwijdig.

EUCL. XI. 9. — St. IX. 9.

BEREIDING. Men ſtelt dat er door EF en AB een vlak EQ, en door EF en CD een vlak EP gaa. Men trekt uit eenig ſtip G van de lijn EF, de lijn GH loodregt op AB, en GK loodregt op CD, en eindelijk de lijn HK, en men ſtelt dat er een vlak door HGK gaa.

BEWIJS. Uit het IV. Voorſtel.

VI. VOORSTEL. Fig. 203.

Indien twee lijnen [AB, BC] in eenig vlak liggende eenen hoek [ABC] onderling maken, en in een ander vlak twee lijnen [DE, FE], die insgelijks eenigen hoek [DEF] onderling maken, elk evenwijdig aan eene derzelve zijn; zullen die hoeken gelijk zijn, en de vlakken [ABC en DEF] die door de gemelde lijnen gaan, zullen ook onderling evenwijdig zijn.

EUCL. XI. 10 en 15. — St. IX. 10 en 14. — L. G. V. 13 en 14.

BEREIDING. Stel ED = AB: EF = BC: trek AD, BE, CF, AC, DF.

BEWIJS. Uit I. 30: X. 5: I. 26 en X. Bep. 6.

VII. VOORSTEL. Fig. 204.

Indien eene en dezelfde lijn [EF] loodregt ſtaat op twee vlakken [PQ, RS], zullen die vlakken evenwijdig aan elkander zijn.

EUCL. XI. 14. — St. IX. 13. — L. G. VI. 11.

BEREIDING. Men ſtelle dat er door de gegeven lijn EF, en eenige lijn EG in het vlak, PQ bijv., getrokken, een vlak EGHF gaat, waarvan de gemeene ſnede met RS de lijn FH is.

BEWIJS. Uit het 4 Gevolg van het II. Voorſtel, en de VI. Bepaling.

I. GEVOLG.

Alle de loodlijnen die tusſchen twee vlakken, welke onder-

derling evenwijdig zijn, getrokken kunnen worden, zijn gelijk. (Door L. 21. stellende HF = GE, en trekkende GF).

L. G. V. 12.

AANMERKING. Hieruit worden de redenen afgeleid der Bepalingen waarvan wij in de Aanmerking op de VI. Bepaling gewag gemaakt hebben.

II. GEVOLG.

Indien twee evenwijdige vlakken door een derde vlak gesneden worden, zijn derzelver gemene sneden onderling evenwijdig.

EUCL. XI. 16.

VIII. VOORSTEL. Fig. 202.

Indien twee regte lijnen [AB, CD] door evenwijdige vlakken [HG, LK, NM] gesneden worden, worden zij in de zelfde rede gesneden.

EUCL. XI. 17. — St. IX. 18. — L. G. V. 15.

BEWIJS. Uit het 2. Gevolg van het VII. Voorstel: IV. 2. en III. 10.

ELF-

ELFDE BOEK.

OVER DE LIGCHAMELIJKE FIGUREN DIE DOOR VLAKKE OPPERVLAKTEN BEPAALD ZIJN.

I. AFDEELING.

OVER DE LIGCHAMELIJKE HOEKEN.

I. BEPALING.

Een *ligchaam*, of *ligchamelijke figuur*, is eene besloten figuur, die in lengte, breedte, en hoogte, of diepte, uitgestrekt is. Zij wordt dus door oppervlakten bepaald.

EUCL. XI. def. 1, 2. — St. IX. def. 1, 2.

AANMERKING. Die oppervlakten zijn, of vlak, of krom. In dit elfde Boek wordt alleen gesproken van ligchamen door vlakke oppervlakten, of door *vlakken*, bepaald; in het twaalfde zullen wij over de andere handelen. De verschillende vlakken, welke een ligchaam bepalen, hebben onderling eene bepaalde helling, die dus ook *hoek* kan genoemd worden, maar van de vlakke hoeken verschilt, hoewel uit vlakke hoeken bestaande: men noemt denzelven *ligchamelijken* hoek.

II. BEPALING.

Ligchamelijke hoek, door anderen ook *veelvlakkige hoek* genoemd, is een hoek, die door drie of meerdere vlakke hoeken gevormd is, welke in verschillende vlakken liggen, en wier toppen in een stip samenkomen.

EUCL. XI. def. 11. — St. IX. def. 15. — L. G. V. Bep. 6.

AANMERKING. In Fig. 205. bestaat de ligchamelijke hoek A uit drie vlakke hoeken CAB, CAD, DAB; in Fig. 206. bestaat de ligchamelijke hoek V uit vijf vlakke hoeken GVI, IVD, DVE, EVF, FVG. Dat er ten minsten drie vlakke hoeken moeten zijn om eenen ligchamelijken hoek te maken, valt in het oog.

I. GEVOLG.

De toppen der vlakke hoeken die eenen ligchamelijken hoek uitmaken komen dus in één ftip te famen; en een der beide beenen van iederen vlakken hoek, is tevens een der beenen van den naastliggenden. AB (Fig. 205.) is gemeen aan de hoeken CAB, en BAD: AD aan de hoeken BAD, en CAD: AC aan de hoeken CAD en BAC. Die beenen worden door fommigen de ribben (*les côtes*, ook *les arêtes*), en de vlakken, die tusfchen dezelven begrepen zijn, de *vlakken* of *zijden* (*les plans*) van den ligchamelijken hoek genoemd; terwijl het ftip waarin zich de toppen der vlakke hoeken vereenigen, de top van denzelven is. Wij zullen die benamingen van *ribben* en *vlakken*, of *zijden*, behouden.

II. GEVOLG. Fig. 205, 206.

Indien men op eene der ribben van een' ligchamelijken hoek een ftip neemt, en door hetzelve een vlak laat gaan dat de zijden (zoo noodig verlengd) van den ligchamelijken hoek fnijdt, zullen de gemene fneden van die zijden en het gemelde vlak, op het zelve, eenen veelhoek daarftellen van zoo vele zijden als er vlakke hoeken zijn die den ligchamelijken hoek uitmaken; en dus eenen driehoek, vierhoek, vijfhoek, naar mate de gegeven ligchamelijke hoek uit drie, vier, vijf vlakke hoeken beftaat.

II. AANMERKING. Hierop komt, naar ons inzien, de 22 prop. van het XI. Boek van EUCLIDES uit: ten minften voor zoo verre het gebruik betreft dat hij daarvan in de 23 propofitie maakt: want de voorwaarde die hij opgeeft, dat twee van de drie gegeven platte hoeken grooter moeten zijn dan de derde, is flechts eene dier voorwaarden welke vereischt worden op dat er uit de drie gegeven platte hoeken een ligchamelijke hoek gemaakt zoude kunnen worden: de gelijkheid der ribben, die hij verder vordert, is op dat men zeker zoude zijn dat er door de uiteinden derzelve een vlak zoude kunnen gaan: hetwelk echter alleen doorgaat voor drie hoeken.

III. GEVOLG.

Twee ligchamelijke hoeken zullen dus gelijk zijn, indien, wanneer de top vooronderfteld wordt met den top overeentekomen, alle de vlakke hoeken, waaruit die ligchamelijke hoeken gevormd zijn, insgelijks overeenkomen: en

en gevolgelijk zijn twee ligchamelijke hoeken gelijk, wanneer zij gevormd worden door vlakke hoeken die gelijk zijn in getal, en boven dien in grootte, ieder aan ieder, en eindelijk onderling volgens de zelfde orde geplaatst zijn.

III. AANMERKING. De vlakke hoeken die twee ligchamelijke hoeken uitmaken, zouden gelijk kunnen zijn ieder aan ieder, zonder dat de ligchamelijke hoeken daar door gelijk waren, óf, op elkander gesteld, zouden overeenkomen: te weten, indien gemelde vlakke hoeken in beide de ligchamelijke niet in de zelfde orde waren geplaatst. Zie ook L. G. V. 23. *Schol.*

IV. AANMERKING. De vlakken, welke eenen ligchamelijken hoek uitmaken, kunnen hunne, hoeken, of alle buitenwaarts, of gedeeltelijk buiten- en gedeeltelijk binnenwaarts gekeerd hebben: welke gevallen men behoorlijk moet onderscheiden zoo als uit de Aanmerking op het II. Voorstel blijken zal.

I. VOORSTEL. Fig. 204.

Indien een ligchamelijke hoek [A] uit drie vlakke hoeken [BAD, DAC, CAB] bestaat, zijn altijd twee derzelve te samen, grooter dan de derde.

EUCL. XI. 20. — St. IX. 19. — L. G. V. 21.

BEREIDING. Zij ∠ BAC de grootste der drie: men stelle in het vlak dat langs CA en BA gaat, ∠ BAE = ∠ BAD: AE = AD: men trekke door E, BEC: vervolgens CD, BD.

BEWIJS. Men bewijst eerst uit I. 21, dat BD = BE: vervolgens uit I. 19, dat BD + DC > BC: gevolgelijk DC > EC: waaruit door I. 18. door het nemen der som van ∠ DAC en ∠ BAD, en van ∠ CAE en ∠ EAB het besluit volgt.

II. VOORSTEL. Fig. 205.

Alle de vlakke hoeken welke eenen ligchamelijken hoek uitmaken zijn kleiner dan vier regte hoeken.

EUCL. XI. 21. — St. IX. 20.

BEREIDING. Men neemt in ieder der ribben AC, AD, AB, een stip C, D, B, zoodanig dat door dezelve het vlak CDB gaan kan: hetwelk derhalven met de vlakken

langs CA en AD, CA en AB, AB en AD gaande, ligchamelijke hoeken in B, C, D maakt.

BEWIJS. Men bewijst eerst uit het eerste Voorstel dat de som der zes vlakke hoeken [ABC, ABD, ACB, ACD, ADC, ADB] om B, om C, en om D grooter is dan de som der drie hoeken van den △ BCD; en dus dan twee regte hoeken (I. 15.): die som aftrekkende van de som der hoeken in de driehoeken BAD, CAD, CAB, en de twee regte hoeken van zes regte hoeken die gelijk zijn aan de laatstgemelde som (I. 15.), verkrijgt men tot besluit het voorgestelde.

I. AANMERKING. Dit Bewijs is eigenlijk geschikt voor eenen ligchamelijken hoek uit drie vlakke hoeken bestaande: hoewel het zelve op andere meer samengestelde hoeken kan toegepast worden. Doch het volgende, door CLAVIUS voorgesteld, is meer algemeen.

In Fig. 206. zijn de hoeken van alle de driehoeken FVE, FVG, enz. die eenen vlakken hoek uitmaken, en waarvan de zijden EF, FG, enz. in een vlak liggen, gelijk aan twee maal zoo vele regte hoeken, als het grondvlak zijden heeft. Maar alle de hoeken FGI, GFE, enz. van het grondvlak zijn gelijk aan het zelfde getal regte hoeken, *min* vier (II. 29.); dus zijn alle de hoeken van gemelde driehoeken gelijk aan alle de hoeken van het grondvlak, *plus* vier regte hoeken.

Dan, van alle die hoeken in de gemelde driehoeken zijn de twee, zoo als GFV, VFE, die eene gemeene ribbe VF hebben, grooter dan de hoek GFE van het grondvlak met welken zij eenen ligchamelijken hoek uitmaken: (I. Voorstel).

Gevolgelijk, dit wederzijds aftrekkende, heeft men de hoeken om den top, dat is, die welke den ligchamelijken hoek uitmaken, te samen kleiner dan vier regte hoeken.

II. AANMERKING. Dit Voorstel geldt slechts wanneer alle de vlakke hoeken die eenen ligchamelijken hoek uitmaken buitenwaarts gekeerd, of alle uitspringende, zijn: maar niet zoo eenige derzelver uitspringende, andere inspringende zijn, zoo als zulks het eerst is opgemerkt door den Heer LE SAGE *Hist. de l'Acad. de Paris* A°. 1756. p. 77.

Wij

Wij hebben in het XXX. Voorstel van het II. Boek iets dergelijks voor de veelhoeken aangeteekend.

III. VOORSTEL. Fig. 207.

Indien men uit den top [A] van een' ligchamelijken hoek uit drie vlakke hoeken [BAC, CAD, DAB] bestaande, eene loodlijn [AP] nederlaat op het driehoekig vlak [BCD], het welk door de stippen [C, B, D] op ieder der ribben op gelijke afstanden [AC = AD = AB] van den top genomen, gaat; zal die loodlijn AP op het middelpunt vallen van den cirkel, welke om den gemelden driehoek [BCD] beschreven kan worden.

BEREIDING. Trek uit P de lijnen PB, PC, PD: men moet bewijzen dat deze gelijk zijn, het zij het stip P binnen, het zij het buiten den driehoek BCD valt.

BEWIJS. In de driehoeken PAC en DAP is AC = AD, AP = AP, en ∠ P regt: dus (I. 25.) is PD = PC: insgelijks, in △△ PAC en PAB, is PC = PB: dus PD = PC = PB: en P is het middelpunt van den cirkel om den driehoek beschreven.

I. GEVOLG.

Dus □ op AP = □ op AC — □ op PC (II. 16. Gev. 1.)

II. GEVOLG.

Hieruit blijkt hoe men uit drie gegeven vlakke hoeken, waarvan er twee grooter zijn dan de derde, en die te samen kleiner zijn dan vier regte, eenen ligchamelijken hoek maken kan.

Want men neme AB = AC = AD. Men trekke de grondlijnen BC, CD, BD: en make uit dezelven eenen driehoek (III. B. der Werkstukken, het I. Werkst.). Men beschrijve om dien driehoek eenen cirkel (VI. B. 5. Werkstuk) waarvan P het middelpunt is. Men rigte uit P op het vlak BCD eene loodlijn PA (X. 4. Aanmerking): men make PA zoodanig dat □ op PA = □ op AC — □ op PC (B. II. 26 Werkstuk): men trekke AB, AC, AD: en de vlakken die langs AB, AD en BD; AB, AC en BC; AC, AD en CD gaan; zullen den gevraagden ligchamelijken hoek uitmaken.

I. AANMERKING. Dit is het 23. Voorstel in het XI. B. van EUCLIDES. — L. G. V. 24.

II. AANMERKING. Dit Voorstel gaat niet door voor de ligchamelijke hoeken die uit meer dan drie vlakke hoeken bestaan: om dat, al zijn de ribben (GV, FV, EV, DV, IV Fig. 206.) gelijk, de stippen G, F, E, D, I niet altijd in één vlak zijn: daar in tegendeel drie stippen B, C, D (Fig. 205.), zich altijd in één vlak bevinden. Doch wanneer dit plaats heeft voor den ligchamelijken hoek uit meer dan drie platte hoeken samengesteld, dan heeft dit Voorstel ook plaats.

L. G. V. 25. *Schol.*

IV. VOORSTEL. Fig. 208.

Indien twee ligchamelijke hoeken [A en F] uit drie vlakke hoeken bestaan, welke onderling gelijk zijn, ieder aan ieder [∠ DAC = ∠ EFH: ∠ CAB = ∠ HFG: ∠ DAB = ∠ EFG], zullen die vlakken [DAC en CAB, EFH en HFG] welke gelijke hoeken bezitten: de zelfde helling op elkander hebben.

L. G. V. 23.

BEREIDING. Men neme op de ribben AC en FH, AI = FM: men trekke uit I op de vlakken DAC en CAB, op AI de loodlijnen IK en IL: en uit M op de vlakken EFH en HFG, op FM de loodlijnen MN en MO: Dan zijn de ∠∠ KIL en NMO de helling der vlakken DAC en CAB, en der vlakken EFH en HFG op elkander (X. Bep. 5.). Ik zeg dat ∠ KIL = ∠ NMO.

BEWIJS. In ΔΔ KAI en NFM is (I. 21.) 1°. KI = NM: 2°. AK = FN. En in ΔΔ IAL en MFO is insgelijks: 3°. IL = MO: 4°. AL = FO. In ΔΔ KAL en NFO is (onderstell.: en N° 2 en 4°.) door I. 21. 5°. KL = NO: derhalve is in ΔΔ KIL en NMO uit 1°, 3°, 5° en I. ∠ KIL = ∠ NMO.

V. VOORSTEL. Fig. 209.

Twee ligchamelijke hoeken [F en A] ieder uit drie vlakke hoeken [GFH, GFI, IFH, en MAD, MAC, CAD] bestaande, zijn gelijk; indien, wanneer in beiden een

een vlakke hoek gelijk is, [∠ GFH = ∠ MAD] de ribben die over die gelijke hoeken staan, in beiden; met het vlak van dien hoek de zelfde helling hebben [∠ IFL = ∠ CAE]: en het vlak dat langs die ribbe loodregt op het vlak van den gelijken hoek staat, denzelven in beiden in de zelfde rede verdeelt.

BEREIDING. Zij IL de loodlijn uit I op het vlak FGH nedergelaten: trek FL en door L de lijn GLH: vervolgens FI, IH.

Zij CA = FI: CE de loodlijn uit C op het vlak MAD nedergelaten; trek AE: dus is (X. Bep. 4.) ∠ CAE = ∠ IFL.

Zij MA = GF: trek door M en E de lijn MED: vervolgens MC, CD.

Men moet bewijzen dat ∠ MAC = ∠ GFI en ∠ CAD = ∠ IFH.

BEWIJS. In de driehoeken FLI en AEC, is AC = FI: ∠ CAE = ∠ IFL: ∠ FLI = ∠ AEC = L dus 1°. AE = FL: LI = EC: (I. 22.)
verder ∠ GFL: ∠ LFH = ∠ MAE: ∠ EAD. (onderst.) dus (III. 8.)
∠ GFL + ∠ LFH: ∠ MAE + ∠ EAD = ∠ GFL: ∠ MAE = ∠ LFH: ∠ EAD;
of
∠ GFH: ∠ MAD = ∠ GFL: ∠ MAE = ∠ LFH: ∠ EAD
en dus (III. 4.) om dat ∠ GFH = ∠ MAD
is 2°. ∠ GFL = ∠ MAE en ∠ LFH = ∠ EAD.
Dus is in de ΔΔ GFL en MAE,
GF = MA: FL = AE: en ∠ GFL = ∠ MAE (N°. 2.)
dus 3°. ∠ FGL = ∠ AME: en GL = ME. (I. 21.)
4°. Op de zelfde wijze in ΔΔ LFH en EAD is
LH = ED.
En dus, in ΔΔ GLI en MEC, is
LI = EC (N°. 1.): GL = ME (N°. 3.)
∠ GLI = L = ∠ MEC: dus (I 21.)
5°. MC = GI.
6°. Op de zelfde wijze: IH = CD:
dus is in ΔΔ GFI en MAC, GF = MA: FI = AC (bereid): en GI = MC N°. 5. dus

 7°.

7°. ∠ GFI = ∠ MAC (I. 26.) en op de zelfde wijze ∠ IFH = ∠ CAD.

I. GEVOLG.

Hieruit blijkt, dat, om in een gegeven ftip A van eene gegeven lijn AM, eenen ligchamelijken hoek gelijk aan eenen ligchamelijken hoek F. te maken, men niets te doen heeft, dan uit I. de loodlijn IL te laten vallen, FL te trekken, vervolgens ∠ MAD = ∠ GFH, MA = GF, AD = FH, ∠ MAE = ∠ GFL, AE = FL te maken: uit E, EC loodregt op het vlak MAD te rigten: EC gelijk aan LI te maken, en dan AC te trekken: de vlakken die langs MA en AC, en langs CA en AD gaan, zullen met het vlak MAD in A eenen ligchamelijken hoek maken gelijk aan den gegeven hoek F.

EUCL. XI. 26. — L. G. V. 24.

II. GEVOLG.

Het omgekeerde van dit Voorftel, waarvan de waarheid in het oog valt, levert de 35 propofitie van EUCLIDES XI. Boek op: namelijk: „ indien twee vlakke hoeken, GFH, „ MAD, onderling gelijk zijn, en men uit de toppen F „ en A twee regte lijnen FI, AC, in een ander vlak „ trekt, welke met de zijden der gegeven hoeken, hoe- „ ken maken die onderling gelijk zijn: namelijk ∠ MAC „ = ∠ GFI: ∠ CAD = ∠ IFH: en men uit eenige „ ftippen C en I in die lijnen, op de vlakken der gege- „ vene hoeken MAD, GFH loodlijnen CE, IL laat val- „ len, en de ftippen daar die loodlijnen vallen met de „ toppen dier hoeken door lijnen (EA, LF) vereenigt: „ zullen de hoeken EAC, LFI, welke die lijnen met de „ gemelde loodlijnen maken, onderling gelijk zijn.”

II.

II. AFDEELING.

OVER DE LIGCHAMEN DIE DOOR VLAKKE OPPERVLAKTEN BEPAALD WORDEN.

III. BEPALING.

Veelvlakkige of *veelkantige* ligchamen (*solide polyèdre*; of *polyèdre*; *polyhedrum*), worden genoemd alle ligchamelijke figuren, die uit vlakke *oppervlakten* samengesteld zijn. Die vlakke oppervlakten zijn door regte lijnen bepaald.

L. G. VI. def. 1.

I. AANMERKING. Men noemt die ligchamen, wanneer zij voor het overige geen bijzondere naam dragen, naar het aantal der vlakken waaruit zij bestaan, *viervlakkige*, *vijfvlakkige*, enz. En het blijkt duidelijk dat geen ligchaam uit minder dan uit vier vlakken kan bestaan: daar geen ligchamelijke hoek uit minder dan uit drie vlakke hoeken, of *zijden*, bestaan kan: die; zullen zij eene geslotene en bepaalde figuur uitmaken, door een vierde vlak moeten veréénigd worden.

II. AANMERKING. Men moet dan in veelvlakkige ligchamelijke figuren letten, op het getal, en de gedaante der vlakken waaruit zij bestaan; op het getal en den aard der vlakke hoeken, welke iederen ligchamelijken hoek uitmaken: op het getal van *ribben* welke de op elkander hellende vlakken daar stellen: en op den hoek welke twee naastliggende vlakken met elkander maken.

IV. BEPALING.

Wanneer men een der vlakken, uit welke de ligchamelijke figuur bestaat, voor *basis*, of *grondvlak*, aanneemt, noemt men *hoogte* van de figuur de loodlijn die uit den top van de figuur op dat grondvlak nedergelaten is: of, zoo het meest verhevene vlak van de figuur evenwijdig is aan het grondvlak, is de hoogte van de figuur de loodlijn die tusschen die twee evenwijdige vlakken begrepen is.

L. G. VI. def. 6, 12.

AANMERKING. De reden blijkt uit de Bepaling. En men

 ziet

ziet dat het geen men *basis* noemt, voor de platte figuren eene lijn, voor de ligchamelijke een vlak is: zoo dat men in het eerste geval van *grondlijnen*, in het laatste van *grondvlakken* spreekt.

V. BEPALING.

De *inhoud* van eene ligchamelijke figuur is de ruimte begrepen tusschen de oppervlakten welke de figuur bepalen: en gevolgelijk zijn twee ligchamelijke figuren gelijkhalig, dat is, hare inhouden zijn gelijk, wanneer die ingesloten ruimten gelijk zijn.

I. AANMERKING. Anderen dragen de zaak dus voor. Indien twee ligchamen ieder door vlakken, welke bestendig aan eene hunner oppervlakten evenwijdig zijn, gedeeld worden; zullen de ligchamen gelijk zijn, wanneer de vlakken door de zelfde snede in ieder ligchaam gevormd, bestendig gelijk zijn, ieder aan ieder. Zij beschouwen die vlakken, welke door eene dergelijke verdeeling geboren worden, als zijnde de *samenstellende deelen*, uit welke de gegeven ligchamen gevormd worden. Deze redenering komt dan hier op uit: wanneer de samenstellende deelen, welke twee ligchamen uitmaken, gelijk zijn, ieder aan ieder, evenveel in getal, en op dezelfde wijze geplaatst, zullen die ligchamen gelijk zijn. Dit is buiten twijfel: doch op welke wijze zal men over de gelijkheid van die *samenstellende* deelen oordeelen? De schrijvers, van welke wij hier spreken, stellen dat die deelen oneindig *dun* zijn, om dus de ligchamen als uit een *oneindig getal vlakken samengesteld*, te kunnen beschouwen, het geen mij voorkomt van de mathematische naauwkeurigheid aftewijken, en valsche denkbeelden inteboezemen, en dus geheel verworpen te moeten worden.

St. XI. 1. Aanm. op de 4. def.

II. AANMERKING. De Wiskunstenaars letten, in het denkbeeld dat zij zich van ligchamen vormen, alleen op de grootte, het getal, en de plaatsing der oppervlakten, waaruit die ligchamen bestaan, dat is, door welken zij omvat worden; en geenzins op het geen de Natuurkundigen *ondoordringbaarheid* noemen: waarom dan ook de Wiskunstenaars verscheiden ligchamen op het zelfde grondvlak plaatsen, hoewel zulks voor wezenlijke en ondoordringbare ligchamen onmogelijk is.

VI.

VI. BEPALING.

Gelijkvormige ligchamen zijn die, wier vlakken gelijk in getal, gelijkvormig, en gelijkelijk geplaatst zijn.

EUCL. VI. def. 9. — St. IX. Bep. 3.

AANMERKING. In gelijkvormige ligchamen zijn dan de even-eensgeplaatste ligchamelijke hoeken gelijk, en de vlakken uit welke deze gevormd worden, zijn gelijkvormig, d. i. de vlakke hoeken zijn in dezelve gelijk, en de zijden om die hoeken zijn evenredig: waar door deze bepaling van gelijkvormigheid met de I. Bepaling van het IV. Boek overeenkomt.

VII. BEPALING.

Gelijkhaltige en gelijkvormige ligchamen zijn die, welke door gelijkvormige vlakken, gelijk in getal en in grootte, begrepen, of omvat, worden.

EUCL. XI. def. 10. — St. IX. Bep. 4.

AANMERKING. Men moet voor de ligchamelijke figuren, even als voor de platte, behoorlijk onderscheiden tusschen *gelijk*, dat is *gelijk in alle opzichten*, wanneer alle deelen gelijk zijn, ieder aan ieder, gelijkelijk geplaatst, en, in den zelfden rang genomen, ook gelijkelijk op elkander hellen: en tusschen *gelijkhaltig* te zijn. Dit laatste geldt voor figuren die, zelfs zeer veel, in gedaante verschillen. Wij zullen dit verschil, ook voor de teekens, bestendig in het oog houden.

VIII. BEPALING.

Een *Prisma* of *Zuil*, is een ligchaam door verscheiden vlakken omvat of begrepen, van welken er twee gelijk en gelijkvormig, over elkander gesteld, en aan elkander evenwijdig zijn. Die twee kunnen *bases*, of *grondvlakken*, van het *prisma* of van de *zuil* genoemd worden.

EUCL. XI. def. 13. — St. IX. Bep. 7. — Le G. VI. def. 4.

I. GEVOLG.

De vlakken die, in een *prisma* of *zuil*, de beide grondvlakken vereenigen zijn *parallelogrammen*.

Immers: om dat de beide grondvlakken (Fig. 210.) ABCKH en GIDEF gelijk en evenwijdig zijn, is AH = // GF: dus ook AG = // HF: dat is AHGF is een ▱: en zoo voor alle de zijden.

II.

II. GEVOLG.

Naarmate de grondvlakken, driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, enz. zijn, wordt de *zuil* of het *prisma* driekantig, vierkantig, vijfkantig, enz. genoemd. De *zuil* van Fig. 210. is vijfkantig: die van Fig. 222. driekantig: en van Fig. 212. is vierkantig.

L. G. VI. def. 8.

III. GEVOLG.

Het *prisma*, of de *zuil*, is *regthoekig* of *scheefhoekig*, naar mate de *parallelogrammen*, die de grondvlakken vereenigen, *regthoekig*, dat is, *regthoeken*, of *scheefhoekig* zijn. — Verder, indien het *prisma*, of de *zuil*, regthoekig is, en de grondvlakken regelmatige veelhoeken zijn, kan men de *zuil* regelmatig noemen.

St. IX. Bep. 8. — L. G. VI. def. 6.

IV. GEVOLG.

Men kan het *prisma*, of de *zuil*, in zoo vele driekantige *zuilen* verdeelen, als het grondvlak in driehoeken verdeeld kan worden: dat is in zoo vele driehoeken als er zijden in het grondvlak zijn, min twee: zoo als Fig. 210. GAHBIF, FHBIEK, IBKCDE.

I. AANMERKING. Sommigen beschouwen het *prisma*, of de *zuil*, als geboren door de evenwijdige beweging van het grondvlak, volgens eene lijn die, of loodregt, of schuins, op de zijde van het grondvlak staat: als de moet, het spoor, door eene dergelijke beweging van het grondvlak nagelaten.

WOLF, *Elem. Math.* g. §. 436.

II. AANMERKING. Wij zullen bestendig tot grondvlakken der zuilen die vlakken aannemen, welke wij in deze Bepaling grondvlakken genoemd hebben: doch EUCLIDES neemt dan eens een der parallelogrammen, dan eens een der vlakken welke de parallelogrammen vereenigen voor grondvlak aan: zoo als duidelijk uit de 40 propositie van zijn XI. Boek blijkt: eene onderscheiding, waarop men letten moet om geene feilen te begaan.

V. GEVOLG.

Het blijkt uit de VI. Bepaling, dat twee *prismas gelijk-*

lijkvormig zullen zijn, wanneer de grondvlakken gelijkvormige veelhoeken zijn, en de opstaande parallelogrammen insgelijks alle gelijkvormig zijn: en dus zullen, wat de zijden betreft, de zijden van de grondvlakken evenredig tot elkander zijn; en de zijden van de opstaande parallelogrammen zullen het insgelijks moeten zijn.

IX. BEPALING.

Een *Parallelepipedum*, of *Balk*, is eene ligchamelijke Figuur, welke omvat of begrepen wordt door zes vlakken, waarvan die, welke tegen over elkander staan, gelijk en evenwijdig aan elkander zijn. Het *parallelepipedum* wordt *regthoekig* (Fig. 212.) genoemd, wanneer die vlakken alle regthoekig, en dus regthoekig met elkander veréénigd, zijn: *scheefhoekig* (zoo als MHABDLKNM Fig. 215.) wanneer die vlakken scheefhoekig, en dus scheefhoekig veréénigd, zijn.

EUCL. XI. Bep. 30. volgens sommige uitgaven. — St. IX. Bep. 5, 6. — L. G. VI. def. 9.

I. AANMERKING. Het blijkt dat het *parallelepipedum* eene bepaalde soort van *prisma* is: te weten, een vierkantig *prisma*, waarvan het grondvlak een parallelogram, of een regthoek, is.

I. GEVOLG.

De vlakken, die een *parallelepipedum* uitmaken, zijn dus *parallelogrammen*, waarvan de tegenoverstaande gelijk zijn: zoo als gemakkelijk en uit deze Bepaling, en uit het XXXI. Voorstel van het I. Boek afteleiden is.

L. G. VI. p. 4.

EUCL. XI. 24. alwaar bewezen wordt, dat, indien een ligchaam uit evenwijdige vlakken bestaat, de tegenoverstaande vlakken onderling gelijk, en parallelogrammen zijn: een dergelijk ligchaam wordt in de volgende propositiën door EUCLIDES een *parallelepipedum* genoemd, zonder verdere voorafgaande bepaling.

II. AANMERKING. Men ziet hieruit hoe men de zes regthoeken, waaruit een regthoekig *parallelepipedum* gevormd wordt, op het papier moet stellen, op dat dezelve alleen door omvouwing het *parallelepipedum* zouden uitmaken: men stelt namelijk (Fig. 211.) vier regthoekige *parallelogrammen* onder

der elkander: het eerste en het derde gelijk aan elkander; het tweede en het vierde insgelijks gelijk aan elkander. Verder stelt men aan elke zijde van het tweede een ander, die elkander gelijk zijn: dan worden het eerste en derde twee zijden, het tweede en vierde de onderste en bovenste oppervlakte: waar door het vijfde en zesde of de twee overige zijden van zelven volgen.

Het zelfde heeft plaats voor een *parallelepipedum*, dat niet regthoekig is: behalven 1°. dat dan de *parallelogrammen* N°. 1 en 3, insgelijks N°. 2 en 4, niet alleen onderling gelijk, maar ook gelijkvormig zijn moeten: 2°. dat dan, zoo dra de grootte en gedaante dier *parallelogrammen*, N°. 1 en 3, N°. 2 en 4, bepaald is, zoo als de helling van N°. 1 en 3 op het vlak van N°. 2, de *parallelogrammen* N°. 5 en 6 ook bepaald zijn: hunne zijden immers zijn die van N°. 2, en N°. 3, en de hoeken die welke de zijden der *parallologrammen* N°. 1 en N°. 3 na de omvouwing met het vlak van N°. 2 uitmaken.

III. AANMERKING. Sommigen beschouwen een *parallelepipedum* als gevormd door de aan zich zelve evenwijdige beweging van een parallelogram, dat voortgaat, bestendig met een' bepaalden hoek hellende op het vlak waarop het zich evenwijdig aan zich zelven beweegt.

II. GEVOLG. Fig. 214 en 215.

Men zegt dat een *parellelepipedum* uit drie lijnen [AN, NK, NM], gemaakt wordt, wanneer het grondvlak een parallelogram is, uit twee derzelve gemaakt, en de opstaande parallelogrammen ieder uit eene van die twee, en uit de derde gemaakt worden: doch als dan verschillen de *parallelepipeda* uit de zelfde lijnen gemaakt, naar mate van de ongelijkheid der hoeken van de gemelde parallelogrammen. Gevolgelijk is een *parallelepipedum*, uit drie gegeven lijnen gemaakt, niet van eene bestendige grootte of inhoud, ten zij de grootte der hoeken, zoo wel van het grondvlak als van de opstaande parallelogrammen, bepaald en gegeven zij. — Daar nu regte hoeken alle gelijk aan elkander zijn, volgt het dat een regthoekig *parallelepipedum* uit drie gegeven lijnen gemaakt, eene bestendige en gegeven grootte heeft.

IV. AANMERKING. Dit Gevolg heeft veel overeenkomst met het geen in het II. Boek, Bep. 5. Aanm. 3. gezegd is, wegens de parallelogrammen en regthoeken. Doch bij deze

werd

werdt maar van twee lijnen gesproken, die genoeg zijn voor eene vlakke figuur, alleen uit lengte en breedte bestaande: hier wordt er van drie lijnen gesproken, die bij eene ligchamelijke figuur, welke lengte, breedte, en dikte, d. i. drie afmetingen, heeft, vereischt worden.

III. GEVOLG. Fig. 212 en 214.

Indien twee *parallelepipeda* onderling gelijkvormig zijn, moeten de eveneensgeplaatste hoeken der parallelogrammen, uit welke zij bestaan, gelijk, en de drie lijnen waaruit zij gevormd worden, evenredig zijn.

Want door de bepaling moet men hebben:

▱ AG ∽ ▱ AK; ▱ AF ∽ ▱ AM;

en ▱ HE ∽ ▱ NL: en dus ook

AH : AN = HG : NK :
HG : NK = HF : NM : } (IV. 1. Bep.)
HF : NM = AH : AN :

dat is

AH : HG : HF = AN : NK : NM.

En twee regthoekige *parallelepipeda* zullen gelijkvormig zijn, wanneer de drie lijnen waaruit zij bestaan evenredig zijn.

Dit Gevolg komt overeen met EUCL. XI. 27.

X. BEPALING.

Indien de zes parallelogrammen waaruit een *parallelepipedum* bestaat, vierkanten zijn, en dus onderling aan elkander gelijk; wordt de Figuur een *Cubus*, of *Taerling*, genoemd.

L. G. VI. def. 10.

I. GEVOLG.

Een *Cubus* van, of op, eene lijn, is dus een *Cubus* waarvan de hoogte de gegeven lijn, en het grondvlak het vierkant op de gegeven lijn is: een *Cubus* wordt dus uit eene gegeven lijn, of liever uit drie gelijke lijnen, regthoekig gevormd, even als een *parallelepipedum* uit drie ongelijke lijnen, die ook wel scheefhoekig onderling samengesteld worden.

EUCL. XI. def. 25. — St. X. def. 3.

II.

II. GEVOLG.

Alle *Cubi* zijn onderling gelijkvormig. (IX. Bep. 3 Gev.)

XI. BEPALING. Fig. 212.

De lijnen [BF, AE] welke in een *prisma*, of in een *parallelepipedum* uit een' der ligchamelijke hoeken naar tegenovergestelden getrokken worden: dragen den naam van *diagonalen.*

L. G. VI. def. 15.

VI. VOORSTEL. Fig. 212.

Indien men een *parallelepipedum* [AE] deelt door een vlak, dat door de diagonalen der tegenover elkander staande parallelogrammen, [BD en GF] gaat; zal het zelve in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeeld worden.

EUCL. XI. 28. — L. G. VI. 6.

BEWIJS. Uit I. 31. en het I. Gevolg van de IX. Bepaling.

I. GEVOLG.

De twee deelen waarin het *parallelepipedum* op die wijze verdeeld wordt, zijn driehoekige *prismas*, of zuilen. (VIII.' Bepaling).

AANMERKING. Het vlak BDFG gaande door de diagonalen BD, EG der ▱ ▱ ABCD, HGEF, gaat ook door de aan elkander tegenovergestelde, en onderling evenwijdige ribben BG, DF: waarom sommigen dit Voorstel aldus uitdrukken: „het vlak dat door de tegenovergestelde, en onderling evenwijdige ribben gaat, verdeelt „het parallelepipedum in twee driehoekige *prismas*.

II. GEVOLG.

Dus is een driehoekig *prisma* de helft van een *parallelepipedum*, wiens grondvlak het aangevulde parallelogram van het grondvlak van het *prisma* is, en wiens opstaande vlakken de parallelogrammen zijn van het *prisma*, welke op de zijden van deszelfs grondvlak staan, en de zelfde helling op het grondvlak hebben.

III. GEVOLG.

Indien men de diagonaal BF van dit vlak BDGF trekt, kan

kon men dezelve als de *diagonaal* van het *parallelepipedum* aanzien: zoo als ook de lijn van den hoek A tot den hoek E getrokken, diagonaal zijn zoude: en het is niet minder klaarblijkelijk, dat deze diagonalen zich in één ſtip ontmoeten, en zich aldaar in twee gelijke deelen ſnijden: gelijk ook, indien men, zoo als in Figuur 217, vlakken PVXM, *a*UTI, KRWY*b* door het midden der tegen over elkander ſtaande zijden liet gaan, de gemeene ſneden dier vlakken en de diagonalen zich onderling in het gemelde ſtip in twee gelijke deelen ſnijden zouden.

EUCL. XI. 39. — L. G. VI. 5.

VII. VOORSTEL. Fig. 213.

Indien een *parallelepipedum* [BF], door een vlak [GC] gesneden wordt dat evenwijdig is aan de tegen over elkander ſtaande vlakken [BH, LM] zullen de deelen [BG, GD] tot elkander ſtaan als hune grondvlakken [IG, GM].

EUCL. XI. 25.

BEREIDING. Men verlenge de lijn HGF, INM wederzijds: en neeme in dezelve een getal deelen, ieder gelijk aan HG aan den eenen, en ieder gelijk aan GF, aan den anderen kant: Men volmake de ▱ ▱ PH, UQ enz., FE, E*c* enz. zoo als ook de ligchamen MH, RQ, FV, V*c* enz. welke alle gelijke *parallelepipeda* zijn zullen (9. Bepaling) en alle ſlechts, als het ware, de verlenging van het gegeven *parallelepipedum* uitmaken.

BEWIJS. Uit het 3. Voorſtel van het III. Boek.

AANMERKING. Het is volſtrekt het zelfde bewijs als dat van het VI. Voorſtel van het IV. Boek: en men ziet dat beide de Voorſtellen ook van den zelfden aard zijn. Zij hebben het zelfde onderwerp, doch het eene dient voor de driehoeken of parallelogrammen, het andere voor de *parallelepipeda*.

VIII. VOORSTEL. Fig. 214, 215.

Parallelepipeda [MB, NE] die op het zelfde grondvlak ſtaan [KLMN], en de zelfde hoogte hebben, *en dus* tusſchen de zelfde evenwijdige vlakken begrepen zijn, zijn gelijkhaltig.

EUCL. XI. 29, 30. — St. X. 2. — L. G. VI. 9.

I. GEVAL. Fig. 214. Wanneer de parallelogrammen AHMN en NIFM, zoo als ook de parallelogrammen BDLK en KCEL van de beide *parallelepipeda* in de zelfde vlakken ſtaan: en alleen de parallelogrammen ICKN en ABKN, EFLM en HDLM in verſchillende vlakken zijn.

BEREIDING. Zij OP de gemeene ſnede der vlakken MHDL en ICKN.

BEWIJS. Men bewijst eerst dat het *prisma* ABCINK en het *prisma* HDEFML in alle opzigten gelijk zijn, om dat zij uit gelijke en op dezelfde wijze geplaatſte vlakken beſtaan: het geen uit II, 1. bewezen wordt: en dan wordt het Voorſtel opgemaakt met van die gelijke *prismata* een gemeen ſtuk, het *prisma* HDCIOP, aftenemen, en er een gemeen ſtuk, het *prisma* LMNKPO, bijtevoegen.

II. GEVAL. Fig. 215. Wanneer niet alleen de ▱▱ ICKN en FELM in andere vlakken ſtaan dan de ▱▱ ABKN en HDLM, maar ook de ▱▱ NIFM en KCEL in andere vlakken ſtaan dan de ▱▱ AHMN en BDLK: zoo dat het *parallelepipedum* NE, ten opzigte van het *parallelepipedum* MB, aan beide kanten helt.

BEREIDING. Men verlengt de lijnen EC, FI, AB, HD, zoo dat zij zich in P, Q, R, O ſnijden: waar door een *parallelepipedum* PQRLMON geboren wordt, dat met betrekking, zoo wel tot het *parallelepipedum* MB, als tot het *parallelepipedum* NE, in het eerſte geval ſtaat.

BEWIJS. Uit het eerſte geval.

I. AANMERKING. De reden van de gevolgtrekking *en dus* in het Voorſtel vermeld, blijkt uit X. 7. het I. Gevolg en X. Bepaling van dit Boek.

II. AANMERKING. Men ziet dat het bewijs van het eerſte geval juist het zelfde is, en op de zelfde gronden ſteunt, als dat van het XI. Voorſtel van het II. Boek, behalven dat hier van *parallelepipeda*, daar van parallelogrammen geſproken wordt.

GEVOLG.

Een ſcheefhoekig *parallelepipedum* is gelijkhaltig met een regthoekig, dat op het zelfde grondvlak ſtaat, en de zelfde hoogte heeft: en dus zullen in dit *parallelepipedum* de zijden van de parallelogrammen, welke regthoekig op het grondvlak ſtaan, gelijk zijn aan de hoogte van

dat

dat fcheefhoekig *parallelepipedum*, dat is, aan de loodlijn die tusfchen het grondvlak en de bovenfte oppervlakte der beide *parallelepipeda* begrepen is.

IX. VOORSTEL. Fig. 216.

Parallelepipeda die op gelijkhaltige grondvlakken [EG, en AO] ftaan, en gelijke hoogte hebben, zijn gelijkhaltig aan elkander.

EUCL. XI. 31. — St. X. 2. — L. G. VI. 10.

BEREIDING. 1°. Men verlenge FG zoo dat GM gelijk zij aan de grondlijn van het parallelogram AO.

2°. Stel op GM het ▱ GK = en ∽ ▱ AO: trek door M, PMQ en voltooi de ▱ ▱ GP en LM; dan is ▱ LM ∞ ▱ GK ∞ ▱ AO.

3°. Men ftelle dat er op GK een *parallelepipedum* ftaat gelijk en gelijkvormig aan het *parallelepipedum* op AO: en dus van de zelfde hoogte als het *parallelepipedum* op EG: en dat er insgelijks op LM en GP *parallelepipeda* van de zelfde hoogte zijn, en waarvan de opftaande parallelogrammen volgens de lijnen CGL, PMQ, CP en LQ ftaan.

BEWIJS. Uit het VII. Voorftel, eerst voor de *parallelepipeda* op EG en op CM, dan voor de *parallelepipeda* op CM en LM, genomen: dan volgt uit III. 10 en III. 11, dus ⊟ op EG: ⊟ op GQ ≐ ▱ EG: ▱ GQ; maar ▱ EG ∞ ▱ GQ (onderft.) dus ⊟ op EG ∞ ⊟ op GQ; maar ⊟ op GQ en ⊟ op GK kunnen befchouwd worden tot grondvlak te hebben het aan hun gemeen parallelogram uit GM, terwijl de hoogte van beide de zelfde is: derhalve door Voorft. VIII. ⊟ op GK ∞ ⊟ op EG; waaruit het befluit volgt.

GEVOLG.

Een *parallelepipedum*, is altijd gelijkhaltig aan een regthoekig *parallelepipedum* dat op een gelijk grondvlak ftaat, en de zelfde hoogte heeft. Zoo dat de maat van alle *parallelepipeda*, hoe genaamd, herleid wordt tot die van een regthoekig *parallelepipedum*, waarvan het grondvlak gelijkhaltig is met het grondvlak van het gegeven *parallele-*

pipedum, en de zijde der regtopstaande parallelogrammen de hoogte van het gegeven *parallelepipedum* is.

L. G. VI. 11.

X. VOORSTEL. Fig. 216.

De inhouden van *parallelepipeda* die de zelfde hoogte hebben, staan in de zelfde rede als derzelver grondvlakken.

EUCL. XI. 32. — St. X. 4. — L. G. VI. 13.

BEREIDING. Deze is de zelfde als voor het IX. Voorstel.

BEWIJS. Uit het IX. Voorstel. VII. Voorstel, twee maal gebruikt: en uit III. 11.

XI. VOORSTEL. Fig. 218.

Parallelepipeda [P en Q] die op gelijke grondvlakken staan, zijn onderling in de zelfde rede als hunne hoogten.

St. IX. 5. — L. G. VI. 12.

BEREIDING. Men stelle dat het regthoekig *parallelepipedum* HGC gelijkhaltig zij aan het gegeven *parallelepipedum* P: men neme op HA, HI gelijk aan de hoogte van het gegeven *parallelepipedum* Q: men trekke het vlak IKEL // aan het grondvlak HMFG: dan is het regthoekig ⊟ HE gelijkhaltig aan het gegeven *parallelepipedum* Q.

BEWIJS. Uit het VII. Voorstel is ⊟ HE : ⊟ IC = ▭ HK : ▭ IB en derhalve
⊟ HE + ⊟ IC : ⊟ HE = ▭ HK + ▭ IB : ▭ HK : d. i.
⊟ HC : ⊟ HE; of ⊟ P : ⊟ Q = ▭ HB : ▭ HK = HA : HI. (IV. 7).

XII. VOORSTEL. Fig. 218.

Verschillende *parallelepipeda* staan tot elkander in samengestelde rede van de grondvlakken en de hoogten.

St. X 3. — L. G. VI. 14.

BEREIDING. Men stelle dat het regthoekig *parallelepipedum* HGC, gelijkhaltig zij aan het gegeven *parallelepipedum* R: en het regthoekig *parallelepipedum* PNO aan het ander gegeven *parallelepipedum* Z, (VIII. Voorst., Gev.).
Men neme op AH, HI = PN: en stelle dat door I het vlak IKEL evenwijdig aan HF, en dus aan BD, gaat,

BE-

BEWIJS. Uit het X. en XI. Voorstel en III. to;

I. AANMERKING. Het X. en XI. Voorstel zijn bijzondere gevallen van dit; doch dit kan niet bewezen worden zonder dat de beide voorgaande het zijn. Wij hebben reeds te voren meer dan één dergelijk voorbeeld ontmoet, inzonderheid in het VIII. Voorstel van het IV. Boek, dat juist het zelfde is als dit, behalven dat daar van parallelogrammen en dus van *grondlijnen*, hier van *parallelepipeda* en dus van *grondvlakken*, gesproken wordt.

I. GEVOLG.

Indien verschillende *parallelepipeda* gelijkhaltig zijn, staan derzelver hoogten in omgekeerde rede van de grondvlakken.

EUCL. XI. 34. — St. X. 6.

II. AANMERKING. EUCLIDES bewijst dit regtstreeks, bijna op de zelfde wijze als de 23. propositie van zijn VI. Boek, zoo als in IV. 8. Aanm. 2. gezegd is: hij maakt eene dergelijke bereiding als wij gemaakt hebben: er zij dan een *parallelepipedum* Q, gelijkhaltig aan het *parallelepipedum* AF waarvan *g* het grondvlak, *h* de hoogte is; en zij in het ander *parallelepipedum* IF, IH = *h*: dan is
parallelep. IF: Q = HF: *g*: of
parallelep. IF: *parallelep.* AF = HF: *g*: maar
parallelep. IF: *parallelep.* AF = IM: AM = IH: AH
dus HF: *g* = IH: AH.

II. GEVOLG.

Indien het grondvlak HF tot het grondvlak NO staat zoo als $m \times n : 1$, en indien de hoogte van het *parallelepipedum* AF, *h* malen de hoogte van het *parallelepipedum* Z bevat: heeft men *parallelepipedum* AF: *parallelepip.* Z = $m \times n \times h : 1$ en dus (III. *Axioma* 3.), indien men het *parallelepipedum* Z voor de *eenheid* aanneemt, of voor de gemeene maat, is het getal, dat den inhoud van het *parallelepipedum* AF uitdrukt, gelijk aan $m \times n \times h$: dat is: het *parallelepipedum* AF zal zoo vele *parallelepipeda* gelijk aan Z bevatten, als er eenheden zijn in het getal $m \times n \times h$.

Men neemt doorgaans tot *parallelepipedum* Z, hetwelk tot *maat* dient, of voor *eenheid* gebruikt wordt, niet alleen een regthoekig *parallelepipedum*, waarvan de reden uit het

gevolg van het IX. Voorstel blijkt; maar zoodanig een, waarin tevens de zijden van het grondvlak onderling gelijk zijn, dat is, welks grondvlak een vierkant is; waarvan de reden uit het 1. Gevolg van IV. 9. genoegzaam kennelijk is; en welks hoogte gelijk is aan de zijde van het grondvlak: dat is, men neemt voor de maat van alle *parallelepipeda*, voor de *eenheid* om derzelver ligchamelijken inhoud te meten, een' *Cubus*, of eene *Taerling*, waarvan de zijde die *eenheid* is, welke tot het meten der zijden AH, HG, GF gebruikt wordt, dat is de *lengte-eenheid*: bijv. één *duim*, één *voet*, ééne *roede* enz.; en men noemt dien *Cubus* de *Cubieke-eenheid*, om dezelve te onderscheiden, zoo wel van de *lengte-eenheid*, die ter meting van afstanden, of lengten, dient, als van de *vierkante-eenheid*, die ter meting van vlakke figuren gebruikt wordt. Dus, indien het *parallelepipedum* AF 10 voeten bedraagt, zal dit getal 10 *Cubieke* voeten aanduiden: dat is, dat het gelijk is aan 10 *Cubi* wier zijden ieder éénen voet bedragen.

III. GEVOLG.

Hieruit volgt, dat enkele en Cubieke éénheden van verschillende benaming tot elkander staan als het getal onderdeelen, die de enkele éénheid bevat, tot den *Cubus*, of de derde magt, van dat getal: dus behelst *één voet* 12 duimen, *één vierkante-voet* 12 maal 12 of 144 *vierkante* duimen, en *één cubieke voet*, 12 maal 12 maal 12, of 1728 *cubieke* duimen. Dit is het geen EUCLIDES in de 12. propositie van zijn VIII. Boek bewijst: dat namelijk een *Cubiek* getal tot een *Cubiek* getal staat in de driedubbelde rede der zijden.

III. AANMERKING. Men ziet hieruit, hoe men met EUCLIDES (VII. Bep. 17.) het product van drie getallen een *ligchamelijk getal* (*numerus solidus*) noemen kan, waarvan de getallen die hetzelve voortbrengen de *zijden* zijn: dat ligchamelijke getallen in de samengestelde rede staan hunner wortelen: en dat *gelijkvormige ligchamelijke getallen* zoodanige zijn wier wortels evenredig zijn.

EUCL. VII. Bep. 21.

IV. GEVOLG.

Uit het tweede Gevolg blijkt, hoe en in welken zin men zeggen kan;

1. Dat de vermenigvuldiging van drie lijnen het regthoekig *parallelepipedum* op dezelve gemaakt, uitdrukt; en gevolgelijk, hoe eene rede uit drie reden famengefteld door het regthoekig *parallelepipedum* van die lijnen, welke de enkele reden uitdrukken, en eene driedubbelde rede door den *cubus* op eene lijn, aangewezen worden, en daarmede overeenkomen.

L. G. VI. 14.

2°. Dat de inhoud van een *parallelepipedum* uitgedrukt kan worden door het product van het grondvlak vermenigvuldigd door de hoogte, en dat dit overeenkomt met het Gevolg van ons IX. Voorftel.

En insgelijks 3°. dat de inhoud van een' *Cubus* uitgedrukt kan worden door de derde magt, of den *Cubus*, van deszelfs zijde.

Voor het overige kan men hierop toepasfen het geen in de 5. Aanmerking op het IX. Voorftel van het IV. Boek gezegd is.

V. GEVOLG.

Zoo dan het getal eenheden, waar door de inhoud van een' *Cubus* uitgedrukt wordt, geen *Cubiek* getal is, is de zijde van dien *cubus* altijd *onmeetbaar* met betrekking tot de eenheid die de lengte meet.

VI. GEVOLG.

Indien men de inhouden van twee *parallelepipeda* door I en *i*, de grondvlakken, door G en *g*, de hoogten door H en *h* uitdrukt, is ons Voorftel dit

$$I : i = G \times H : g \times h:$$

en dus

1°. Zoo het grondvlak onmeetbaar is tot het grondvlak, of de hoogte tot de hoogte, doch niet beiden te gelijk, zullen ook (III. Boek, 12 Bep Gev. 1.) de inhouden I en *i* onderling onmeetbaar zijn: dat is, geene ligchamelijke ruimte zal derzelver gemeene maat kunnen zijn.

2°. Indien en hoogte en grondlijn van beide de *parallelepipeda* onderling onmeetbaar zijn, kan de rede van de inhouden I en *i* meetbaar zijn.

Bijv. indien men in fig. 75. ftelt dat □ op AF: □ op BF = 15: √60, zoo als wij te voren IV. 9. Gev. 10. N°.

N°. 4. op bl. 176. gezegd hebben; en men op die beide vierkanten *parallelepipeda* stelt waarvan de hoogten zijn als $\sqrt{5} : \sqrt{3}$; en dus onderling onmeetbaar; zullen die *parallelepipeda* tot elkander staan als $15 \times \sqrt{5} : \sqrt{60} \times \sqrt{3}$, of als $15 \times \sqrt{5} : \sqrt{180}$, of als $15 \times \sqrt{5} : \sqrt{36} \times \sqrt{5} = 15 : 6 = 5 : 2$; en dus zijn die *parallelepipeda* onderling meetbaar.

3°. *Cubi* kunnen onderling onmeetbaar zijn: en dit heeft altijd plaats wanneer de lijnen, op welke zij gesteld worden, onmeetbaar in lengte, doch meetbaar in magt zijn; bij voorbeeld, de *Cubi*, welke op de diagonaal en op de zijde van een vierkant gemaakt worden, zijn onderling onmeetbaar: doch *Cubi* zijn onderling meetbaar als zij gesteld worden op lijnen die, of in lengte meetbaar zijn, of aangewezen worden door getallen die $\sqrt[3]{}$ genoemd worden van een getal dat geen *Cubiek* getal is, zoo als door $\sqrt[3]{2}$, of $\sqrt[3]{3}$: enz.

XIII. VOORSTEL.

Gelijkvormige *parallelepipeda*, zoo als ook alle *Cubi*, staan tot elkander in driedubbelde rede hunner eveneensstaande ribben.

EUCL. XI. 33. — St. X. 7.

BEWIJS. Uit het XII. Voorstel, IV. 24. Gev. 1. en III. 11, 15.

AANMERKING Wij hebben in de Aanmerking op de 18de Bep. van ons III. Boek gezegd dat die uitdrukking *driedubbelde rede*, in den eersten opslag, eene andere beteekenis bij EUCLIDES schijnt te hebben dan bij ons: en wij hebben in de Aanmerking op het XV. Voorstel van dat zelfde Boek getoond hoe beide die beteekenissen in de daad overeenkomen. Volgens de beteekenis, door EUCLIDES aan het woord driedubbelde rede gegeven, moet men bewijzen, dat de beide gegeven *parallelepipeda*, het eerste en het laatste zijn van vier *gedurig* evenredige *parallelepipeda*, en dat, boven dien, het eerste en het tweede in de zelfde rede staan als de eveneensstaande ribben der twee gegevene.

Men stelle dat gegeven zijn de twee gelijkvormige *parallele-*

lelepipeda 𝔄 en 𝔇: en dat de twee lijnen die de parallelogrammen uitmaken welke de gelijkvormige grondvlakken zijn van 𝔄 en 𝔇, uitgedrukt worden door 𝔞 en a, 𝔟 en 𝔡: en de zijde van het opstaande parallelogram in ieder door *a* en *d*; men stelle twee andere *parallelepipeda* 𝔅 en ℭ beide gelijkhoekig met 𝔄 en dus ook met 𝔇; laten 𝔞, a, en *d* de ribben zijn van 𝔅; en d, 𝔞, en *d* de ribben van ℭ: dan hebben *parallelepipeda* 𝔄 en 𝔅 de zelfde hoogte, indien men de parallelogrammen uit 𝔞 en *a*, a en *d* voor grondvlakken aanneemt: insgelijks hebben de *parallelepipeda* 𝔅 en ℭ dezelfde hoogte, indien de parallelogrammen uit 𝔞 en a, en uit 𝔞 en d de grondvlakken zijn, en eindelijk hebben de *parallelepipeda* ℭ en 𝔇 de zelfde hoogte, zoo men de parallelogrammen uit 𝔞 en d en 𝔟 en d voor grondvlakken aanziet: dus is door Voorstel X.

𝔄: 𝔅 = ▭ uit 𝔞 en *a*: ▭ uit 𝔞 en *d* = *a*: *d*
𝔅: ℭ = ▭ uit 𝔞 en a: ▭ uit 𝔞 en d = a: d
ℭ: 𝔇 = ▭ uit 𝔞 en d: ▭ 𝔟 en d = 𝔞: 𝔟

Maar om dat de *parallelepipeda* 𝔄 en 𝔇 gelijkvormig zijn, is (Bep. IX. Gev. 8.) *a*: *d* = a: d = 𝔞: 𝔟 en dus is ÷ 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇: dus ook (III. 15.)
𝔄: 𝔇 = 𝔄³: 𝔅³ = *a*³: *d*³ = 𝔞³: 𝔟³: dat bewezen moet worden.

I. GEVOLG.

Dus komt de *cubus* op eene lijn overeen met het geen men de derde magt van eene lijn noemen kan; dat is, met de derde magt van het getal dat de lengte van die lijn uitdrukt. Zie III. Boek, Bep. 4. en het 4. Gevolg van het voorgaande Voorstel.

II. GEVOLG.

Indien vier lijnen evenredig zijn, zullen de gelijkvormige *parallelepipeda* op dezelve gelijkvormig gesteld, insgelijks evenredig zijn, en omgekeerd. (Uit dit Voorstel en III. 10. Gevolg 1.)

EUCL. XI. 37.

III. GEVOLG.

Uit dit Voorstel, vergeleken met het 2 en 3de Gevolg van het XII. Voorstel, blijkt, in welken zin EUCLIDES heeft kun-

nen zeggen in de 19. propositie van zijn VIII. Boek, „ dat „ gelijkvormige ligchamelijke getallen in de driedubbelde rede „ staan hunner eveneensstaande zijden;" en. prop. 27 „dat zij „ staan als een Cubiek-getal tot een Cubiek-getal."

IV. GEVOLG.

Zoo drie lijnen gedurig evenredig zijn, is het *parallelepipedum*, dat uit deze drie lijnen gemaakt wordt, gelijkhaltig aan het gelijkzijdig *parallelepipedum* dat uit de middelste gemaakt wordt, en gelijkhoekig is met het eerstgemelde: en dus is ook de *cubus* op de middelste lijn gelijk aan het regthoekig *parallelepipedum* uit de drie lijnen samengesteld.

EUCL. XI. 36. — St. X. pr. 9.

I. AANMERKING. Hieruit volgt dat, om een regthoekig *parallelepipedum* te maken gelijkhaltig aan een' gegeven *cubus* (waar van de zijde is b), men slechts eene lijn a naar willekeur behoeft te nemen; en eene derde evenredige c daar aan en aan b te zoeken: immers dan is $a : b = b : c$: en derhalve, door dit Gevolg, *parallelepipedum* uit a, b, c, gelijkhaltig aan *cubus* op b. Die oplossing doet tevens zien dat men een onbepaald getal *parallelepipeda* maken kan, die alle met een' gegeven *cubus* gelijkhaltig zullen zijn.

II. AANMERKING. Indien men op een gegeven vierkant (a^2) een *parallelepipedum* wilde maken, gelijkhaltig aan een' gegeven *cubus* (b^3); van welk *parallelepipedum*, derhalve, men enkel de hoogte (x) te bepalen heeft: zoude men eerst de rede der vierkanten van de twee gegeven lijnen (a en b) door twee regte lijnen uitdrukken (V 15. Gev.): dat is; zij $a^2 : b^2 = g : h$: dan is $a^2 \times x : b^2 \times b = g \times x : h \times b$; maar $a^2 \times x \infty b^3$ door de onderstelling: dus $h . b \infty g . x$ of $g : h = b : x$: dat is, men neemt eene vierde evenredige aan de twee gevonden lijnen g, h en aan de zijde b van den gegeven *cubus*.

III. AANMERKING. Indien het grondvlak van het gezochte *parallelepipedum* niet een gegeven vierkant, maar een regthoek is, waarvan gegeven zijn de zijden d en e: zoude men eerst eene middelevenredige a nemen tusschen d en e om te hebben $a^2 = d . e$: en derhalve $a^2 . x \infty d . e . x$, of het gezochte *parallelepipedum*: zoo dat dit geval tot het voorgaande herleid wordt.

V. GEVOLG.

Indien vier lijnen gedurig evenredig zijn, staat de *Cubus*

bus op de eerste tot dien op de tweede, als de eerste lijn tot de laatste: (Uit dit Voorstel en III. 15).

IV. AANMERKING. Hieruit blijkt in welken zin EUCLIDES heeft kunnen zeggen (VIII. Boek, 19 en 21 prop.) „ dat er „ tusschen twee gelijkvormige ligchamelijke getallen twee „ middelevenredigen vallen: en omgekeerd; dat, indien er „ tusschen twee getallen twee middelevenredige vallen, die „ getallen gelijkvormige ligchamelijke getallen zijn."

V. AANMERKING. Hieruit volgt verder dat het vermaarde vraagstuk om *een' cubus te vinden welke het dubbeld zij van een' gegeven cubus*, op dit vraagstuk uitkomt, *twee middelevenredige te vinden tusschen twee lijnen waarvan de tweede het dubbeld is van de eerste.* Immers zij $\div b, x, y, 2b$: dan is door dit Gevolg $b^3 : x^3 = b : 2b = 1 : 2$: en derhalve $x^3 = 2b^3$. Maar het vraagstuk om twee middelevenredige tusschen twee grootheden te vinden, is in den strikisten geometrischen zin onoplosbaar. Zie daar over Werkstukken III. 9. Aanm. 2. en hier onder Voorstel XXXVI. Aanm.

VI. AANMERKING. Het maken van een *cubus* gelijkhaltig aan een gegeven *regthoekig parallelepipedum*, hangt insgelijks af van het vinden van twee middelevenredige: want zij x de zijde van den gezochten *cubus*, en laten a, b, c de lijnen zijn waaruit het gegeven *parallelepipedum* gemaakt is: dan is $x^3 \infty a.b.c.$ Men stelle verder $a : d = d : b$, dat is, men neme eene middel evenredige tusschen a en b: dan is 1°. $a.b \infty d^2$: derhalve 2°. $x^3 \infty a.b.c \infty d^2 . c$: Dat e en f twee middelevenredige zijn tusschen d en c: dan is 3°. $d : e = e : f = f : c$, en derhalve (III. 15.) 4°. $d : c = d^3 : e^3$: waaruit volgt 1°. $e^3 = d^2 . c$: en derhalve uit 2°. $x^3 = e^3$, of $x = e$.

VII. AANMERKING. Het vervaardigen van een' *cubus* wiens inhoud gelijk is aan de som der inhouden van twee, of meerdere, *cubi*, hangt insgelijks van het vinden van twee middelevenredigen af: immers zij te vinden $y^3 \infty a^3 + b^3$: men make een *parallelepipedum* $e^2 \times h \infty a^3$; dat is, men make op het vierkant e^2 een *parallelepipedum* gelijkhaltig aan den *cubus* a^3 (door de II. Aanmerking), en insgelijks een *parallelepipedum* $e^2 \times h' \infty b^3$; dan is $y^3 \infty e^2 h + e^2 h'$, $\infty e^2 (h + h') \infty e^2 . H$ indien $H = h + h'$. Men stelle dan $e : f = f : g = g : H$: dan is (III. 15.) $e : H = e^3 : f^3$: en $e^2 . H = f^3$: derhalve $y^3 = f^3$: en $y = f$.

VIII.

VIII. AANMERKING. Ik spreek in de beide voorgaande Aanmerkingen van zuivere geometrische oplossingen, in den zin der Ouden; en niet van *algebraïsche*, of *arithmetische*, waarin men de zijde van den gezochten *cubus* in getallen, juist, of ten naasten bij, uitdrukt: want dan is voor Aanm. VI. $x = \sqrt[3]{a.b.c}$: en voor Aanm. VII. $y = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$.

XIV. VOORSTEL. Fig. 217.

Indien men eene lijn [AG] in twee deelen [AI, IG] naar willekeur verdeelt, zal de *cubus* op de geheele lijn gemaakt, de som zijn van de *cubi* van ieder deel, en van het drievoud der *parallelepipeda* uit het vierkant van ieder deel, en het ander deel gevormd.

Dat is, indien a en b de deelen van de lijn zijn, is *cubus* op $\overline{a+b}$ =
Cubus op a + *Cub.* op b + 3 *parallelepip.* uit □ op a en uit b: + 3 *parallelepip.* uit □ op b en uit a.

BEWIJS. Zij AF het vierkant op de lijn AG, en AZ de *Cubus*. Men neemt GX = GI: en trekke IT en XM. Dan zal het vierkant AF in vier deelen gedeeld zijn, namelijk in
1°. □ HL = het □ op AI:
2°. ▭ AL = ▭ LF = regth. uit AI en IG:
3°. in □ IX = het □ op IG: Zie II. B. het 3. Voorst.
Indien men dan door IT en MX twee regthoekige vlakken IaUT, XMPV laat gaan, die elkander in QL snijden; wordt de *Cubus* in vier *parallelepipeda* verdeeld, welke alle de hoogte van den *Cubus* hebben, en tot grondvlakken de gemelde vier deelen van het grondvlak.

Eindelijk, indien men AK = AI stelt, en door K een vlak KRWb laat gaan, evenwijdig aan het grondvlak, dat de gemelde twee loodregte vlakken in NY en Ss snijdt, wordt ieder van die vier *parallelepipeda* weder in twee *parallelepipeda* verdeeld, die ieder het zelfde grondvlak hebben, doch waarvan de eene de hoogte AK = AI; de andere de hoogte BK = IG heeft: en dus heeft men de acht volgende deelen van den *Cubus*:
1°. *Parallelepipedum* MS, uit □ HL, en hoogte NM, of AK: dat is *Cubus* op AI.
2°. *Parallelepipedum* NU, uit ▭ HL en hoogte NP, of

of BK = IG: dat is *parallelepipedum* uit □ AI en hoogte IG.

3°. *Parallelepipedum* KL uit ▭ AL, en hoogte KA, of AI: of uit ▭ KsIA en hoogte IL = IG: dat is uit □ AI en hoogte IG.

4°. *Parallelepipedum* KQ uit ▭ KO of AL en hoogte BK of IG: of uit □ aQOs en hoogte Ks of AI; dat is uit □ IG en hoogte AI.

5°. *Parallelep.* OG, uit ▭ IX en hoogte Is = AI, of uit □ IG en hoogte AI.

6°. *Parallelep.* sV, uit □ sY en hoogte sa: dat is *Cubus* op IG.

7°. *Parallelep.* LW, uit ▭ TX en hoogte WF: of uit ▭ XW en hoogte LX: dat is uit □ AI en hoogte IG.

8°. *Parallelep.* OZ, uit ▭ OW en hoogte ZW: of uit ▭ UW en hoogte YW, dat is uit □ op IG en hoogte AI.

Nu de som van alle deze deelen in de volgende orde nemende N°. 1; N°. 2, 3, 7; N°. 4, 5, 8; en N°. 6. krijgt men

Cubus op AG, of op (AI + IG) =

Cub. op AI + 3 *parallelep.* van □ uit AI en IG + 3 *Parallelep.* van □ uit IG en AI + *Cub.* op IG: of in het algemeen

Cubus op $\overline{a+b}$ = *Cub.* op a + 3 *parallelep.* uit a^2 en b + 3 *parallelep.* uit b^2 en a + *Cub.* uit b.

I. GEVOLG.

Indien de lijn in twee gelijke deelen gesneden is, zal de *Cubus* uit *acht* gelijke *Cubi*, ieder op de halve lijn gemaakt, bestaan.

II. GEVOLG.

Daar de derde magt van een getal den inhoud uitdrukt van eenen *cubus* gesteld op de lijn, wier lengte door dat getal aangeduidt wordt: en het product van een vierkant-getal door een enkel getal den inhoud te kennen geeft van een *parallelepipedum*, gevormd uit een vierkant en eene lijn wier inhoud en lengte door die getallen aangeduid worden; volgt het dat dit Voorstel het middel opgeeft om den *cubiek*-wortel uit een getal te trekken: want men zal hebben,

$\overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2 b + 3 ab^2 + b^3$: en
$\overline{a+b+c}^3 = (a+b+c)^3 = \overline{a+b}^3 + 3(a+b)^2 c + 3 (a+b) c^2 + c^3 =$
$a^3 + 3a^2 b + 3 ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3 \overline{a+b} c^2 + c^3$
het geen juist den regel oplevert, dien men in de bewerking volgt. Zie het Aanhangsel.

AANMERKING. Indien men nu den *cubus* zelven moest maken, of alle de deelen waaruit hij bestaan zal aanduiden, zou men hebben:
Cubus uit $(a + b + c) =$
Cub. op a + *cubus* op b + *cubus* op c +
3 *parallelep.* uit a^2 en b + 3 *parallelep.* uit a^2 en c +
3 ——— uit b^2 en a + 3 *parallelep.* uit b^2 en c +
3 ——— uit c^2 en a + 3 *parallelep.* uit c^2 en b +
6 ——— uit a, b, en c.

XV. VOORSTEL. Fig. 212.

Een driekantig *prisma*, of zuil [HABDFG] is de helft van eenig *parallelepipedum*, dat dezelfde hoogte heeft, en op het parallelogram staat dat het aanvulsel is van het driehoekig grondvlak van dat *prisma.*

BEWIJS. Uit het 2. Gevolg van het VI, en uit het VIII. Voorstel.

GEVOLG.

Dus is ook een driehoekig *prisma* gelijkhaltig met een regthoekig *parallelepipedum*, dat de zelfde hoogte heeft, en wiens grondvlak een regthoek is gelijk aan den driehoek, grondvlak van het *prisma.*

XVI. VOORSTEL.

Een *prisma*, het zij driekantig, het zij veelkantig, is altijd gelijkhaltig aan een regthoekig *parallelepipedum*, waarvan de hoogte die van het *prisma*, en het grondvlak een regthoek is gelijkhaltig aan den veelhoek die het grondvlak is van het *prisma.*

L. G. VI. 15.

BEWIJS. Uit het 4. Gevolg van de VIII. Bepaling, en het Gevolg van het XV. Voorstel.

I.

I. AANMERKING. Wij nemen hier het woord *grondvlak* van het *prisma* in den zin dien wij er aan gehecht hebben in de VIII. Bepaling: anders immers zoude dit Voorstel met het 40 van het XI. Boek van EUCLIDES schijnen te strijden: het zelve luidt dus:

„ Indien twee *prismas* even hoog zijn en het een eenen „ driehoek, het ander een parallelogram tot grondvlak „ heeft, en het parallelogram het dubbeld is van den drie- „ hoek, zijn die *prismas* gelijkhaltig." Want dan stelt men dat in het tweede geval, daar een parallelogram het grondvlak is, de opstaande zijden driehoeken zijn: en dan komt het Voorstel in de daad, hoe wel het in woorden verschilt, met het onze overéén: beide *prismas* immers zijn in dat geval de helft van *parallelepipeda* die gelijkhaltige grondvlakken, en de zelfde hoogte hebben WHISTON en CLAVIUS schijnen de mindere geschiktheid van de uitdrukking van EUCLIDES gemerkt te hebben: want de eerstgemelde herinnert, in zijne aanmerkingen over deze plaats van den EUCLIDES van TACQUET, dat deze beide gegeven driekantige zuilen de helft zijn van gelijke *parallelepipeda* door diagonalen verdeeld: doch met dit onderscheid dat de deeling in het eene door de *diagonaal* van het grondvlak geschiedt, en niet in het andere: en CLAVIUS merkt aan, dat dit voorstel alleen geldt voor *prismas* waarin twee tegen over elkander gestelde grondvlakken driehoeken zijn.

GEVOLG.

De inhoud van de *prismas* wordt tot dien van de *parallelepipeda* gebragt.

II. AANMERKING. Het blijkt uit het II. en IV. Gevolg op het XII. Voorstel, in welken zin men het gezegde van velen te verstaan hebben dat de inhoud van een *prisma* gelijk is aan het grondvlak door de hoogte vermenigvuldigd.

St. X. 1.

XVII. VOORSTEL.

Verschillende *prismas* staan tot elkander in samengestelde reden van hunne hoogte en grondvlakken.

L. G. VI. 15. Cor.

BEWIJS. Uit het Gevolg van het voorgaande Voorstel: en het XII. Voorstel.

I.

I. GEVOLG.

Dus zijn de *prismas* die de zelfde hoogte en de zelfde, of gelijke, grondvlakken hebben, gelijkhaltig.

II. GEVOLG.

Dus zijn de grondvlakken en hoogten van gelijkhaltige *prismas* in omgekeerde rede van elkander: en omgekeerd.

III. GEVOLG.

Dus zijn *prismas* op gelijke grondvlakken staande zoo als derzelver hoogten: en die op gelijke hoogten zoo als derzelver grondvlakken.

IV. GEVOLG.

Gelijkvormige *prismas* zijn, in driedubbelde rede hunner eveneensstaande zijden (VIII. Bep. 5. Gevolg).

St. X. pr. 10.

XVIII. VOORSTEL.

De oppervlakte van een regthoekig *prisma* is, indien men de grondvlakken uitzondert, gelijk aan den regthoek waarvan de grondlijn de omtrek is van het grondvlak van het *prisma*, en de hoogte de zijde van de opstaande regthoeken, waaruit het *prisma* gevormd is.

BEWIJS. Uit het 3. Gev. van de VIII. Bepaling: en II. 1.

XII. BEPALING.

Men noemt *Pyramide*, of *Naald*, eene ligchamelijke Figuur, samengesteld uit driehoeken, waarvan de grondlijnen den omtrek van het grondvlak des ligchaams uitmaken, en wier toppen in één stip te samen komen.

EUCL. XI. def. 12. — St. IX. Bep. 9. — L. G. VI. def. 11.

I. GEVOLG.

Er zijn derhalven zoo vele driehoeken, die de *naald*, of *pyramide*, samenstellen, en derzelver *zijden*, of *vlakken*, of *kanten*, genoemd worden, als het grondvlak zijden bezit.

II.

II. GEVOLG.

De *Pyramiden*, of *Naalden*, zijn dan *driekantig*, als DABC, fig. 207; of *vierkantig*, of *vijfkantig*, enz. naar mate het grondvlak een *driehoek*, een *vierhoek*, een *vijfhoek*, enz. is. En eene *veelhoekige*, of *veelkantige*, *pyramide*, of *naald*, kan in zoo vele driekantige verdeeld worden, als het grondvlak zijden heeft, min twee; zoo wordt fig. 206. de vijfkantige *pyramide* GVDEF, in drie driekantige GVIF, FIVE, EIVD verdeeld.

St. IX. Bep. 9. — L. G. VI. def. 13.

III. GEVOLG.

Eene *Pyramide*, of *Naald*, kan *regelmatig* genoemd worden, indien het grondvlak een *regelmatige* veelhoek is, en de driehoeken, die de *zijden*, *vlakken*, of *kanten* der *pyramide* uitmaken, gelijke en gelijkbeenige (dus ook gelijkvormige) driehoeken zijn. Waarom dan ook de loodlijn, die uit den top op het grondvlak wordt nedergelaten, en die in dat geval in het middelpunt van het grondvlak valt, de *as* van de naald kan genoemd worden.

L. G. VI. def. 14.

AANMERKING. Indien men op het papier den veelhoek beschrijft, die het grondvlak van de naald zijn moet; en op ieder der zijden van dien veelhoek, den driehoek die eene der zijden moet zijn van de naald: zal men, door vouwing van het papier, de naald verkrijgen.

IV. GEVOLG.

Eene *pyramide* kan regthoekig genoemd worden, wanneer ééne ribbe loodregt staat op het grondvlak; en derhalve ook daarop loodregt staan de twee zijden, vlakken, of kanten, waarvan die ribbe de gemeene snede is, of de vereeniging uitmaakt.

V. GEVOLG.

Twee *pyramiden* zullen dus gelijkvormig zijn, als de grondvlakken gelijkvormig zijn, en de eveneens geplaatste vlakken het ook zijn.

Waaruit volgt, (door IV. Bep. 1.) dat ook de zijden van de grondvlakken, en de ribben van de vlakken, of van de kan-

kanten, der gelijkvormige *pyramiden* onderling evenredig zijn moeten.

L. G. VI. def. 17.

XIX. VOORSTEL. Fig. 220.

Indien men eene *pyramide*, of naald, [CDBAD] door een vlak [GFE] ſnijdt, dat evenwijdig is aan het grondvlak: zal de ſnede aan het grondvlak gelijkvormig zijn, en tot hetzelve ſtaan, als het vierkant van haren afſtand van den top tot het vierkant van den afſtand des grondvlaks insgelijks van den top.

L. G. VI. 16. met het Gev.

BEWIJS. IV. 1. III. Axioma 5. IV. 4. en IV. 11.

GEVOLG.

Indien men dan twee even hooge *pyramiden* door het zelfde vlak, dat aan de grondvlakken evenwijdig is, ſnijdt, en dus op den zelfden afſtand van de grondvlakken; zullen de ſneden tot elkander ſtaan als de grondvlakken zelve.

St. X. 12.

XX. VOORSTEL. Fig. 220.

Indien men alle de ribben [AB, AC, AD, DB, BC, CD], van eene driekantige *pyramide* in twee gelijke deelen ſnijdt, en vlakken [GFE, FHIE, EKI], door de tegenovergeſtelde ſtippen van ſnijding laat gaan; zullen deze de *pyramide* verdeelen in twee gelijke en gelijkvormige driekantige *pyramiden*, [EFGAF, CKIEK] en in twee gelijkhaltige *prismas*, [GEFHBI, DHFEIK] doch die te ſamen genomen grooter zijn dan de helft van de geheele *pyramide*.

EUCL. XII. 3. — L. G. VI. 17.

BEWIJS. VOOR HET I. uit de VII. Bepaling: VOOR HET II. uit het XVI. Voorſtel, II. 13. Gev. 1. Immers indien men uit ▭ HIKD en ▭ HFEI, het *parallelepipedum* DHFEUVD ſtelt, en de diagonalen HK en FU der grondvlakken trekt, is het klaarblijkelijk dat *prisma* HBGFEI = *prisma* DHFVUK ∞ ½ ⬚ DHFEUVD: waarvan *prisma* DHFEIKD ook de helft is.

AAN-

AANMERKING. De twee gemelde *prismas* zijn te samen niet alleen grooter dan de helft van de gegeven *pyramide*, het welk het eenige is dat EUCLIDES er van zegt, maar zij zijn er juist de drie vierde gedeelten van: doch dit kan niet bewezen worden, dan na dat het derde Gevolg van het XXVI. Voorstel bewezen zal zijn. Zie dus de Aanmerking op dat Gevolg.

XXI. VOORSTEL. Fig. 219 en 220.

Indien men twee driekantige *pyramiden*, die de zelfde hoogte hebben, volgens het voorgaande Voorstel, iedere in twee *prismas* [GEH, FED en MNP, QNU] en in twee *pyramiden* [AGEF, IECK en LNQM, NSTR] deelt: en iedere dier *pyramiden* wederom op de zelfde wijze: en iedere der *pyramiden*, welke uit die deeling gebooren worden, wederom op de zelfde wijze, en zoo voorts, zoo ver men wil: zal de som van alle de *prismas*, door die herhaalde deelingen in eene der gegeven *pyramiden* geboren, staan tot de som van alle de *prismas* in de andere *pyramide*, als het grondvlak [BCD] van de eerstgemelde, tot het grondvlak [OSU] van de laatstgemelde.

EUCL. XII. 4.

BEWIJS. Uit het XVII. Voorstel, 3 Gevolg: IV. 2. III. 12. en *axioma* 5.

XXII. VOORSTEL. Fig. 220.

Indien men eene driekantige *pyramide*, volgens het voorgaande Voorstel, in *prismas* en *pyramiden* verdeelt, zoo ver men wil: zal de gegeven *pyramide* de limiet zijn der som van alle de *prismas* door die herhaalde verdeeling geboren: dat is, de laatste rede van de *pyramide* en van de som dier *prismas* is eene rede van gelijkheid.

BEWIJS. Uit het XX. Voorstel: en het I. en II. Voorstel van het VII. Boek.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 219 en 220.

Twee driekantige *pyramiden*, die even hoog zijn, staan in de zelfde rede als hare grondvlakken.

EUCL. XII. 5.

BEREIDING. Men verdeele dezelven volgens het XXI. Voorst.

BEWIJS. Daar de gegeven *pyramiden* even hoog zijn, is het getal van *prismas* die uit de gemelde verdeelingt geboren worden, in beiden het zelfde.

Maar, de *prismas*, in iedere verdeeling, ſtaan onderling als hunne grondvlakken (XVII. Voorſtel, Gev. 3.), en die grondvlakken zijn als de grondvlakken der gegeven *pyramiden* (IV. 2.).

Dus ſtaan de *prismas*, in iedere verdeeling, als de grondvlakken der gegeven *pyramiden* (III. *Axioma* 5.).

Dus ſtaan de ſommen van alle de *prismas* in iedere *pyramide* als de grondvlakken van die *pyramiden* (III. 12).

Maar, de *pyramiden* zijn de limieten van die ſommen. (XXII. Voorſtel).

Dus ſtaan de *pyramiden* onderling in de zelfde rede als hare grondvlakken (VII. 6.).

XXIV. VOORSTEL.

Twee verſchillende *pyramiden*, hoe ook genaamd, die de zelfde hoogte hebben, ſtaan tot elkander als hare grondvlakken.

EUCL. XII. 6. — St. X. 13. — L. G. VI. 18. *Cor.* 2.

BEREIDING. Men onderſtelle dat die veelkantige *pyramiden* ieder in driehoekige verdeeld zijn, volgens het 2. Gev. van de XII. Bepaling.

BEWIJS. Uit het XXII. Voorſt.: en III. 8, 12. en *Axioma* 5.

GEVOLG.

Eene regthoekige *pyramide* is gelijkhaltig met eene ſcheefhoekige, indien zij op een gelijkhaltig grondvlak ſtaat, en de perpendiculaire ribbe gelijk is aan de hoogte van de ſcheefhoekige *pyramide*.

XXV. VOORSTEL. Fig. 222.

Een driekantig *prisma* kan in drie driekantige gelijkhaltige *pyramiden* verdeeld worden.

EUCL. XII. 7. — St. X. 14. — L. G. VI. 22.

BEREIDING. Men trekke de diagonalen BF, BD en AD.

1°. Dan zullen de driehoeken FBE, FBD en EBD met Δ FED de *pyramide* DFBE maken.

2°. Laat een vlak gaan langs BD en AD: dit maakt met Δ ABC, Δ ACD en Δ BCD de *pyramide* ADBCA.

3°.

3°. De driehoeken ABD, AFD, BAF en FBD, maken de *pyramide* ABFDBA uit.

BEWIJS. De 1. en 2. *pyramide* zijn onderling gelijk, uit het XXIII. Voorſtel.

De 2 en 3. om dat zij beiden de helft van eene *pyramide* zijn, die de zelfde hoogte, doch het ▱ ACDF tot grondvlak, en dus een dubbeld grondvlak, zoude hebben.

GEVOLG.

Eene driekantige *pyramide* is het derde gedeelte van een driekantig *prisma*, dat op het zelfde driehoekig grondvlak, en onder de zelfde hoogte ſtaat.

XXVI. VOORSTEL.

Eene *pyramide*, welke ook haar grondvlak zijn moge, is het derde gedeelte van het *prisma* dat op het zelfde grondvlak en onder de zelfde hoogte ſtaat.

BEWIJS. Uit het 2. Gev. van de XII. Bepaling en het XXV. Voorſtel.

I. GEVOLG.

Hieruit, en uit het XVI. Voorſtel, blijkt, dat men den inhoud van *pyramiden* tot dien van *prismas*, en daardoor tot dien van een *parallelepipedum* herleidt. Eene *pyramide* namelijk is gelijkhaltig aan het derde gedeelte van een regthoekig *parallelepipedum*, dat de zelfde hoogte heeft, en waarvan het grondvlak, dat een regthoekig parallelogram is, gelijkhaltig is aan den veelhoek die het grondvlak is van de *pyramide*.

II. GEVOLG.

Hieruit, en uit het 4. Gev. van het XII. Voorſtel, volgt verder, in welken zin men het gezegde van velen verſtaan moet, dat de inhoud van eene *pyramide* gelijk is aan het grondvlak door het derde gedeelte van de hoogte vermenigvuldigd.

St. X. 15. — L. G. VI. 18.

III. GEVOLG.

Verſchillende *pyramiden* ſtaan dus tot elkander in ſa-

 men-

mengestelde rede van hare grondvlakken en van hare hoogten.

AANMERKING. Wij hebben in de Aanmerking op het XX. Voorstel gezegd, dat de twee *prismas* waarvan in dat Voorstel gesproken wordt, te samen drie vierde gedeelten van de geheele *pyramide* uitmaken: en in de daad, de grondvlakken der beide *pyramiden* staan ieder tot die van de groote *pyramide* als 1 : 4 (IV. 11.) de hoogten zijn als 1 : 2: dus is ieder kleine *pyramide* tot de groote als 1 : 8; en beiden te samen zijn zij het vierde gedeelte van de geheele *pyramide*: dus zijn de twee *prismas* de drie vierde gedeelten van dezelve. Het blijkt ook, en misschien korter, hieruit, dat (Fig. 220.) *prisma* HBGFEI het drievoud is van *pyramide* GAEF; dat de twee *prismas* te samen het drievouwd zijn van de twee *pyramiden*; en gevolgelijk de *prismas* het ¾, en de *pyramiden* het ¼ van de geheele *pyramide*.

St. X. 16.

IV. GEVOLG.

Hieruit volgt 1°. dat, wanneer *pyramiden* gelijkhaltig zijn, hare hoogten in omgekeerde rede staan van hare grondvlakken: en omgekeerd.

EUCL. XII. 9.

V. GEVOLG.

2°. Dat *pyramiden*, die gelijkhaltige grondvlakken hebben, in de zelfde rede staan als hare hoogten: en omgekeerd.

L. G. VI. 18. *Cor.* 2.

VI. GEVOLG.

En eindelijk dat gelijkvormige *pyramiden* in driedubbelde rede van hare eveneensgeplaatste ribben staan.

EUCL. XII. 8. — St. X. 20. Gev. 2. — L. G. VI. 26.

VII. GEVOLG.

Uit het eerste Gevolg blijkt, dat indien men op het grondvlak van een' *cubus* eene regelmatige *pyramide* stelt, die de hoogte van den *cubus* heeft, en wier top dus op het midden van de bovenste oppervlakte van den *cubus* komt, die *pyramide* het derde gedeelte van den *cubus* zijn zal.

Indien men verder vier vlakken laat gaan, ieder langs eene ribbe van de *pyramide*, en de tegenoverstaande loodregte ribbe van den *cubus*, zullen er vier gelijke en gelijkvormige py-

pyramiden geboren worden, die ieder een vierkant, (zijde van den *cubus*) tot grondvlak, en de halve hoogte van den *cubus* tot hoogte zullen hebben, en dus ieder de helft van de eerstgemelde en middelste *pyramide* zijn zullen, en gevolgelijk het zesde gedeelte van den *cubus*.

Dus wordt een *cubus* in vijf vierkantige *pyramiden* gedeeld, waarvan er vier gelijk en gelijkvormig zijn, en de vijfde het dubbeld van iedere der vier overige is.

VIII. GEVOLG.

Hieruit volgt dat men ook den inhoud van eene geknotte *pyramide* vindt, met het verschil te nemen tusschen de geheele *pyramide* en het afgeknotte stuk, dat ook eene *pyramide* is.

I. AANMERKING. De inhoud van de geknotte *pyramide* wordt derhalve, indien (Fig. 220.) BACD eene regthoekige *pyramide* is, op het zelfde grondvlak als het gegeven staande, en gelijke hoogte hebbende (Bep. XII. Gev. 4.) uitgedrukt door $\frac{1}{3}$ ($\triangle$ BCD $\times$ AB $-$ $\triangle$ GFE $\times$ AG): maar (door Voorst. XIX.) is $\triangle$ GFE $=$ $\triangle BCD \times \frac{\overline{AG}^2}{\overline{AB}^2}$. En derhalve wordt de geknotte *pyramide* uitgedrukt door $\frac{1}{3} \triangle BCD (AB - \frac{\overline{AG}^2}{\overline{AB}^2} \times AG) =$

$$\frac{\frac{1}{3} \triangle BCD (\overline{AB}^3 - \overline{AG}^3)}{\overline{AB}^2}.$$

II. AANMERKING. Deze uitdrukking $\frac{1}{3} \triangle BCD \frac{(\overline{AB}^3 - \overline{AG}^3)}{\overline{AB}^2}$ kan nog eene andere gedaante krijgen: want $\overline{AB}^3 - \overline{AG}^3 = (\overline{AB}^2 + AB \times AG + \overline{AG}^2) \times (AB - AG)$: derhalve wordt de geknotte *pyramide* uitgedrukt door $\frac{1}{3} \triangle BCD \times$

$$\frac{(\overline{AB}^2 + AB \times AG + \overline{AG}^2)}{\overline{AB}^2} \times BG = \frac{1}{3} \triangle BCD \times BG + \frac{1}{3} \triangle BCD \times \frac{AG \,.\, BG}{AB} + \frac{1}{3} \triangle BCD \times \frac{\overline{AG}^2}{\overline{AB}^2} \times BG.$$

Het eerste, $\frac{1}{3} \triangle BCD \times BG$, drukt eene *pyramide* uit waarvan $\triangle$ BCD het grondvlak en BG de hoogte is: het derde lid, $\frac{1}{3} \triangle BCD \times \frac{AG^2}{\overline{AB}^2} \times BG = \frac{1}{3} \triangle GFE \times BG$, drukt

 eene

eene *pyramide* uit waarvan Δ GFE het grondvlak is en BG de hoogte: het tweede lid $\frac{1}{3}$ Δ BCD $\times \frac{AG \quad BG}{AB}$: wordt op deze wijze nader bepaald.

Indien men een' driehoek D stelt middel-evenredig tusschen Δ BCD en Δ GEF, d. i. tusschen Δ BCD en Δ BCD $\times \frac{AG^2}{AB^2}$:

is Δ D $= \sqrt{(\Delta\, BCD)^2 \times \frac{AG^2}{AB^2}} = \frac{\Delta\, BCD \times AG}{AB}$: en

dus is $\frac{1}{3}$ Δ BCD $\times \frac{AG\,.\,BG}{AB} = \frac{1}{3}$ Δ D $\times$ BG: het geen eene *pyramide* uitdrukt waarvan Δ D het grondvlak en BG de hoogte is. Waaruit dit Voorstel van LE GENDRE (VI. 21.) volgt.

IX. GEVOLG.

Eene geknotte *pyramide* is gelijkhaltig aan de som van drie *pyramiden*, welke tot gemeene hoogte hebben de hoogte van die geknotte *pyramide*: en tot grondvlak; de eerste het grondvlak van de geheele *pyramide*, de tweede dat van het afgenomen stuk, dat is de bovenste oppervlakte van de geknotte *pyramide*, en de derde een middel-evenredige tusschen die twee grondvlakken.

XXVII. VOORSTEL. Fig. 206.

De oppervlakte van eene *regelmatige pyramide* is, (het grondvlak niet mede gerekend zijnde), gelijk aan den inhoud eens driehoeks, wiens grondlijn gelijk is aan den omtrek van het grondvlak der *pyramide*, en wiens hoogte de loodlijn is uit den top op de grondlijn van eene der zijden nedergelaten.

BEWIJS. Uit het 1. en 3. Gevolg van de XII. Bepaling.

GEVOLG.

De oppervlakte van eene geknotte regelmatige *pyramide* is gelijk aan een' regthoek, waarvan de hoogte die is van de geknotte *pyramide*, en de grondlijn de middel-arithmetische evenredige tusschen den ondersten en den bovensten omtrek.

BEWIJS. Immers zij Fig. 231. Δ VAE gelijk aan de oppervlakte van de geheele *pyramide*, en Δ FVG gelijk aan die van het afgeknotte stuk: dan is oppervlakte van de

de geknotte *pyramide* gelijkhaltig aan *trapezium* AFGE, wiens inhoud (IV. 9. Gev. 8.) uitgedrukt wordt door eenen regthoek waarvan FA de hoogte en $\left(\frac{AE + FG}{2}\right)$ de grondlijn is: AE nu en FG zijn de onderste en bovenste omtrekken, en AF de hoogte van de geknotte *pyramide*.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 221.

Indien men de zijde BA van eene *pyramide* in gelijke deelen *vo*, *n*B, enz. verdeelt, en men op het grondvlak BCD, een *prisma* stelt, CDB *nikn*, dat de hoogte *n*B hebbe, en insgelijks op het bovenste vlak *nml*, dat door de zijden van de *pyramide* bepaald is, wederom een nieuw *prisma* van de zelfde hoogte; en op het bovenste vlak van dat *prisma* wederom een ander, en zoo voorts: is de *pyramide* de *limiet* der som van alle die *prismas*: en de uiterste rede van de som van alle die *prismas* tot de *pyramide* is eene rede van gelijkheid.

BEWIJS. De overmaat van alle de *prismas* boven de *pyramide* is de som van alle de *prismas* CD*mikl*, *qptsru* enz. die al langer hoe kleiner worden, en alle de zelfde hoogte hebben: naar mate dus die som kleiner is; komt de som der *prismas* nader aan de *pyramide*, en die som wordt kleiner naar mate de hoogte *iD* geringer is: dus kan de som van alle de *prismas* aan de *pyramide* naderen zoo veel men wil, en minder van dezelve verschillen dan eenige eindige grootheid bedraagt; dus is de *pyramide* de limiet der som van alle de *prismas* (VII. Bep. 1.): derhalve is de uiterste rede van beiden eene rede van gelijkheid (VII. 2.).

I. GEVOLG.

Hieruit blijkt in welken zin men verstaan moet het geen sommigen zeggen, „ dat eene *pyramide* uit een *oneindig* aan„ tal van gelijke *oneindig dunne prismas*, en dus uit een on„ eindig aantal vlakken, die aan het grondvlak evenwijdig „ zijn, gevormd wordt:" (het geen anderen ook uit het Gevolg van het XIX. Voorstel afleiden): en hoe ver dergelijke uitdrukkingen van alle mathematische naauwkeurigheid ontbloot zijn.

II. GEVOLG.

Daar de grondvlakken van alle die *prismas* in de zelfde rede staan als de vierkanten der afstanden van den top (XIX. Voorstel) of als de tweede magten der getallen welke die afstanden uitdrukken (IV. 24. Gev. 1.) en dus, indien de deelen *vo*, *n*B, gelijk aan elkander en voor *éénheid* genomen worden, van den top af de rede volgen van de vierkanten der natuurlijke getallen; ziet men, in welken zin men zeggen kan dat de limiet van de som dier vierkanten, of, zoo

als velen zich uitdrukken, de *som van alle die vierkanten*, uitgedrukt kan worden door den inhoud van eene *pyramide*, wier grondvlak het vierkant van het laatste getal, en de hoogte het getal zelf is: en gevolgelijk (Voorst. XXVI. 2. Gev.) dat die *limiet*, of die *som*, gelijk is aan het derde gedeelte van het product van dat getal door het getal zelve gemultiplieeerd, of aan het derde gedeelte van den *cubus* van het getal.

Zie 's GRAVESANDE, *Natuurkunde* §. 480. alwaar dit Voorstel van zeer veel gebruik is.

AANMERKING. De som der reeks van de quadraten der natuurlijke getallen $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots n^2$ komt dan al langer hoe nader aan $\frac{1}{3}n^3$ dat n grooter is: en is $\frac{1}{3}n^3$, zoo n voor oneindig groot gehouden wordt.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 223.

De inhoud van alle ligchamen, welke door regte lijnen en vlakken bepaald worden, kan tot den inhoud van een *parallelepipedum* gebragt worden.

BEWIJS. Men kan door vlakken het ligchaam of in *parallelepipeda*, of in *prismas*, of in geheele of geknotte *pyramiden* verdeelen, van welke alle men den inhoud afzonderlijk vinden kan: en de som is de gezochte inhoud.

VOORBEELD. Indien het ligchaam BADHEFGC tot grondvlak het *trapezium* DCBA heeft, en de vlakken EB, DE, HC, GB loodregt zijn; indien voorts HD = EA, GC = FB, en men de uitdrukkingen in het 4. Gevolg van het XII. Voorstel vermeld, gebruikt; zal de inhoud van het ligchaam door deze grootheid uitgedrukt worden, indien c^2 en d^2 de inhoudden van de driehoeken ACB en ACD aanwijzen.

$$\frac{2c^2 \times FB + 2d^2 \times EA + c^2 \times EA + d^2 \times FB}{3}$$

Want, indien men AK = DI = FB = GC stelt, en door FGIK een vlak laat gaan, is dat vlak evenwijdig aan DCBA: en de inhoud van het ligchaam KIGFBADC is $(c^2 + d^2) \times FB$.

Het bovenste stuk EKIHGF bestaat uit drie *pyramiden*: de eene, FKEG, heeft tot basis den driehoek FGK (= ACB) en tot hoogte de lijn EK: dus is de inhoud $= c^2 \left(\frac{EA - FB}{3}\right)$.

Het overige gedeelte van het bovenste stuk is eene vierzijdige *pyramide* HIKEG, die verdeeld kan worden in twee

twee gelijke driekantige, GEIH en GEIK; de laatste, wanneer men $\triangle$ GIK ($=\triangle$ CDA) voor grondvlak en EK voor hoogte neemt, is $= d^2 \left(\frac{EA - FB}{3}\right)$: dus de som van beiden $= 2 d^2 \left(\frac{EA - FB}{3}\right)$

de som van de drie deelen is derhalven
$\frac{2\ e^2 \times FB + 2\ d^2 \times EA + e^2 \times EA + d^2 \times FB}{3}$.

MAUDUIT, *Mem. présentés* IV. p. 624.

I. AANMERKING. Het komt in de Bouwkunde zeer dikwerf te pas den inhoud van dergelijke ligchamen te moeten vinden.

II. AANMERKING. Anderen beschouwen zoodanig een ligchaam als verdeeld in een *parallelepipedum*, twee driekantige *prismas*, en eene vierzijdige *pyramide*. Want 1°. het *parallelepipedum* heeft tot grondvlak den regthoek uit AB, BC, en tot hoogte BF: dan is de inhoud $2\ e^2 .$ FB. 2°. Het eene *prisma* heeft tot grondvlak een driehoek, of den halven regthoek uit AB (AD — BC) en de hoogte is FB: derhalve de inhoud van dat *prisma* $\left(\frac{AB . AD - AB . BC}{2}\right)$ FB $= (d^2 - e^2)$ FB. 3°. Het bovenste stuk bestaat uit een driehoekig *prisma* en eene vierkantige *pyramide*: het *prisma* heeft tot grondvlak den driehoek EKF en tot hoogte GF $=$ BC: dus is de inhoud van dat *prisma* een *parallelepipedum* wiens grondvlak is $\frac{FK . KE}{2}$ en wiens hoogte is BC: en derhalve is dezelve $\frac{AB . BC . EK}{2} = e^2$ KE $= e^2$ (EA — FB).

4°. De vierzijdige *pyramide* heeft tot grondvlak den regthoek uit (AD — BC) en (EA — FB) en tot hoogte FK $=$ AB: en derhalve is de inhoud $\frac{1}{3}$ van het *parallelepipedum* wiens grondvlak is de regthoek (AD — BC) (AB) en wiens hoogte is (EA — FB): en dus is dezelve $\left(\frac{AD . AB - AB . BC}{3}\right) \times$ (EA — FB) $=$

(2

$\left(\frac{2\,d^2 - 2\,c^2}{3}\right)$ (EA — FB). Wanneer men nu deze vier grootheden bij elkander optelt geeft de ſom voor den inhoud van het ligchaam

$$\frac{2\,c^2\,FB + 2\,c^2\,EA + c^2\,EA + d^2\,FB}{3}.$$

XXX. VOORSTEL.

Indien men binnen een veelvlakkig ligchaam een ſtip neemt, en van daar lijnen naar alle de ligchamelijke hoeken trekt:. zullen er zoo vele *pyramiden* geboren worden, als de figuur vlakken of zijden heeft: en derzelver ſom zal gelijk zijn aan den inhoud van de geheele figuur.

III. AFDEELING.

OVER DE REGELMATIGE LIGCHAMELIJKE FIGUREN.

XIII. BEPALING.

Men noemt *regelmatige ligchamen* zoodanige, welke uit gelijkvormige, gelijke, en eveneensgeplaatſte vlakken beſtaan.

I. GEVOLG.

In regelmatige ligchamen zijn dus de ligchamelijke hoeken alle gelijk aan elkander: en het middelpunt is dat ſtip het welk even ver van de toppen van alle de hoeken afſtaat.

II. GEVOLG.

Indien men uit het middelpunt driekantige vlakken laat gaan naar de ribben van het regelmatig ligchaam: zal het zelve daar door in zoo vele regelmatige en allezins gelijke *pyramiden* gedeeld worden als het vlakken of zijden heeft.

L. G. *Appendix* op Boek VII. prop. 9. *Schol.*

III.

III. GEVOLG.

Alle regelmatige ligchamen van de zelfde soort zijn onderling gelijkvormig. (VI. Bep.).

XIV. BEPALING. Fig. 225.

Een *Tetraedrum*, of viervlakkig ligchaam, bestaat uit vier gelijke en gelijkzijdige driehoeken.

EUCL. XI. Bep. 26.

AANMERKING. Het *tetraedrum* is dus eene volkomen regelmatige *pyramide*; ook gebruikt EUCLIDES wel eens in zijn XIII. Boek het woord *pyramide*, om het *tetraedrum* aanteduiden.

XV. BEPALING. Fig. 226.

Een *Octaedrum*, of achtvlakkig ligchaam, bestaat uit acht gelijke gelijkzijdige driehoeken.

EUCL. XI. Bep. 27.

XVI. BEPALING. Fig. 228.

Een *Icosaedrum*, of twintigvlakkig ligchaam, bestaat uit twintig gelijke gelijkzijdige driehoeken.

EUCL. XI. Bep. 29.

XVII. BEPALING. Fig. 218.

Een *Cubus*, of taerling, bestaat uit zes vierkanten en is een zesvlakkig ligchaam, of *hexaedrum*.

Zie boven Bep. 10.

XVIII. BEPALING. Fig. 230.

Een *Dodecaedrum*, of twaalfvlakkig ligchaam, bestaat uit twaalf gelijke regelmatige vijfhoeken.

EUCL. XI. Bep. 28.

AANMERKING. Men moet bewijzen dat die figuren in de daad bestaanbaar zijn, en uit den aard der eenige mogelijke ligchamelijke hoeken, welke uit gelijke vlakke hoeken gevormd kunnen worden, volgen. Dit is door EUCLIDES niet gedaan: doch hier toe strekt het volgende Voorstel met deszelfs gevolgen.

XXXI. VOORSTEL.

Indien een ligchamelijke hoek door vlakke hoeken van gelijke regelmatige veelhoeken gevormd wordt, bestaat dezelve, of uit drie, of uit vier, of uit vijf hoeken van gelijkzijdige driehoeken: of uit drie hoeken van vierkanten, dat is uit drie regte hoeken: of uit drie hoeken van regelmatige vijfhoeken. Geen ligchamelijke hoek kan uit meerdere of mindere hoeken van gemelde veelhoeken, of uit hoeken van eenige andere regelmatige veelhoeken, bestaan.

BEWIJS. Uit het II. Voorstel van dit Boek, en II. Bep. 14. het 1. Gev.

I. GEVOLG.

Er zijn dus maar vijf regelmatige ligchamen mogelijk. Deze zijn de vijf bovengemelde.

EUCL. XIII. *scholium* op de laatste propositie. — L. G. *Appendix*, Boek VII. prop. 1, 2.

II. GEVOLG. Fig. 225.

Wanneer een ligchamelijke hoek uit drie hoeken van eenen gelijkzijdigen driehoek bestaat, men die driehoeken voltooit, en dezelve als de vlakken, of zijden, van eene ligchamelijke figuur aanziet; zullen de grondlijnen van deze drie driehoeken, eenen nieuwen en gelijken gelijkzijdigen driehoek maken, welke het vierde vlak van het ligchaam zal zijn. Dat ligchaam zal derhalve bestaan uit vier gelijkzijdige driehoeken. Het is dus een *tetraedrum*.

Hieruit volgt 1°. dat een *tetraedrum* eene alleszins regelmatige driekantige *pyramide* is, waarvan de zijden, of vlakken, gelijk zijn aan het grondvlak.

2°. Dat de loodlijn uit eenen der toppen op het tegenovergestelde vlak, dat dus, ten opzigte van dien top, het grondvlak is, nedergelaten, op het middelpunt van dien driehoek (III. Voorstel) valt, en derhalve op twee derde gedeelten van de lijn, uit een der hoeken van dien driehoek loodregt op de tegenovergestelde zijde van denzelven getrokken. (IV. 13 en IV. 14. Gev. 3.).

3°. Dat, indien men op het papier eenen gelijkzijdigen driehoek maakt, en wederom eenen op ieder der zijden van dezen, men door vouwing van het papier een *tetraedrum* zal verkrijgen, waarvan de eerstgemelde driehoek het grondvlak,

en

en de drie andere de opstaande zijden, of vlakken, zijn zullen.

III. GEVOLG. Fig. 226.

Wanneer een ligchamelijke hoek uit vier hoeken van gelijkzijdige driehoeken bestaat, en men die vier driehoeken voltooit, zullen derzelver vier grondlijnen eene gelijkzijdige en gelijkhoekige figuur, en dus een vierkant, uitmaken, waarop de vier driehoeken als eene regelmatige *pyramide* zullen staan: over welke *pyramide* men op het zelfde grondvlak, aan den anderen kant, eene gelijke stellen kan: zoo dat dan het geheele ligchaam uit acht gelijkzijdige driehoeken bestaan zal: het is een *Octaedrum.*

Hieruit volgt, dat de lijnen, die uit iederen hoek naar den tegenoverstaanden getrokken worden, *diagonalen* of *assen* van de figuur zijn, en elkander onderling in twee gelijke deelen snijden in één stip, dat dus het *middelpunt* van de figuur is.

Voorts, indien men acht gelijkzijdige en gelijke driehoeken stelt, zoo als in fig. 227., zal men door vouwing van het papier een *Octaedrum* verkrijgen: namelijk *a*, *b*, *c*, *d*, zullen de eene helft, waarvan *i* de top is, maken: en *e*, *f*, *g*, *h*, de andere helft, waarvan *k* de top is.

IV. GEVOLG. Fig. 228.

Wanneer een ligchamelijke hoek G uit vijf hoeken van gelijke gelijkzijdige driehoeken bestaat, zullen de vijf grondlijnen FH, HI, ID, DE, EF van die vijf voltooide driehoeken FGH, HGI, IGD, DGE, EGF eenen regelmatigen vijfhoek FHIDE uitmaken. Op iedere dier lijnen ID, IH, HF enz. zal men wederom eenen gelijken gelijkzijdigen driehoek IZD, BIH, AHF, enz. kunnen stellen; en dan tusschen de twee naastliggende, ZID en BIH, BIH en AHF, enz. wederom eenen BIZ, AHB, die de ligchamelijke hoeken I, en H, enz. ieder uit vijf hoeken bestaande, zullen voltooijen. De grondlijnen ZB, AB enz. van die vijf driehoeken maken wederom eenen regelmatigen vijfhoek, op wiens zijden men wederom vijf gelijke gelijkzijdige driehoeken stellen kan, wier toppen eenen ligchamelijken hoek zullen uitmaken, en de geheele figuur sluiten. De figuur bestaat dan uit twintig gelijkzijdige driehoeken, en is een *Icosaedrum.*

Hieruit volgt, dat, de lijnen die van iederen hoek naar zijnen tegenovergestelden getrokken worden, en die dus *diagonalen*, of *assen*, en aan elkander gelijk, zijn, zich onderling in

in twee gelijke deelen snijden in één stip dat het middelpunt van de figuur is.

Ook blijkt het, indien men twintig gelijkzijdige en gelijke driehoeken op het papier teekent, zoo als in fig. 229. dat dezelve door vouwing van het papier een *icosaedrum* zullen uitmaken: namelijk, de vijf *b*, *c*, *f*, *e*, *d* zullen om het stip *x* als top eenen ligchamelijken hoek maken: insgelijks *p*, *q*, *r*, *t*, *u* om het stip *y*: door welker vereeniging men het bovenste en onderste gedeelte verkrijgt: daar de overige tien driehoeken het middelste gedeelte zullen daarstellen.

V. GEVOLG. Fig. 218.

Indien een ligchamelijke hoek D uit drie regte hoeken ADC, CDG, en ADG, bestaat, en men voltooit de vierkanten ABCD, CDGF, ADGH: zal men door het vierkant CBMF op BC en CF en dan ADGH op DG en AB te voltooijen, de drie vierkanten CBMF, ADGH, en GFMH, verkrijgen, die eene ligchamelijke figuur uit zes vierkanten bestaande zullen uitmaken, en dus eenen *Cubus* of *Taerling*.

Hieruit blijkt dat de zes gelijke vierkanten, waaruit een *Cubus* gemaakt wordt, op dezelfde wijze als de regthoeken in fig. 211. gesteld moeten worden.

VI. GEVOLG. Fig. 230.

Wanneer een ligchamelijke hoek X, uit drie hoeken van regelmatige vijfhoeken bestaat, en men de regelmatige gelijke vijfhoeken XWKAB, XBYML, XLP*a*W voltooit; verder op de zijden W*a*, *a*P, PL, van eenen dier vijfhoeken wederom gelijke vijfhoeken, WKSH*a*, *a*HIOP, OPLMN stelt, zullen deze met den reeds gegevenen, te samen zes vijfhoeken uitmaken, welke men zoo zal kunnen stellen, dat zij drie aan drie eenen ligchamelijken hoek, en dus te samen vijf ligchamelijke hoeken in X, W, *a*, P, L, zullen uitmaken. Men ziet ook duidelijk dat AB en BY, YM en MN, NO en OI, IH en HS, SK en KA, zijden zullen zijn van vijf nieuwe vijfhoeken, (die hier met gestipte lijnen aangewezen worden, om dat zij onder de vijfhoeken staan die met volle lijnen geteekend zijn), te weten van de vijfhoeken ABYDVA, DYMNED, ENAIKE, HSGKI, en SKAVG, die door hunne zijden VD, DE, EK, KG, GV eenen zesden vijfhoek VDEKGV uitmaken, die aan de overige gelijk is, vlak over den voorsten vijfhoek XLP*a*WX staat, aan denzelven *parallel* is, doch in eene tegenovergestelde rigting. De figuur wordt derhalve door twaalf regelmatige vijfhoeken gemaakt en gesloten, die twee aan twee evenwijdig over elkander staan; zij is gevolgelijk het regelmatig ligchaam *dodecaedrum* genoemd.

Hieruit volgt, dat de lijnen, die van iederen hoek naar zijnen

zien tegenovergestelden getrokken worden, en *diagonalen* of *assen* zijn, zich allen in twee gelijke deelen in één stip snijden: welk stip het *middelpunt* der figuur is.

Men ziet verder, dat indien men op alle de zijden van eenen regelmatigen vijfhoek, gelijke vijfhoeken stelt: deze zes door het vouwen van het papier de helft van een *dodecaedrum* zullen uitmaken; en dat men, indien men een ander dergelijk stel maakt, de andere helft op gelijke wijze zal bekomen: zoo dat zij beiden te samen het geheele *dodecaedrum* vol maken: men kan, tot meerder gemak, wanneer men het eerste stel gemaakt heeft, een' der uiterlijke vijfhoeken van het tweede op de zijde van een' der uiterlijke vijfhoeken van het eerste stel plaatsen.

VII. GEVOLG.

De oppervlakte van een regelmatig ligchaam is gelijk aan zoo vele regelmatige driehoeken, vierhoeken of vijfhoeken, als het uit driehoekige, vierhoekige, of vijfhoekige vlakken bestaat.

XXXII. VOORSTEL.

Ieder regelmatig ligchaam heeft zoo vele *ribben*, als het product van het halve getal der vlakken die het ligchaam uitmaken, door het getal der zijden van die vlakken gemultipliceerd, eenheden bevat: en zoo vele ligchamelijke hoeken als er eenheden zijn in het quotient, dat het product van het getal der vlakken en van het getal der zijden in ieder vlak oplevert, wanneer het door het getal der hoeken die iederen ligchamelijken hoek uitmaken gedivideerd wordt.

EUCL. XV. 6.

BEWIJS VAN HET I. Het getal van zijden in alle de veelhoeken die het ligchaam uitmaken, is het product van het getal zijden in iederen veelhoek, door het getal van veelhoeken, of vlakken, gemultipliceerd. Doch de vereeniging van twee naastliggende zijden maakt eene ribbe, en dus bestaat het getal van ribben uit het gemelde halve product.

BEWIJS VAN HET II. Er zijn zoo vele vlakke hoeken als er eenheden zijn in het product van het getal vlakken die de ligchamelijke figuur uitmaken, door het getal der hoeken in ieder vlak, of veelhoek, gemultipliceerd. Doch ieder ligchamelijke hoek van de figuur bestaat uit zoo vele vlakke hoeken, als de aard van de figuur vereischt: waarom men het gemelde product door dat getal moet divideeren, om het getal van hoeken te verkrijgen.

GEVOLG.

Dus bestaat een *Tetraedrum* uit zes ribben, vier hoeken, en vier zijden, of vlakken.

Een *Octaedrum* uit twaalf ribben, zes hoeken, en acht zijden, of vlakken.

Een *Icosaedrum* uit dertig ribben, twaalf hoeken, en twintig zijden, of vlakken.

Een *Cubus*, of *Hexaedrum*, uit twaalf ribben, acht hoeken, en zes zijden, of vlakken.

Een *Dodecaedrum* uit dertig ribben, twintig hoeken, en twaalf zijden, of vlakken.

AANMERKING. In alle deze ligchamen derhalve overtreft het getal der vlakken en dat der hoeken waaruit zij bestaan, te samen genomen, met twee het getal der ribben: eene eigenschap die aan alle veelvlakkige ligchamen eigen is.

L. G. VII. 25.

XXXIII. VOORSTEL.

Indien men eene ribbe van eene ligchamelijke figuur in twee gelijke deelen deelt, en uit het stip der verdeeling eene loodlijn trekt op die ribbe in elk der twee vlakken die door hare zijden de ribben uitmaken, zal de hoek, welken die lijnen met elkander maken, de helling aanduiden der vlakken waaruit die ligchamelijke figuur bestaat.

BEWIJS. Uit X. Bep. 5.

L. G *Appendix* op Boek VII. prop. 3.

I. AANMERKING. In het *tetraedrum*, *octaedrum*, *icosaedrum* en *dodecaedrum* gaan de gemelde loodlijnen door de toppen van de driehoeken, of vijfhoeken, in welke zij getrokken zijn, zoo als blijkt uit I. 27. Gev. 4. Maar voor den *cubus* staat die lijn regthoekig op de twee tegenovergestelde ribben.

II. AANMERKING. Dit Voorstel is het eerste gedeelte van de 7. propositie in het XV. Boek van EUCLIDES: en de bewerking die men aldaar aantreft komt met ons Voorstel overéén.

De Ouden schijnen hierin niet verder gegaan te zijn dan de enkele aanwijzing van dien hoek. Door onze Driehoeksmeting komen wij verder, en wij kunnen de grootte van die hoeken berekenen, op de volgende wijze. Wij merken hier, bij voorraad, aan, dat wij de *ribben*, in alle regelmatige ligchamen, door de letter R zullen aanduiden.

I. TOEPASSING OP HET TETRAEDRUM. Fig. 224, 225.

In het *tetraedrum* is de hoogte (VE) $= R \sqrt{\frac{2}{3}}$. De afstand (VC) van den top tot het middelpunt $= R \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$.

De

De loodlijn [CQ], uit het middelpunt op een der vlakken neergelaten, wordt uitgedrukt door $\frac{1}{4}$ R . $\sqrt{3}$.

De *sinus* van den hoek [VAD] welke eene rib maakt met het vlak waarop zij staat, is $\sqrt{\frac{2}{3}}$; of die hoek bedraagt 54°. 44′. 8″. omtrent.

De *sinus* van den hoek welken twee vlakken onderling maken, is $\frac{2}{3} . \sqrt{2}$; en deszelfs *cosinus* is $\frac{1}{3}$: zoo dat die hoek 70°. 31′. 44″. omtrent bedraagt.

L. G. *Notes*, N°. IX. p. 311.

BEWIJS. Zij fig. 224. AVD die driehoek welke in fig. 225. door de ribbe AV gaande, loodregt op het vlak BAG komt: hieruit volgt:

1°. Dat VD in het vlak VGB ligt, en de loodlijn is, die uit V op GB getrokken wordt: derhalve is (VI. 18.) $VD = AV . \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} R . \sqrt{3}$.

2°. Dat AD eene dergelijke loodlijn is in het vlak AGB: en dus $AD = VD = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$.

Zij E het middelpunt van △ ABG fig. 225. dan zal E op AD vallen, en $AE = \frac{2}{3} AD$ zijn (IV. 14. Gev. 3.) dus is ∠ VEA regt (V. 7.): en derhalve

3°. $AE = \frac{2}{3} AV . \sqrt{\frac{3}{4}} = AV . \sqrt{\frac{4 \times 3}{4 \times 9}} = R \sqrt{\frac{1}{3}}$: gevolgelijk

4°. $VE = \sqrt{\overline{AV}^2 - \overline{AE}^2} = AV . \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = R . \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Verder, indien AZ regthoekig op AV getrokken wordt (fig. 224.), tot dat dezelve VE, verlengd, in Z ontmoet, en men op VZ den cirkel VAZ beschrijft, is VC = AC, en dus C het middelpunt van het *tetraedrum*. Maar VE: AV = AV: VZ (IV. 15. Gev. 2.) derhalve

5°. $VZ = AV . \sqrt{\frac{3}{2}} = R . \sqrt{\frac{3}{2}}$.

6°. $VC = \frac{1}{2} AV . \sqrt{\frac{3}{2}} = R . \sqrt{\frac{3}{8}}$.

7°. De loodlijn uit het middelpunt C op het vlak GVB neergelaten, valt (fig. 224.) op de lijn VD, in Q, zoo dat $VQ = \frac{1}{2} VD = \frac{1}{4} R \sqrt{3}$: en $CQ^2 = VC^2 - VQ^2 = \frac{3}{8} R^2 - \frac{3}{16} R^2 = \frac{R^2}{16} \times (6 - 3) = \frac{3 R^2}{16}$: en $CQ = \frac{1}{4} R \sqrt{3}$.

Uit IX. 1 is AV: VE = 1 : *sin.* ∠ VAD en
VD: VE = 1 : *sin.* ∠ VDA: derhalve

8°. *Sin.* ∠ VAD $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ en ∠ VAD = 54°. 44′. 8″.

9°.

9°. *Sin.* $\angle$ VDA $= \frac{2}{3}\sqrt{2}$; *cof.* $\angle$ VDA $= \frac{1}{3}$; $\angle$ VDA $=$ 70°. 31′. 44″.

AANMERKING. LE GENDRE leidt voor de vyf regelmatige ligchamen de hoegrootheid der hoeken af uit de leer der klootfche driehoeken. Ik heb geoordeeld alles wat die ligchamen betreft, uit derzelver aard te moeten opmaken; hoe wel de bewijzen daar door langer worden. De hoeken zijn reeds, vóór lang, door ALBERT GIRARD bepaald, en wel door eene hem eigene wijze, in zijne *nouvelle invention en Algèbre*, op het einde.

II. TOEPASSING OP HET OCTAEDRUM. Fig. 226.

In het *Octaedrum* heeft het volgende plaats.

1°. De ribben maken met elkander eenen regten hoek.

2°. De as van het *octaedrum* is de diagonaal van het vierkant ABGD, en is derhalve $=$ AB . $\sqrt{2} =$ R $\sqrt{2}$.

3°. De afftand van den top tot het middelpunt is de halve as: en derhalve $\frac{1}{2}$ R $\sqrt{2} =$ R $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

4°. De loodlijn CQ uit het middelpunt C op een der vlakken, valt op BC, en is $\frac{1}{2}$ R.

5°. De *finus* van den hoek welken eene ribbe maakt met een vlak, is $= \frac{2}{3}\sqrt{2}$, en zijn *cofinus* $= -\frac{1}{3}$: zoo dat die hoek zelve 109°. 28′ 16″. bedraagt.

BEWIJS. N°. 1, 2, 3: blijken van zelf.

Voor N°. 4: $\overline{CQ}^2 = \overline{GC}^2 - \overline{GQ}^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{1}{4}R^2$: en derhalve CQ $= \frac{1}{2}$ R.

Voor het 5. De hoek AEG, welken de loodlijnen AE, EG, uit E, het midden van BV, getrokken op BV, dat is de hoek welken de vlakken ABV en VBG met elkander maken, is de tophoek eens gelijkbeenigen driehoeks AEG, wiens beenen zijn de loodlijnen AE, EG van twee driehoekige vlakken des *octaedrums*, en wiens grondlijn is AG, de *as* van de ligchamelijke figuur. Nu is (VI. 18.) AE, of EG $=$ AB $\sqrt{\frac{3}{4}}$; en AG is $=$ AB . $\sqrt{2}$: derhalve

AE : $\frac{1}{2}$ AG ($=$ AC) $=$ AB . $\sqrt{\frac{3}{4}} : \frac{AB}{2} . \sqrt{2} = \frac{1}{2} . \sqrt{3} : \frac{1}{2} . \sqrt{2} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Maar in $\triangle$ AEC is 1 : *fin* $\angle$ AEC ($=$ *fin.* $\frac{1}{2}$ $\angle$ AEG) $=$ AE : $\frac{1}{2}$ AG $= \sqrt{3} : \sqrt{2}$: en derhalve *fin* $\frac{1}{2}$ $\angle$ AEG $= \sqrt{\frac{2}{3}}$: en *cof.* $\frac{1}{2}$ $\angle$ AEG $= \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$: waaruit door VIII. 32. N°. 15. volgt *fin.* $\angle$ AEG $=$ 2 *fin.* $\frac{1}{2}$ $\angle$ AEG $\times$ *cof.* $\frac{1}{2}$ $\angle$ AEG $= 2\sqrt{\frac{2}{3}} . \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$: gevolgelijk *cofinus* $\angle$ AEG $= \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9} \times 2} = \pm\frac{1}{3}$: hier $= -\frac{1}{3}$: waaruit volgt $\angle$ AEG $=$ 109°. 28′. 16″.

GE-

GEVOLG.

De hoeken welke de vlakken onderling maken in het *octaedrum* en in het *tetraedrum* zijn supplementen de een van den anderen.

III. TOEPASSING OP HET ICOSAEDRUM. Fig. 228 en 234.

In het *Icosaedrum* heeft het volgende plaats:

1°. De *as* van het *icosaedrum* is $R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$;

en derhalve

2°. De halve as, of de afstand van het middelpunt tot ieder der toppen, $\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

3°. De loodlijn uit het middelpunt in een der vlakken neergelaten is $\frac{1}{2}R\times\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$, en derhalve

4°. De hoogte van het *Icosaedrum* $= R\times\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$

5°. De *sinus* van den hoek welken eene rib maakt met het vlak waaraan dezelve grenst is $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$, en de hoek zelve, stomp zijnde, is 110°. 54′. 18″.

6°. De *sinus* des hoeks welke twee vlakken onderling maken is $\frac{2}{3}$, en de hoek zelve 138°. 11′. 24″.

BEWIJS. Indien men het *Icosaedrum*, Fig. 228 en 234. door een vlak snijdt, dat langs de ribbe B I gaat, en langs de loodlijn I L van den gelijkzijdigen driehoek G I D, zal dat vlak, of die snede, vervolgens gaan wederom door eene dergelijke loodlijn L E (van den Δ G E D) dan door de ribbe E F, dan wederom door de loodlijnen F K (van Δ F A H) en K B (van Δ A B H), zoo dat men den zeshoek B I L E F K verkrijgt, die afzonderlijk in Fig. 234 afgebeeld wordt, en waarin B I, E F twee ribben zijn, en de overige zijden I L, L E, F K, K B, loodlijnen zijn van de gelijkzijdige driehoeken welke het *Icosaedrum* uitmaken, en dus is.

1°. $BI\sqrt{\tfrac{3}{4}} = R\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3} = IL = LE = FK = KB$.

Verder, indien men de lijnen F I en B E trekt, die de beide rib-

ribben BI en EF vereenigen, en dus door de toppen van de tegenoverstaande hoeken I en F, B en G gaan, zullen FI en BE assen zijn van het *Icosaedrum*: en BC = CF = EC = CE de halve *as*. BL is, in den regelmatigen vijfhoek dien de vijf driehoeken (Fig. 228.), ZID, DIG. GIH, HIB, BIZ, om den top I maken, de loodlijn welke in dien vijfhoek uit B op de tegenovergestelde zijde GD getrokken wordt. Vermits nu IF (Fig. 234.) de *as* is, welke loodregt op het vlak van gemelden vijfhoek staat, is het stip N daar dezelve de lijn BL snijdt even ver af van alle de hoeken diens vijfhoeks, en is BN de *radius* van den cirkel welken men om dien vijfhoek trekken kan, waarvan de ribben des *Icosaedrums* de zijden zijn. Waaruit volgt

(door VI. 22. Gev. 1) $BI = BN \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$: en derhalve

$$2^o.\ BN = BI \times \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} = BI \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} =$$

$R \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$; verder $\overline{IN}^2 = \overline{BI}^2 - \overline{BN}^2 = R^2 - R^2 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = R^2 \left(\frac{10 - 5 - \sqrt{5}}{10}\right) = R^2 \times \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)$

waaruit volgt.

$$3^o.\ IN = R \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Maar om dat de cirkel uit C op FI getrokken ook door B en E gaat; is $\angle$ FBI ($= \angle$ FEI) = L (V. 7.) en derhalve is IN: BI = BI: IF (IV. 15. Gev. 2.); dus

$$4^o.\ IF = \frac{BI^2}{IN} = BI \sqrt{\frac{10}{5 - \sqrt{5}}}$$

$$= R \sqrt{\frac{10}{5 - \sqrt{5}}} = R \sqrt{\frac{10\,(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})\,(5 + \sqrt{5})}}$$

$= R \sqrt{\frac{10\,(5 + \sqrt{5})}{20}} = R \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$: gevolgelijk

$5^o.$ CI = afstand van het middelpunt, of halve as

$$= \tfrac{1}{2} R \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Verder $\overline{NL}^2 = \overline{LI}^2 - \overline{IN}^2 = R^2 \times \tfrac{3}{4} -$

R²

$$R^2 \times \frac{5-\sqrt{5}}{10} = R^2 \times \left(\frac{15-10+2\sqrt{5}}{20}\right) =$$

$$= R^2 \times \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\right).$$ Derhalve

6°. $NL = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.

Indien men uit het middelpunt C, OCP op de beide tegen elkander overstaande en aan elkander parallelle vlakken ABH en EGD Fig. 228, dat is in Fig. 234. op de loodlijnen in dezelve, BK, en EL trekt: is $BG = \frac{2}{3} BK$: en dus $= \frac{2}{3} R \times \sqrt{\frac{3}{4}}$ $= R \times \sqrt{\frac{1}{3}}$: en daar $BC = CI = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ en $\overline{CO}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BO}^2$; is $CO^2 = \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ $- \frac{1}{3} R^2 = \frac{1}{24} R^2 (15 + 3\sqrt{5} - 8) = \frac{1}{24} R^2 (7 + 3\sqrt{5})$ $= \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{6}\right)$. Derhalve

7°. CO de loodlijn $= \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$: en

8°. PO, de hoogte van het *Icosaëdrum* $= R \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$.

Hier uit valt het gemakkelijk de hoeken optemaken: want indien men in den gelijkbeenigen driehoek ELI de loodlijn LM uit den top L laat vallen: is $EM = MI = \frac{1}{2} EI$

maar $EI = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{BI}^2} = \sqrt{R^2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - R^2} =$

$R\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$: en gevolgelijk

9°. $MI = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

Maar $ML = \sqrt{\overline{LI}^2 - \overline{MI}^2} = \sqrt{\frac{4}{4} R^2 - \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$

derhalve

10°. $ML = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

Maar $LI : LM = 1 : \textit{sin.} \angle EIL$: en derhalve $\textit{sin.} \angle EIL = \frac{LM}{LI}$

$$= \frac{\frac{1}{4} R \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}}{\frac{1}{2} R \sqrt{3}} \text{: of}$$

11°. *Sin.* ∠ EIL $= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} =$ *sin.* 20°. 54′. 18″.

Daar bij voegende ∠ EIB = 90°. komt

12°. ∠ LIB, die eene rib maakt met een der vlakken = 110°. 54′. 18″.

Om dat *sin.* EIL $= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}$, is *cos.* ∠ EIL = *sin.* ∠ MLI $=$ *sin.* $\frac{1}{2}$ ∠ ELI $= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{6}\right)} = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}$. Maar om dat *sin.* (90°. + ∠ EIL) = *cos.* ∠ EIL (VIII. 32. N°. 19.) en ∠ LIB = 90°. + ∠ EIL, is

13°. *Sin.* ∠ LIB $= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}$. Maar *sin.* ∠ ELI = 2 *sin.* $\frac{1}{2}$ ∠ ELI. *Cos.* $\frac{1}{2}$ ∠ ELI (VIII. 32. N°. 15.) $= 2 \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}} \times \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} = 2 \sqrt{\frac{9 - 5}{36}} = \frac{2}{3}$: d. i.

14°. *Sin.* ∠ ELI $= \frac{2}{3}$: en dus ∠ ELI = 138°. 11′. 24″. = den hoek die twee vlakken met elkander maken.

Waar door alles wat het *Icosaedrum* betreft opgelost is.

IV. TOEPASSING OP DEN CUBUS. Fig. 218.

In den *Cubus*, of Taerling, heeft het volgende plaats:

1°. De vlakken maken onderling regte hoeken.

2°. De hoogte van den *Cubus* is deszelfs ribbe: en de halve hoogte, of afstand van het middelpunt tot een der vlakken, de halve ribbe.

3°. De *as* van den *Cubus* is R $\sqrt{3}$; en derhalve

4°. De halve *as*, of afstand van het middelpunt tot een der hoeken, is $\frac{1}{2}$ R $\sqrt{3}$.

BEWIJS. Voor N°. 1. en 2. klaarblijkelijk. Voor N°. 3 en 4.

$\overline{BD}^2 = 2\,\overline{AD}^2 = 2\,R^2$: maar $\overline{BG}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DG}^2 = 2\,R^2 + R^2 = 3\,R^2$: derhalve $BG = R \,.\, \sqrt{3}$: en $\frac{1}{2}\,BG = \frac{1}{2}\,R \,.\, \sqrt{3}$.

V. TOEPASSING OP HET DODECAEDRUM. Fig. 230 en 235.

In het *Dodecaedrum* heeft het volgende plaats:

1°. De as MS (fig. 235.) van het *Dodecaedrum*, welke van het uiteinde eener ribbe, door het middelpunt, naar het uiteinde van de tegenovergestelde ribbe gaat, wordt uitgedrukt door $R.\sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}} = R \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$: derhalve

2°. De afstand van het middelpunt tot een' der hoeken door $\frac{1}{2}\,R.\sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}} = R \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$.

3°. De loodlijn CQ, uit het middelpunt op ieder der vlakken nedergelaten, wordt uitgedrukt door

$$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{R}{(\sqrt{5} - 1)} \times \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$

derhalve

4°. De hoogte van het *Dodecaedrum* door

$$R\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{2R}{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}.$$

5°. De loodlijn YS tusschen twee ribben wordt uitgedrukt door $R\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$.

6°. De hoek UYM welke eene ribbe maakt met het aangrenzend vlak is 121°. 43'. 2".

7°. De hoek YUS welke twee vlakken onderling maken is 116°. 33'. 54"; en deszelfs *sinus* is $\frac{2}{\sqrt{5}}$; deszelfs *cosinus* $- \frac{1}{\sqrt{5}}$; deszelfs *tangent* $- 2$.

BEWIJS. Indien men het *Dodecaedrum* van fig. 230. door een vlak snijdt, het welk langs de ribbe YM gaat, vervolgens door de loodlijn MR van den vijfhoek LMNOP, door de loodlijn RH van den daar aangrenzenden vijfhoek POIH*a*, dan door de

de ribbe HS die vlak over YM is, en dan weder door twee loodlijnen van vlakken tot dat men weder op Y komt, verkrijgt men den zeshoek YMRHSUY, in fig. 235. afzonderlijk afgebeeld, en waarin YM, en SH, ribben zijn van het *Dodecaedrum*, of zijden der vijfhoekige vlakken waaruit het bestaat, en MR, RH, SU, UY, loodlijnen in het vlak dier vijfhoeken uit den top op de overstaande zijden nedergelaten.

Indien men verder fig. 230. in de drie vijfhoeken, welke om den top M staan, de diagonalen YL, YN, NL trekt, maken dezelve eenen gelijkzijdigen driehoek YLN uit. De loodlijn MR snijdt de diagonaal LN in twee gelijke deelen in i; en de lijn Yi in het vlak van den driehoek YLN getrokken, is de loodlijn uit den top van een' gelijkzijdigen driehoek op de grondlijn derzelven neergelaten, en derhalve

1°. Yi (in fig. 235.) $= LN \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}}$.

Maar de diagonaal LN is bekend: want indien men ϱ voor den *radius* van den vijfhoek LMNOP neemt, is (VI. 22. Gev. 2.)

$$\overline{LN}^2 = 5\,\varrho^2 - \overline{MN}^2,\ \text{en uit VI. 22. Gev. 1. is}\ \varrho^2 = \frac{2\,\overline{MN}^2}{5-\sqrt{5}}:$$

$$\text{derhalve}\ \overline{LN}^2 = \frac{10\,\overline{MN}^2}{5-\sqrt{5}} - \overline{MN}^2 = R^2.\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)$$

$$= R^2.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) = R^2.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right);\ \text{derhalve is}$$

$$2°.\ LN = R.\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = R.\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}.$$

$$\text{Daar nu}\ Yi = LN\sqrt{\tfrac{3}{4}},\ \text{is}\ Yi = R.\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5}).3}{8}}:\ \text{d. i.}$$

$$3°.\ Yi = \tfrac{1}{2}R.\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}.$$

Maar de As, MS (fig. 235.) valt loodregt op Yi; en dus is YZ $= \tfrac{2}{3}Yi$ (Voorst. XXXI. Gev. 2 N°. 2.) derhalve

$$YZ = \tfrac{1}{3}R.\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}} = R.\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{18}}$$

$$= R.\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}} = R.\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})}{6.(3-\sqrt{5})}}$$

$$= R \sqrt{\frac{9-5}{6(3-\sqrt{5})}} = R \sqrt{\frac{2}{3(3-\sqrt{5})}}.$$

4°. YZ, of de afstand van den top Y in Δ LYN (fig. 230.) tot het middelpunt des driehoeks $= R \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$.

Verder (fig. 235.), $\overline{MZ}^2 = \overline{YM}^2 - \overline{YZ}^2 = R^2 - R^2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)$

$= R^2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$: d. i.

5°. MZ, de hoogte van de pyramide op den driehoek YLN (fig. 230) rustende, en waarvan M de top is $= R \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$

$= R \sqrt{\frac{2}{9+3\sqrt{5}}}$.

Maar Δ MYS (fig. 235.) is regthoekig (V, 7): derhalve (IV. 15) MZ : YM = YM : MS: en gevolgelijk

6°. $MS = \frac{R^2}{R \sqrt{\frac{2}{9+3\sqrt{5}}}} = R \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}$

$= R \sqrt{\frac{(9+3\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{2(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{R \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{5}-1}$

$= R \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$: en

7°. $YS = \sqrt{MS^2 - YM^2} = R \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$.

8°. CM = CY, afstand van het middelpunt tot M,

$= \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}} = R \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$.

De loodlijn CQ, uit het middelpunt C neergelaten op den vijfhoek, die een der vlakken is van het *dodecaedrum*, valt op het middelpunt van dien vijfhoek, en gevolgelijk op YU: zoo dat YX de *radius* is van dien vijfhoek, en gevolgelijk (VI. 22. Gev. 1.) is $YQ = R \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}$: waaruit volgt $\overline{CQ}^2 =$

$\overline{CY}^2 - \overline{YQ}^2 = \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right) - R^2 \left(\frac{2}{5-\sqrt{5}}\right)$

=

$$= R^2 \times \left(\frac{14 + 6\sqrt{5}}{8\,(5 - \sqrt{5})}\right) = \frac{R^2}{4} \times \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right).$$

$$= \frac{R^2}{4} \times \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}\right):$$ dat is

$$9^o.\ CQ = \frac{R}{2} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}.$$

$$= \frac{R}{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt{\frac{(25 + 11.\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} - 1)^2}{40}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$: en derhalve

$$10^o.\ QT = R \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{2R}{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}.$$

Daar MR de geheele loodlijn is uit den top des vijfhoeks op de overstaande zijde nedergelaten, is (door VI. 21. Aanm. 3. en VI. 22. Gev. 1.) $MR = \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} \times \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{4}\right)$

$$= R \times \sqrt{\frac{2\,(5 + \sqrt{5})^2}{16\,(5 - \sqrt{5})}} = R\sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{4\,(5 - \sqrt{5})}}$$

$$= R\sqrt{\frac{(15 + 5\sqrt{5}) \cdot (5 + \sqrt{5})}{4\,(5 - \sqrt{5}) \cdot (5 + \sqrt{5})}}$$: waaruit volgt

$$11^o.\ MR = UY = \frac{R}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Uit al het bovenstaande worden de hoeken gemakkelijk opgemaakt.

Want in $\triangle$ YSM is MS : YM = 1 : *sin.* YSM; derhalve

$$\textit{sin.} \angle YSM = \frac{YM}{MS} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{9 + 3\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} = \textit{cos.} \angle YMS;$$

zoo dat $\angle YSM =$ 20°. 54'. 18".
en $\angle YMS = \angle HYM =$ 69. 5. 42.

Maar in $\triangle CQY$ is $CY : CQ = 1 : \mathit{fin.}\ \angle QYC$ en $\mathit{fin.}\ \angle QYC$

$$= \frac{CQ}{CY}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{\frac{10(9+3\sqrt{5})}{2}}} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{15(3+\sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})}{15(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$$: zoo dat

$\angle QYC$ = 52°. 47'. 20".
daar bij $\angle HYM$ = 69. 5. 42.
komt $\angle UYM$ = 121°. 43'. 2".

In $\triangle UYF$ is $UY : YF\ (= \tfrac{1}{2} YS) = 1 : \mathit{fin.}\ \angle YUF$ $(= \tfrac{1}{2}\angle YUS)$

derhalve $\mathit{fin.}\ \tfrac{1}{2}\angle YUS = \dfrac{\frac{1}{2} YS}{YU} = \dfrac{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$

$$= \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}}.$$

en $\mathit{cof.}\ \tfrac{1}{2}\angle YUS = \sqrt{1-\dfrac{(7+3\sqrt{5})}{10+4\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}}$

en $\mathit{fin.}\ \angle YUS = 2\ \mathit{fin.}\ \tfrac{1}{2}\angle YUS \times \mathit{cof.}\ \tfrac{1}{2}\angle YUS =$

$$2\sqrt{\frac{(7+3\sqrt{5})\ (3+\sqrt{5})}{(10+4\sqrt{5})^2}} = 2\sqrt{\frac{36+16\sqrt{5}}{180+80\sqrt{5}}} =$$

$$2\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{45+20\sqrt{5}}} = 2\sqrt{\frac{(9+4\sqrt{5})\ (45-20\sqrt{5})}{(45+20\sqrt{5})\ (45-20\sqrt{5})}}$$

$= 2\sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$: gevolgelijk $\angle YUS$ = 116°. 33'. 54".

De *cosinus* is $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$: en de tangent $-$ 2.

AANMERKING. Men hadt $\angle YUS$ veel korter kunnen vinden; want $\angle UYM$ = 121°. 43'. 2".
af $\angle SYM$ = 90.
blijft $\angle UYS$ 31°. 43'. 2".
$\angle USY = \angle UYS$ 31°. 43'. 2".
63°. 26'. 4".
fupplement $= \angle YUS =$ 116°. 33'. 56".

 Maar

Maar wij hebben willen doen zien hoe men den *ſinus* en den *coſinus* diens hoeks, tot eene zeer eenvoudige uitdrukking herleidt, dezelfde als LE GENDRE op eene geheel andere wijze gevonden heeft.

XXXIV. VOORSTEL.

De inhoud van een regelmatig ligchaam wordt uitgedrukt door deszelfs oppervlakte, gemultipliceerd door het derde gedeelte van de loodlijn uit het middelpunt op een der vlakken neergelaten: of, wat op het zelfde uitkomt, is gelijk aan een *parallelepipedum*, waarvan het grondvlak gelijk is aan de oppervlakte des ligchaams, en de hoogte het derde gedeelte is van de loodlijn, uit het middelpunt op een der vlakken van het ligchaam neergelaten.

L. G. VII. *Appendix*, *prop.* 3. *Schol.* 2.

BEWIJS. Uit Voorſtel XXX.

AANMERKING. LE GENDRE ſtelt in de plaats van de loodlijn uit het middelpunt op een der vlakken nedergelaten, den *radius* van den ingeſchreven kloot; het geen op het zelfde uitkomt.

XXXV. VOORSTEL.

De inhoud van een *tetraedum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum* van de zelfde hoogte en wiens grondvlak gelijk is aan het derde gedeelte van het driehoekig grondvlak des *tetraedrums*.

De inhoud van een *octaedrum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum* wiens hoogte de as is van het *octaedrum*, en wiens grondvlak een derde gedeelte is van het vierkant op de ribbe van het *octaedrum* beſchreven.

De inhoud van een *icoſaedrum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum*, waarvan de hoogte het derde gedeelte is van de loodlijn tusſchen twee tegenoverſtaande evenwijdige zijden van het *icoſaedrum* begrepen, of van de hoogte van het *icoſaedrum*, en het grondvlak het tienvoud van een der driehoeken die het *icoſaedrum* uitmaken.

De inhoud van het *dodecaedrum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum* waarvan de hoogte de hoogte is van het *dodecaedrum*, en het grondvlak het dubbeld van een der vijfhoeken die het *dodecaedrum* uitmaken.

BEWIJS. Voor het *tetraedrum*, dat eigenlijk eene volmaakt regelmatige *pyramide* is, en voor het *octaedrum* dat eene dubbelde regelmatige vierkante *pyramide* is, uit Voorſtel XXVI. Voor het *icoſaedrum* en het *dodecaedrum* uit Voorſtel XXX, door het welk men het *icoſaedrum* beſchouwt als uit 20 driehoekige, en het *dodecaedrum* als uit 12 vijfhoekige *pyramiden* beſtaande, wier hoogte is de halve hoogte van het *icoſaedrum* of van het *dodecaedrum*.

I. AANMERKING. Ingevolge van het voorgaande, kan men de oppervlakte en den inhoud van ieder der vijf regelmatige ligchamen gemakkelijk uitdrukken; den *cubus* van de ribbe, in iedere dezer figuren, welke ribbe wij door R uitdrukken, ten grondslag nemende: en verder de inhouden van den *cubus*, van het *tetraedrum*, het *octaedrum*, het *icosaedrum*, en het *dodecaedrum*, respectivelijk door C, T, O, I, en D uitdrukkende: het geen het onderwerp maakt dezer vijf gevolgen.

I. GEVOLG.

De CUBUS.

De oppervlakte van een *cubus* is $6 R^2$: en deszelfs inhoud, of C, $= R^3$.

II. GEVOLG.

Het TETRAEDRUM. Fig. 223, 224.

1°. De oppervlakte is $R^2 . \sqrt{3}$.

2°. De inhoud is, $T = R^3 . \frac{\sqrt{2}}{12} = R^3 \times \frac{1}{6\sqrt{2}}$.

BEWIJS. Immers: de oppervlakte is $4 \Delta AVB = 4 AV \times \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{3}{4}) AV^2} = AV^2 \times \sqrt{3}$. De inhoud is (Voorst. XXXI.) $= \frac{\Delta AVB}{3} \times$ hoogte $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AV \times \sqrt{\frac{3}{4} AV^2} \times VE =$ (Voorst. XXXIII. N°. 1.) $= \frac{1}{12} AV^2 \times \sqrt{3} \times AV \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} AV^3 \times \sqrt{2}$: waaruit het Voorstel volgt.

III. GEVOLG.

Het OCTAEDRUM. Fig. 226.

1°. *De oppervlakte* van het *octaedrum* is $2 R^2 \sqrt{3}$.

2°. *De inhoud is*, $O = \frac{1}{3} R^3 \sqrt{2} = R^3 \times \frac{1}{3} \sqrt{2}$.

BEWIJS. *De inhoud* van het vierkant op AB, is $\overline{AB}^2$; de as is $AB \sqrt{2}$.

Derhalve de inhoud $O = \frac{1}{3} \overline{AB}^2 \times AB \sqrt{2} = \frac{1}{3} \overline{AB}^3 \sqrt{2}$.

De oppervlakte van het driehoekig vlak ABV is $\frac{1}{4} \overline{AB}^2 . \sqrt{3}$: gevolgelijk de oppervlakte van het geheel ligchaam $= \frac{8}{4} \overline{AB}^2 \sqrt{3} = 2 R^2 . \sqrt{3}$.

IV. GEVOLG.

Het ICOSAEDRUM. Fig. 228, 234.

1°. De oppervlakte van het *icosaedrum* wordt uitgedrukt door $5 . R^2 . \sqrt{3}$.

2°. De inhoud (I) door $R^3 \times \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5})$.

BEWIJS. De oppervlakte van het driehoekig vlak wordt uitgedrukt door $\frac{1}{4} \overline{BI}^2 . \sqrt{3}$; dus de geheele oppervlakte door $\frac{20}{4} \overline{BI}^2 \times \sqrt{3} = 5 \overline{BI}^2 . \sqrt{3} = 5 R^2 . \sqrt{3}$.

De halve hoogte is $\frac{R}{2} . \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$ (Voorst. XXXIII. N°. III)

Gevolgelijk de inhoud $I = \frac{1}{3} \times 5 R^2 . \sqrt{3} . \times \frac{R}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$

$$= \frac{5 R^3}{6} \sqrt{\frac{3 (7 + 3\sqrt{5})}{6}} = \frac{5}{6} R^3 \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{5 R^3}{6} \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt{5}}{2}} = \frac{5 R^3}{6} . \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{5 R^3}{12} . (3 + \sqrt{5}).$$

II. AANMERKING. De oppervlakte van het *icosaedrum* is $= 20 \times \triangle HGI = 60 \triangle HTI = 60 \times HI \times \frac{1}{2} TX = 30 HI \times TX$: gelijk aan den regthoek begrepen onder dertigmalen HI en de loodlijn TX: het geen voorkomt bij EUCLIDES in XIV. 8.

V. GEVOLG.

Voor het DODECAEDRUM. Fig. 230, 235.

De oppervlakte van het *dodecaedrum* wordt uitgedrukt door $15 . R^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = R^2 \times 5 \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{3 (5 + 2\sqrt{5})}{5}}$ en deszelfs inhoud $D = R^3 \times \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right)$.

BEWIJS. Men moet eerst den inhoud van den vijfhoek, grondvlak des *Dodecaedrums* bepalen.

Deze is 5 YM × ½ loodlijn: maar die loodlijn is

$\frac{YM}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ (Voorstel XXXIII. N°. V. 3°.)

Gevolgelijk is 1°. de vijfhoek $= \frac{5}{4}\,\overline{YM}^2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

$= \frac{\overline{YM}^2}{4} \times \sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

En derhalve 2°. de oppervlakte $= \frac{5 \times 12}{4}\,\overline{YM}^2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

$= 15\,\overline{YM}^2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = 3\,\overline{YM}^2 \times \sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

De halve hoogte van het *Dodecaedrum* is (Voorst. XXXIII. N°. V. 4°.)

$CQ = \frac{YM}{\sqrt{5}-1} \times \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$: gevolgelijk geeft het derde gedeelte der oppervlakte van den vijfhoek, door twaalf malen de halve hoogte gemultipliceerd, den inhoud der twaalf *pyramiden* die (Voorst. XXXIV.) het *Dodecaedrum* uitmaken: en dus

$3^{\circ}. D = \frac{5}{12}\,\overline{YM}^2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{12\,YM}{\sqrt{5}-1} \times \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{5}}$

$= \frac{5\,YM^3}{\sqrt{5}-1} \times \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right) \times \left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)} =$

$= \frac{5\,YM^3}{\sqrt{5}-1} \times \sqrt{\frac{20+9\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}} =$

$= \overline{YM}^3 \times \sqrt{\frac{(20+9\sqrt{5})\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}} = \overline{YM}^3 \times \sqrt{\frac{20\sqrt{5}+45}{6-2\sqrt{5}}}$

$= \overline{YM}^3 \times \sqrt{\frac{(20\sqrt{5}+45)\times(6+2\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{5})\times(6+2\sqrt{5})}}$

$= \overline{YM}^3 \times \sqrt{\frac{210\sqrt{5}+470}{16}} = R^3 \times \left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\right)$.

III. AANMERKING. De oppervlakte des *dodecaedrums* is ge-

lijk aan de twaalf vijfhoeken die deszelfs vlakken uitmaken: 12×5 YM $\times \frac{1}{2}$ loodlijn $=$ 30 YM $\times$ loodlijn: of, is gelijk aan den regthoek begrepen onder 30 malen de ribbe en de loodlijn: het geen bij EUCLIDES is XIV. 3.

VI. GEVOLG.

Indien de ribben waaruit de vijf regelmatige ligchamen bestaan even groot zijn, zal de volgende verhouding tusschen derzelver oppervlakte plaats hebben.

Oppervlakte van den *cubus* $6 \cdot R^2 = R^2 \sqrt{3} \times \sqrt{12}$.

——— — het *tetraedrum* $= R^2 \sqrt{3}$.

——— — — *octaedrum* $= R^2 \sqrt{3} \times 2$.

——— — — *icosaedrum* $= R^2 \sqrt{3} \times 5$.

——— — — *dodecaedrum* $= R^2 \sqrt{3} \times 5 \sqrt{\frac{3(5 + 2\sqrt{5})}{5}}$.

VII. GEVOLG.

Indien in de vijf regelmatige ligchamen de ribben even groot zijn, zullen de inhouden dier ligchamen staan in de volgende rede:

Cubus . . . . $= R^3$

Tetraedrum $R^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}$. $= R^3 \times 0.11785$

Octaedrum $R^3 \times \frac{4\sqrt{2}}{12}$. $= R^3 \times 0.47140$

Icosaedrum $R^3 \times \left(\frac{15 + 5\sqrt{5}}{12}\right) = R^3 \times 2.18169$

Dodecaedrum $R^3 \times \left(\frac{45 + 21\sqrt{5}}{12}\right) = R^3 \times 7.66312$

Zoo dat het *octaedrum* het viervoud is van het *tetraedum*; en het *dodecaedrum* het drievoud van het *icosaedrum* overtreft met $\frac{R^3 \times \sqrt{5}}{2}$.

VIII. GEVOLG.

Indien de vijf regelmatige ligchamen gelijke inhouden hebben,

ben., zullen dezelve ribben tot elkander staan in de volgende rede:

Ribbe van den *cubus* tot die van het *tetraedrum*, van het *octaedrum*, van het *icosaedrum*, van het *dodecaedrum*, respectivelijk als
1 : 2.0396 : 1.2849 : 0.7710 : 0.5052.

Ribbe van het *tetraedrum* tot die van den *cubus*, van het *octaedrum*, van het *icosaedrum*, van het *dodecaedrum*, als
1 : 0.4903 : 0.6300 : 0.3780 : 0.2477.

Ribbe van het *octaedrum* tot die van den *cubus*, van het *tetraedrum*, van het *icosaedrum*, van het *dodecaedrum*, als
1 : 0.7786 : 1.5874 : 0.6014 : 0.3932.

Ribbe van het *icosaedrum* tot die van den *cubus*, van het *tetraedrum*, van het *octaedrum*, van het *dodecaedrum*, als
1 : 1.2979 : 2.6452 : 1.6664 : 0.6554.

Ribbe van het *dodecaedrum* tot die van den *cubus*, van het *tetraedum*, van het *octaedrum*, van het *icosaedrum*, als
1 : 1.9793 : 4.0370 : 2.5432 : 1.5262.

BEWIJS. Stellende voor de ribben (R . *c*), (R . *t*), (R . *o*), (R . *i*), (R . *d*) is door het 7. Gevolg: *cubus* tot *tetraedrum* $=$ $(R\,.\,c)^3 : (R\,.\,t)^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}$: en derhalve uit de onderstelling, $(R\,.\,c)^3 = (R\,.\,t)^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}$: of $(R\,.\,c)^3 : (R\,.\,t)^3 = 1 : \frac{12}{\sqrt{2}}$ en $(R\,.\,c) : (R\,.\,t) = \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} = 1 : 2.0396$. Insgelijks $(R\,.\,c) : (R\,.\,o) = 1 : \sqrt[3]{\frac{12}{4\,.\,\sqrt{2}}} = 1 : 1.2849$ en zóo voorts voor de overige gevallen.

IV. AANMERKING. Men vindt op sommige *proportionaal passers* van vroegeren tijd eene lijn, welke tot opschrift voert *reductio corporum regularium*. d. i. *herleiding der regelmatige ligchamen*, te weten tot de zelfde grootte: de lijnen derhalve, die zich van het middelpunt des proportionaal-passers op ieder blad uitstrekken tot *dodecaedrum*, *icosaedrum*, *cubus*, *octaedrum*, *tetraedrum*, staan in de zelfde rede als de ribben dier ligchamen staan moeten, op dat deze gelijken inhouden hebben.

Indien men dan bijv. de ribbe kent van een' *cubus*, neemt men derzelver grootte met een' gewonen passer, en opent

 den

den proportionaal-pasfer tot dat de beide punten des pasfers, welke de ribbe van den gemelden *cubus* bevatten, op die lijn ftaan van *cubus* tot *cubus*: dan zullen de afftanden van *dodecaedrum* tot *dodecaedrum*, van *icofaedrum* tot *icofaedrum*, enz. de grootte aanduiden der ribben van die ligchamen, als derzelver inhoud gelijk zal zijn aan die van den gegeven *cubus*.

Tusfchen den *cubus* en het *octaedrum* ftaat op die zelfde lijn de *kloot*: die afftand duidt de middellijn aan welke een kloot hebben moet om gelijken inhoud te bezitten als de vijf regelmatige ligchamen, wier ribben op de lijnen aangeteekend ftaan. Zie over de bepaling van dien afftand, XII. 18. Aanm.

XXXVI. VOORSTEL.

Alle de regelmatige ligchamen van de zelfde foort, of de zelfde benaming, gelijk mede alle de gelijkvormige ligchamen, ftaan tot elkander in de driedubbelde rede der ribben uit welke zij gevormd zijn; en hunne oppervlakten ftaan in de verdubbelde rede der zelfde ribbe.

BEWIJS. Uit het XXXIV. Voorftel en Voorftel XXXI. Gev. 7.: en IV. 27. of uit Voorftel XXXV. Gev. 6 en 7.

AANMERKING. Hierop fteunt, op fommige *proportionaal-pasfers*, de lijn die met het woord *cubic* of *folides*, beftempeld is. Er is, als naar gewoonte, eene dier lijnen op ieder blad des pasfers: zij zijn in ongelijke deelen verdeeld, welke deelen de rede van de derde magten volgen. Bijv. men neme van het middelpunt af den afftand 2: dan valt het dubbeld van dien op 8: om dat 8 de derde magt is van 2. Men neme de lijn 5: derzelver dubbeld valt op 40: d. i. op 8 malen 5, om dat 8 de *cubus* is van 2: insgelijks het dubbeld van 7 valt op 8 × 7 of 56. Die lijn *cubic* dient dan om de zijden te vinden van een ligchaam dat een bepaald gedeelte of een bepaald veelvoud (ftel het *m*voud) moet zijn van een gegeven ligchaam, en tevens daar aan gelijkvormig. Immers de zijde *a* van het ligchaam A zal ftaan tot *b*, zijde van het gezochte ligchaam B, zoo als $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{m}$. Indien men eenen *cubus* maken moet die het dubbeld zij van een' anderen: men ftelle de zijde van den gegeven *cubus* van 1 tot 1 op de beide lijnen *cubic*; de afftand van 2 tot 2, zal de zijde des gezochten

ten *cubus* zijn. Zie een ander gebruik dier lijn, te weten om twee middel-evenredigen te vinden, in het III. Boek der Werkstukken: Werkstuk IX. Oplossing 6.

XXXVII. VOORSTEL.

Van gelijkvormige regelmatige ligchamen, hebben kleinere meerder oppervlakte met betrekking tot derzelver inhoud dan de grootere: en wel in omgekeerde rede van derzelver ribben.

BEWIJS. Uit Voorstel XXXVI.

IV. AFDEELING.

OVER DE BESCHRIJVING DER REGELMATIGE LIGCHAMEN IN ELKANDER.

XIX. BEPALING.

Eene ligchamelijke figuur wordt gezegd in eene andere ligchamelijke figuur beschreven te zijn, als alle derzelver hoeken, of op de hoeken, of op de ribben, of op de vlakken van die laatstgemelde figuur rusten.

EUCL. XI. Bep. 31. in sommige uitgaven van het werk van dien Schrijver

AANMERKING. Wanneer alle de hoeken van de eene Figuur, of op *alle* de zijden, of op *alle* de ribben, of op alle de hoeken, van de andere Figuur rusten, wordt de eerstgemelde gezegd *volmaaktelijk* in de laatstgemelde beschreven te zijn: doch wanneer *alle* de hoeken van de eerste slechts, of op *eenige* zijden, of op *eenige*-ribben, of in *eenige* hoeken der laatstgemelde rusten, is de inschrijving onvolmaakt. Zie verder XXXVIII. Voorstel, Gev. 2.

XX. BEPALING.

Eene ligchamelijke figuur wordt gezegd om eene andere figuur beschreven te zijn, wanneer hare zijden, ribben, of hoeken, de hoeken van de laatstgemelde figuur raken.

EUCL. XI. Bep. 32.

XXXVIII. VOORSTEL.

Geen ligchamelijke figuur kan in eene andere beschreven worden, ten zij het getal of van ribben, of van zijden, of

van hoeken in de laatstgemelde, ten minsten even groot zij als het getal der hoeken in de eerstgemelde.

BEWIJS. Uit de XIX. Bepaling.

I. GEVOLG.

Dus kunnen noch de *cubus*, noch het *icosaedrum*, noch het *dodecaedrum*, in een *tetraedum* beschreven worden: noch het *dodecaedrum* in het *octaedrum*, of in den *cubus*.

II. GEVOLG.

De overige ligchamen kunnen in elkander beschreven worden, doch niet alle volmaaktelijk: *volmaaktelijk* noemt men het, wanneer alle de hoeken, van de ingeschreven figuur alle de zijden, of ribben, of hoeken, van de andere raken: *minder volmaaktelijk*, wanneer eenige van de ribben der laatstgemelde niet geraakt worden, om dat zij meerder in getal zijn.

I, AANMERKING. In het vijftiende Boek der Grondbeginsels van EUCLIDES, doch het welk, even als het XIV, hoogstwaarschijnlijk, om niet te zeggen zeker, niet van EUCLIDES zelven, maar van HYPSICLES den *Alexandryner* is, wordt alleen over de *volmaakte* inschrijving gehandeld, en te regt: deze alleen kan dien naam waarlijk dragen, en voldoet aan de bepaling. Een der uitgeveren van EUCLIDES, FOIX DE CANDALLE, heeft aan het einde van het XV. Boek, te beginnen namelijk met het VI. Voorstel, en het VI. en VII. van den Schrijver weglatende, eenige Voorstellen gevoegd over die inschrijving, welke wij *onvolmaakte* noemen, en ook over eene andere soort van inschrijving welke enkel hierin bestaat, dat een ligchaam in een ander ligchaam bevat, of ingesloten, is, zonder dat echter alle deszelfs hoeken, maar slechts eenige, de zijden of ribben van het andere raken; of ook zoodanig, dat eenige zijden van het eene geheel op de zijden van het andere liggen: hij heeft insgelijks bij de XV. Boeken een XVI. Boek over de onderlinge in- en omschrijving van de regelmatige Figuren gevoegd: CLAVIUS heeft dit alles overgenomen, gelijk mede VOOGHT. Doch hierin zullen wij ons niet inlaten: en slechts met een enkel woord de volmaakte omschrijving aanstippen.

III. GEVOLG.

Een *tetraedrum* is in den *cubus* beschreven, wanneer de zes ribben van het zelve de zes vlakken van den *cubus* raken, en dus langs derzelver diagonalen liggen: waaruit volgt, dat de hoeken van het *tetraedrum* met hunne toppen die van den *cubus* raken, en in die hoeken begrepen zijn.

EUCL. XV. 1.

IV. GEVOLG.

Een *octaedrum* kan beschreven worden in een *tetraedrum*, en in een' *cubus*.

In

In een *tetraedrum*, mits de zes hoeken ieder op eene der ribben van het *tetraedrum* staan, en wel op het midden dier ribben.

EUCL. XV. 2.

In een' *cubus*, mits de zes hoeken de zes vlakken van den *cubus* raken, en wel in het middelpunt dier vlakken, dat is in het stip daar de beide diagonalen zich snijden.

EUCL. XV. 3.

V. GEVOLG.

Een *cubus* kan beschreven worden in een *octaedrum* en in een *dodecaedrum*.

In een *octaedrum*, wanneer de acht hoeken van den *cubus* ieder op eene der vlakken van het *octaedrum* rusten; en dat wel in het middelpunt van die vlakken; dat is (IV. 14. Gev. 3.) op de twee derde gedeelten van de lijn, welke uit den top van iederen hoek, in de driehoekige vlakken, loodregt op de tegenoverstaande zijde van dien driehoek staat.

EUCL. XV. 4.

In een *dodecaedrum*: Indien men namelijk in de vier vijfhoeken die om (Fig. 230.) de ribben ML, LP, LX en XW liggen, de diagonalen MP, MB, BW, WP trekt, heeft men een vierkant het welk zich met vijf vierkanten op gelijke wijze beschreven veréénigt, en den *cubus* maakt; wiens acht hoeken dus in acht hoeken van het *dodecaedrum* staan: en de vier lijnen, die de asfen zijn van den *cubus*, zijn tevens asfen van het *dodecaedrum*.

II. AANMERKING. Een gedeelte van de bewerking van EUCLIDES XII. 17. kan hiertoe gebragt worden.

III. AANMERKING. Het blijkt uit Fig. 218, dat de As, of diagonaal van den *cubus*, is $BG = \sqrt{\overline{DG}^2 + \overline{DB}^2} = \sqrt{3\,\overline{DG}^2}$ $= DG\sqrt{3}$: ook zal hier Fig 230. de as van den *cubus*, daar MP de zijde is, zijn $MP \,.\, \sqrt{3}$.

Maar (Voorst. XXXIII. V. 2°.) $MP = LM \times \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}$ $= LM \times \sqrt{\frac{4}{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{2\,LM}{\sqrt{5}-1}$ en derhalve de as van den *cubus* $= LM \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(5-1)}}$; het geen juist is de uitdrukking voor de as van het *dodecaedrum*. (Zie Voorst. XXXIII. N°. V. 1°.).

VI. GEVOLG.

Een *dodecaedrum* kan in een *icosaedrum* beschreven worden, indien de hoeken van het *dodecaedrum* ieder op een vlak van het *icosaedrum*

Maar wij hebben willen doen zien hoe men den *sinus* en den *cosinus* diens hoeks, tot eene zeer eenvoudige uitdrukking herleidt, dezelfde als LE GENDRE op eene geheel andere wijze gevonden heeft.

XXXIV. VOORSTEL.

De inhoud van een regelmatig ligchaam wordt uitgedrukt door deszelfs oppervlakte, gemultipliceerd door het derde gedeelte van de loodlijn uit het middelpunt op een der vlakken neergelaten: of, wat op het zelfde uitkomt, is gelijk aan een *parallelepipedum*, waarvan het grondvlak gelijk is aan de oppervlakte des ligchaams, en de hoogte het derde gedeelte is van de loodlijn, uit het middelpunt op een der vlakken van het ligchaam neergelaten.

L. G. VII. *Appendix*, *prop.* 8. *Schol.* 2.

BEWIJS. Uit Voorstel XXX.

AANMERKING. LE GENDRE stelt in de plaats van de loodlijn uit het middelpunt op een der vlakken nedergelaten, den *radius* van den ingeschreven kloot; het geen op het zelfde uitkomt.

XXXV. VOORSTEL.

De inhoud van een *tetraedum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum* van de zelfde hoogte en wiens grondvlak gelijk is aan het derde gedeelte van het driehoekig grondvlak des *tetraedrums*.

De inhoud van een *octaedrum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum* wiens hoogte de as is van het *octaedrum*, en wiens grondvlak een derde gedeelte is van het vierkant op de ribbe van het *octaedrum* beschreven.

De inhoud van een *icosaedrum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum*, waarvan de hoogte het derde gedeelte is van de loodlijn tusschen twee tegenoverstaande evenwijdige zijden van het *icosaedrum* begrepen, of van de hoogte van het *icosaedrum*, en het grondvlak het tienvoud van een der driehoeken, die het *icosaedrum* uitmaken.

De inhoud van het *dodecaedrum* is gelijk aan een regthoekig *parallelepipedum* waarvan de hoogte de hoogte is van het *dodecaedrum*, en het grondvlak het dubbeld van een der vijfhoeken die het *dodecaedrum* uitmaken.

BEWIJS. Voor het *tetraedrum*, dat eigenlijk eene volmaakt regelmatige *pyramide* is, en voor het *octaedrum* dat eene dubbelde regelmatige vierkante *pyramide* is, uit Voorstel XXVI. Voor het *icosaedrum* en het *dodecaedrum* uit Voorstel XXX, door hetwelk men het *icosaedrum* beschouwt als uit 20 driehoekige, en het *dodecaedrum* als uit 12 vijfhoekige *pyramiden* bestaande, wier hoogte is de halve hoogte van het *icosaedrum* of van het *dodecaedrum*.

I. AANMERKING. Ingevolge van het voorgaande, kan men de oppervlakte en den inhoud van ieder der vijf regelmatige ligchamen gemakkelijk uitdrukken; den cubus van de ribbe, in iedere dezer figuren, welke ribbe wij door R uitdrukken, ten grondslag nemende: en verder de inhouden van den *cubus*, van het *tetraedrum*, het *octaedrum*, het *icosaedrum*, en het *dodecaedrum*, respectivelijk door C, T, O, I, en D uitdrukkende: het geen het onderwerp maakt dezer vijf gevolgen.

I. GEVOLG.

De CUBUS.

De oppervlakte van een *cubus* is $6 \cdot R^2$: en deszelfs inhoud, of $C = R^3$.

II. GEVOLG.

Het TETRAEDRUM. Fig. 225, 224.

1°. De oppervlakte is $R^2 \cdot \sqrt{3}$.

2°. De inhoud is, $T = R^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = R^3 \times \frac{1}{6\sqrt{2}}$.

BEWIJS. Immers: de oppervlakte is $4 \triangle AVB = 4\, AV \times \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{3}{4})\, AV^2} = AV^2 \times \sqrt{3}$. De inhoud is (Voorst. XXXI.) $= \frac{\triangle AVB}{3} \times \text{hoogte} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AV \times \sqrt{\frac{3}{4} AV^2} \times VE =$ (Voorst. XXXIII. N°. 1.) $= \frac{1}{12} AV^2 \times \sqrt{3} \times AV \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} AV^3 \times \sqrt{2}$: waaruit het Voorstel volgt.

III. GEVOLG.

Het OCTAEDRUM. Fig. 226.

1°. De oppervlakte van het *octaedrum* is $2\, R^2 \sqrt{3}$.

2°. De inhoud is, $O = \frac{1}{3} R^3 \sqrt{2} = R^3 \times \frac{1}{3} \sqrt{2}$.

BEWIJS. De inhoud van het vierkant op AB, is $\overline{AB}^2$; de as is $AB \sqrt{2}$.

Derhalve de inhoud $O = \frac{1}{3} \overline{AB}^2 \times AB \sqrt{2} = \frac{1}{3} \overline{AB}^3 \sqrt{2}$.

De oppervlakte van het driehoekig vlak ABV is $\frac{1}{4} \overline{AB}^2 \cdot \sqrt{3}$: gevolgelijk de oppervlakte van het geheel ligchaam $= \frac{8}{4} \overline{AB}^2 \sqrt{3} = 2\, R^2 \cdot \sqrt{3}$.

TWAALFDE BOEK.

OVER DE LIGCHAMELIJKE FIGUREN DIE DOOR KROMME OPPERVLAKTEN BEPAALD ZIJN.

De ligchamen, of ligchamelijke figuren, worden, gelijk in de eerste bepaling van het XI. Boek, en de Aanmerking daar op, gezegd is, of door *vlakke*, of door *kromme oppervlakten*, bepaald. Over de eerste soort is in het XI. Boek gehandeld. Van de menigvuldige ligchamen die tot de tweede soort gebragt kunnen worden, zijn er maar drie welke tot de *elementaire* Meetkunde behooren, te weten, de *cylinder*, of rol; de kegel; en de kloot, of bol, of *sphaer*. De ronde, en bolle oppervlakten van deze drie ligchamen zijn haren oorsprong aan den cirkel, of aan den cirkel en regte lijn te samen verschuldigd, de twee eenige lijnen welke, naar den strikften zin door de Ouden aan dat woord gegeven, onderwerpen zijn van de *elementaire Géometrie*. Wij zullen ons dan in dit Boek alleen tot deze drie soorten van ronde ligchamen bepalen.

I. AFDEELING.

OVER DEN CIJLINDER, OF ROL.

I. BEPALING. Fig. 237.

Indien men onderstelt dat, wanneer twee gelijke cirkels [A G B en C H D] in twee verschillende, doch evenwijdige vlakken geplaatst, en derzelver middelpunten [E en F] door eeene regte lijn [E F] vereenigd zijn, er zich eene regte lijn rondom de omtrekken van die cirkels, altijd evenwijdig aan zich zelve en aan de lijn [E F] die de middelpunten vereenigt, bewege, en door die beweging eene bolle oppervlakte beschrijve: zal het ligchaam [ACHDBGA] dat door die beweging gevormd, en door de gegeven cir-

cirkels besloten wordt, een *Cylinder*, of Rol, zijn. De cirkels die den zelven onder en boven besluiten, worden de *grondvlakken* genoemd. — De *cylinder*, of rol, zal regt op het grondvlak staan, indien de lijn, welke de middelpunten der gegeven cirkels veréénigt, en die men de *as* van den rol noemt, regthoekig op die cirkels staat: zoo niet, staat de *cylinder*, of rol, scheef op het grondvlak, zoo als CHD*bga*.

EUCL. XI. def. 21, 22, 23. — St. X. B p. 1. — L. G. VIII. Bep. 1.

I. AANMERKING. Men kan dus den regten *cylinder* ook begrijpen als geboren te zijn door de omwenteling van een regthoek GEFH, om eene zijner zijden EF, als op eene spil, of as: dan zal de andere opstaande zijde GH den omtrek van den *cylinder*, en de twee overige HF, GE zullen de cirkels beschrijven. Deze is de Bepaling door EUCLIDES gegeven, waarin LE GENDRE hem gevolgd heeft: doch dezelve sluit de scheve *cylinders* uit.

II. AANMERKING. Anderen beschouwen den *cylinder* als geboren uit de evenwijdige beweging van eenen cirkel langs eene gegeven lijn: bijv. van den cirkel CHD langs de lijn CA of langs de lijn C*a*.

In dien zin zoude men den *cylinder* kunnen beschouwen als bestaande uit een aantal cirkels, gelijk aan het grondvlak, of den grondcirkel, en op het zelve opgehoopt.

I. GEVOLG.

Indien men den *cylinder* door vlakken [LMNO] snijdt welke evenwijdig aan het grondvlak zijn, zullen die sneden cirkels zijn. Indien de snede [GIKH] door de middelpunten [E en F] van de grondvlakken gaat, of [gelijk APQC] evenwijdig is aan een vlak dat door die punten gaat, is zij een parallelogram; en wel een regthoek voor den regten *cylinder*.

Die parallelogrammen hebben alle de zelfde hoogte, t. w. die van den *cylinder*, en staan dus tot elkander als hunne grondlijnen [CQ. HK], dat is, als de choorden der bogen [CQ en HCQK] welke zij van de grondvlakken afsnijden.

III. AANMERKING. De schuinsche sneden van den *cylinder* behooren niet tot de grondbeginsels der Meetkunde, wanneer men deze wetenschap in den striksten zin volgens de gewoonte der Ouden, neemt: zij doen, op den bollen omtrek

van

van den *cylinder*, eene kromme lijn ontstaan die men *Ellips* noemt, en tot de *kegelsneden* behoort.

II. GEVOLG. Fig. 240.

Indien F B D L een cirkel is evenwijdig aan het grondvlak van den *cylinder*, zal de raaklijn G E die dezen cirkel in L raakt, ook eene raaklijn van den *cylinder* in dat zelfde stip zijn: en indien men op de oppervlakte [Fig. 237.] de lijn A C evenwijdig met den as E F trekt, zal die lijn geheel in de oppervlakte van den *cylinder* liggen.

III. GEVOLG. Fig. 237.

Indien een vlak den *cylinder* zoodanig raakt, dat eenige lijn A C van het zelve evenwijdig zij met de as van den *cylinder*, en geheel op de oppervlakte van dezen ligge, (II. Gev.) en dat alle de lijnen, die in het vlak op de lijn A C loodregt getrokken worden, tevens raaklijnen zijn van cirkels in den *cylinder*, die evenwijdig en gelijk zijn aan deszelfs grondvlak, zal dat vlak den *cylinder* in die lijn alleen raken, en nimmer snijden.

II. BEPALING.

Gelijkvormige *cylinders* zijn die, waarvan de assen in de zelfde rede staan als de middellijnen der grondvlakken, en gelijke hoeken met die grondvlakken maken.

EUCL. XI. def. 24. — L. G. VIII. def. 4.

AANMERKING. Deze Bepaling is een gevolg van de zesde Bepaling van ons XI. Boek. Om ze op den zelfden leest te schoeijen zoude men moeten zeggen: „ gelijkvormige *cy*„ *linders* zijn die welke gelijkvormige grondvlakken en gelijk„ vormige *cylindrische* oppervlakten hebben " Maar de grondvlakken zijn cirkels; deze nu zijn altijd gelijkvormig, en hunne omtrekken staan in de zelfde rede als hunne middellijnen (VII. 10 en Gev. 1); en wij zullen in het IV. Voorstel van dit Boek bewijzen, dat de *cylindrische* oppervlakten altijd tot elkander staan als de regthoeken waarvan de grondlijnen de omtrek van den cirkel, en de hoogten zoo als de assen zijn: waaruit dan de gelijkvormigheid van verschillende *cylinders*, tot die van de gemelde regthoeken gebragt wordt: en dus tot de gelijkheid der rede van den as tot de middellijn des cirkels: waaruit deze verkorte bepaling haren oorsprong ontleent.

Indien de *cylinders* regt, en tevens gelijkvormig zijn, zijn de regthoeken waar door zij gevormd worden, gelijkvormig.

St. X. Bep. 6.

III. BEPALING.

Indien men eenen veelhoek beschrijft in den cirkel, grondvlak van den regten *cylinder*; en men rigt op de zijden van dien veelhoek een regthoekig *prisma*, wiens hoogte die van den *cylinder* is, en welke gevolgelijk tot aan den cirkel, bovenste oppervlakte van den *cylinder*, komt: wordt het *prisma* gezegd in den *cylinder*, en de *cylinder* om het *prisma* beschreven te zijn.

L. G. VIII. Bep. 6.

I. GEVOLG.

De ribben van het *prisma* raken de oppervlakte van den *cylinder*; of liever, liggen in de lengte van dezelve: en de grondvlakken van het *prisma*, zijn in het vlak van de grondvlakken des *cylinders*.

II. GEVOLG.

Indien de veelhoek een *regthoek* is, is het ingeschreven *prisma* een *parallelepipedum*.

IV. BEPALING.

Indien men eenen veelhoek beschrijft om den cirkel, grondvlak van een' regten *cylinder*, en rigt op de zijden van dien veelhoek een regthoekig *prisma*, wiens hoogte die van den *cylinder* is, en welke gevolgelijk tot aan den cirkel, bovenste grondvlak van den *cylinder*, komt: wordt het *prisma* gezegd om den *cylinder*, en de *cylinder* in het *prisma* beschreven te zijn.

L. G. VIII. Bep. 5.

I. GEVOLG.

De vlakken van het *prisma* raken dus de bolle oppervlakte van den *cylinder*: en de grondvlakken van het *prisma* liggen in het zelfde vlak als die des *cylinders*.

II. GEVOLG.

Indien de veelhoek een regthoek, d. i., in dit geval, een

één vierkant is, is het beschreven *prisma* een *parallelepipedum*, wiens grondvlakken vierkanten zijn.

I. VOORSTEL. Fig. 237.

Een *cylinder* is de limiet van alle de *prismas* die om en in den *cylinder* beschreven kunnen worden.

TACQUET, *Selecta ex* ARCHIMEDE, pr. 8, 10.

BEWIJS. Uit de III. en IV. Bep. en VII. 13.

GEVOLG.

Hieruit blijkt, hoe men te verstaan hebbe wat velen zeggen, dat de *cylinder* een *prisma* is van een *oneindig* getal zijden: welke uitdrukking geheel van de mathematische naauwkeurigheid afwijkt.

II. VOORSTEL.

De *cylinders* staan tot elkander in de samengestelde rede hunner grondvlakken en hoogten.

BEWIJS. Uit het I. Voorstel, VII. 5, 7. en XI. 16.

I. GEVOLG

Dus staan *cylinders* tot elkander in de samengestelde rede uit de enkele rede der hoogten, en de verdubbelde rede der middellijnen van de grondvlakken.

II. GEVOLG.

Dus zijn *cylinders*, wier grondvlakken en hoogten gelijk zijn, gelijk: en die, wier hoogten gelijk zijn, staan in de zelfde rede als hunne grondvlakken.

EUCL. XII. 11.

III. GEVOLG.

Dus staan *cylinders*, wier grondvlakken gelijk zijn, in de zelfde rede als derzelver hoogten: en gevolgelijk, zoo men eenen *cylinder* door vlakken, die evenwijdig aan de grondvlakken zijn, snijdt; zullen de deelen de zelfde rede tot elkander hebben, als de deelen die zij van de as afsnijden.

EUCL. XII. 13.

IV.

IV. GEVOLG.

Indien twee *cylinders* gelijkhaltig zijn, zijn hunne grondvlakken in omgekeerde rede hunner hoogten: en omgekeerd.

EUCL. XII. 15.

V. GEVOLG.

Hieruit, en uit XI. 12. het 4. Gev. blijkt, hoe men deze uitdrukking te verstaan hebbe, dat de *cylinder* gelijk is aan het grondvlak door de hoogte vermenigvuldigd. Dat is: zij I de inhoud van den *cylinder*, H de hoogte, M de middellijn van het grondvlak, $\pi : 1$ de rede van den omtrek van den cirkel tot de middellijn, zoo wordt de inhoud van den *cylinder* uitgedrukt door, $\frac{\pi \times M^2 \times H}{4}$

VII. 14. Gev. 1.

St. X. 1. exempel 4. — L. G. VIII. 1.

VI. GEVOLG.

Indien de hoogte des *cylinders* gelijk is aan de middellijn des grondvlaks, wordt de inhoud uitgedrukt door $\frac{\pi . M^3}{4}$.

III. VOORSTEL.

Een *cylinder* staat tot het omschreven *parallelepipedum*, als de inhoud van den cirkel tot het vierkant op de middellijn: of, als het vierde gedeelte van den omtrek tot de middellijn.

BEWIJS. Uit het I. Voorstel, XI. 16. en VII. 14. Gev. 2.

GEVOLG.

En dus, volgens de rede door ARCHIMEDES bepaald, als 11: 14. (VII. 27.).

IV. VOORSTEL.

De *cylindrische* oppervlakte eens regten *cylinders* is gelijkhaltig aan eenen regthoek, waarvan de hoogte de as is

is van den *cylinder*, en de grondlijn de omtrek van het grondvlak des *cylinders*: of, wat op het zelfde uitkomt; die oppervlakte is gelijkhaltig met den inhoud van een' cirkel, wiens *radius* middelevenredig is tusfchen de as van den *cylinder*, en de middellijn van het grondvlak.

TACQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE pr. 10. Cor 1. en Cor. 5. en pr. 11, en Cor 1. pr. 11. — L. G. VIII. pr. 4.

BEWIJS. Uit het I. Voorftel en XI. 18. en VII. 14. Gev. 2.

I. AANMERKING. Op dit Voorftel fteunt de Bepaling van gelijkvormige *cylinders*. Voor den regten *cylinder* is de as ook de hoogte, en men kan die woorden onderling verwisfelen.

II. AANMERKING. En dus hebben alle de gevallen, in welke regthoeken onderling gelijkhaltig zijn, of in eene bepaalde rede ftaan, (Zie IV. 8. Gev. 4, 5.) ook plaats voor de oppervlakten van *cylinders*.

TACQUET pr. 10. Cor. 2. en pr. 11. Cor. 2, 3. &c.

I. GEVOLG.

De *cylindrifche* oppervlakte van een' regten *cylinder* ftaat tot het grondvlak, als de as van den *cylinder* tot het vierde gedeelte der middellijn van het grondvlak.

TACQUET l. c. pr. 10. Cor. 3 en pr. 12.

II. GEVOLG.

Indien de hoogte van den regten *cylinder* gelijk is aan de middellijn van het grondvlak, is de *cylindrifche* oppervlakte van den *cylinder* het viervoud van die des grondvlaks.

TACQUET pr. 12. Cor.

III. GEVOLG.

Zij dan C de *cylindrifche* oppervlakte, G het grondvlak: dan is de *geheele* oppervlakte ($C + 2G$) in dit geval gelijkhaltig aan $4G + 2G = 6G$; dat is: de oppervlakte van eenen regten *cylinder*, wiens hoogte gelijk is aan de middellijn van het grondvlak, is het zesvoud van dit grondvlak.

V. VOORSTEL.

Gelijkvormige *cylinders* ftaan in de driedubbelde rede van de middellijnen hunner grondvlakken.

EUCL. XII. 12. — St. X. 11

BEWIJS. I. Voorstel en XI. 12.

VI. VOORSTEL.

Indien de *cylindrische* oppervlakten van twee regte *cylinders* gelijkhaltig zijn, staan de *cylinders* tot elkander in de zelfde rede als de middellijnen hunner grondvlakken, of in omgekeerde rede der hoogten; en indien de *cylinders* gelijkhaltig zijn, staan hunne *cylindrische* oppervlakten in omgekeerde rede van de middellijnen der grondvlakken, of in *onderverdubbelde* rede van de hoogte.

TACQUET pr. 10. Schol. 2.

BEWIJS. I. Zij de rede van den omtrek des cirkels tot de middellijn als $\pi : 1$. laten H en h de hoogten van de *cylinders*, I en i hunne inhouden, S en s de oppervlakten, M en m de middellijnen der grondvlakken verbeelden, dan is de *cylindrische* oppervlakte van den eenen tot die van den anderen $= H \times \pi . M : h \times \pi . m$: en dus, in dit geval $H \times \pi . M = h \times \pi . m$: dus $H : h = \pi . m : \pi . M = m : M$.

Maar $I : i = H \times M \times M : h \times m \times m$. (II. Voorst. Gev. 1.)
$= m . M . M : M . m . m$
$= M : m$.
$= h : H$.

II. Uit de onderstelling is $I = i$: dus $M^2 . H = m^2 . h$: en $M : m = \sqrt{h} : \sqrt{H}$; waaruit volgt $S : s = M . H : m . h = M^2 . H . m : m^2 . h . M = m : M = \sqrt{H} : \sqrt{h}$.

I. GEVOLG.

Indien men dan uit een blad, dat een regthoekig parallelogram is, een *cylindrisch* vat moet maken; zal de inhoud grooter zijn indien men de kleinste zijde, dan indien men de grootste zijde voor hoogte neemt; het geen in de praktijk van belang is.

II. GEVOLG.

Hieruit ziet men hoe veel de oppervlakte van een' draad vermeerderd wordt, met denzelven te rekken: en dus, indien het een vergulde draad is, hoe veel de dunheid van het goud (welks dikte in omgekeerde rede is van de oppervlakte) daar door vermeerdert.

II. AFDEELING.

OVER DEN KEGEL.

V. BEPALING. Fig. 233.

Indien een ſtip [V] boven het vlak van een' cirkel [ADB] verheven is, en eene lijn [VA] zich uit dat onbewegelijk ſtip [V] als uit een middelpunt, om den omtrek van den gegeven cirkel [ADB] beweegt; wordt de figuur, welke door die beweging gevormd, en door den gegeven cirkel, als grondvlak, beſloten wordt, een *Kegel* of *Conus* genoemd; de kromme oppervlakte, door die beweging geboren, is de *kegelachtige* oppervlakte; het gegeven ſtip de *kruin* of *top*: de gegeven cirkel het *grondvlak*. De lijn, welke het gegeven ſtip en het middelpunt van den gegeven cirkel vereenigt, is de *as* van den kegel. De lijn, door wier beweging de kegel gevormd wordt, is de *zijde* van den kegel. Indien de *as* regthoekig op het grondvlak ſtaat, is de kegel *regt*: zoo niet, *ſchuinsch*, zoo als BDA*v*.

EUCL. XI. Bep. 18, 19, 20. — St. X. d. 2. — L. G. VIII. Bep. 2.

I. AANMERKING. Anderen (gelijk EUCLIDES, en na hem LE GENDRE, enz.) beſchouwen den kegel als geboren door de omwenteling van eenen regthoekigen driehoek VCA om eene der regthoekszijden, als om eene as: de ſchuinſche zijde beſchrijft dan de kegelachtige oppervlakte; de andere regthoeks-zijde de *baſis*, of het grondvlak: doch dan is de ſcheve kegel onder de bepaling niet begrepen.

I. GEVOLG.

De *zijde* van den kegel heeft eene beſtendige grootte in regte kegels: doch is voor ieder ſtip van den omtrek verſchillend in ſchuinſche kegels.

II. AANMERKING. In de ſchuinſche kegels, ſtaan de *grootſte* en de *kleinſte* zijde, vlak over elkander in het vlak dat door het middelpunt des grondcirkels gaat: en indien men zijden trekt, die wederzijds van dat vlak gelijke bogen van den grondcirkel afſnijden, zijn die zijden onderling gelijk.

II. GEVOLG.

Indien men een vlak laat gaan door den top V en het middelpunt van het grondvlak, en dus langs den as VC, is de snede een driehoek AVB, welke gelijkbeenig is, en regthoekig op het grondvlak staat, zoo de kegel regt is. Naar mate de top-hoek AVB van dien driehoek regt, stomp, of scherp is, wordt de kegel *regthoekig*, *stomphoekig* of *scherphoekig* genoemd.

III. GEVOLG.

Indien men den kegel evenwijdig aan het grondvlak snijdt, zijn de sneden cirkels, waarvan de omtrekken, zoo als ook de middellijnen, tot elkander staan, als hunne afstanden van den top; en de inhouden in verdubbelde rede van die afstanden (VII. 10).

III. AANMERKING. De schuinsche sneden van den Kegel behooren niet tot de grondbeginselen der Meetkunde, wanneer men die wetenschap in eenen strikten zin, volgens de gewoonte der Ouden, neemt.

IV. AANMERKING. Die schuinsche sneden leveren de zoogenaamde *kegelsneden* op, welke drie in getal zijn. Want de snede is òf evenwijdig aan de zijde des kegels, en gaat door het grondvlak, en dan komt die kromme lijn voort welke men *parabel* noemt: of zij is zoodanig dat zij de bolle oppervlakte des kegels wederzijds snijdt, en de *Ellips* voortbrengt: of zij is schuins, en gaat door het grondvlak, en levert de *Hyperbel*. De eerste en de laatste snede zijn den kegel alleen eigen: de kegel heeft de tweede gemeen met den *rol* of *cylinder*: immers men kan den rol beschouwen als eenen kegel wiens top oneindig ver af is van het grondvlak. De schuinsche snede van den rol is ook eene *Ellips*.

VI. BEPALING.

Indien men in den cirkel, grondvlak van den kegel, eenen veelhoek beschrijft, en op deszelfs zijden driehoeken of vlakken oprigt, waarvan alle de toppen zich in den top des kegels vereenigen: zal de *pyramide* daaruit ontstaande gezegd worden in den kegel, en de kegel om die *pyramide* beschreven te zijn.

GEVOLG.

De ribben van de *pyramide* raken den hollen omtrek des kegels en liggen in denzelven.

VII. BEPALING.

Indien men om den cirkel, grondvlak des kegels, eenen veelhoek beschrijft, en om deszelfs zijden driehoekige vlakken oprigt, waarvan alle de toppen zich in den top des kegels veréénigen: zal de *pyramide*, op die wijze gevormd, gezegd worden om den kegel, en de kegel in de *pyramide* beschreven te zijn.

GEVOLG.

De vlakken van de *pyramide* raken de bolle oppervlakte des kegels.

VIII. BEPALING.

Een kegel wordt gezegd in eenen *cylinder*, en een *cylinder* wordt gezegd om den kegel beschreven te zijn, als het grondvlak des kegels gelijk is aan dat des *cylinders*, en op hetzelve geplaatst zijnde, de kegel geheel binnen den *cylinder* valt, en met zijnen top het bovenste grondvlak des *cylinders* raakt.

GEVOLG.

Indien de *cylinder* en de kegel, beiden, regt zijn, valt de top in het middelpunt des bovensten grondvlaks.

IX. BEPALING.

Kegels zijn gelijkvormig, als de rede van de as tot de middellijn des grondvlaks, in alle de zelfde is.

St. X. def. 7. — L. G. VIII. Bep. 4.

AANMERKING. Zie de Aanmerking op de tweede Bepaling Zij is even op de kegels als op de *cylinders* toepasselijk.

X. BEPALING. Fig. 233.

Men noemt *geknotten kegel* eenen kegel waarvan het bovenste gedeelte is afgenomen. Die figuur bestaat derhalve uit twee ongelijke en evenwijdige circulaire vlakken, door eene bolle kegelachtige oppervlakte veréénigd. Het ligchaam E F G B D A E is een *geknotte kegel*.

L. G. VIII. Bep. 3.

VII.

VII. VOORSTEL. Fig. 233.

Een kegel is de limiet van alle *pyramiden* die de zelfde hoogte hebben als de kegel, en wier grondvlak een veelhoek is in, of om den cirkel, grondvlak van den kegel, beschreven.

TACQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE, pr. 9, 10.

BEWIJS. Uit de VI. en VII. Bep. en uit VII. 13.

GEVOLG.

Hieruit blijkt hoe men het gezegde van velen te verstaan hebbe, dat de kegel eene *pyramide* is van een *oneindig* getal *oneindig kleine* zijden: welke uitdrukking geheel te verwerpen is.

VIII. VOORSTEL.

De inhoud eens kegels is het derde gedeelte van den inhoud eens *cylinders* om dien kegel beschreven.

EUCL. XII. 10. — St. X. 18. — L. G. VIII. 5 Cor.

BEWIJS. Uit het VII. en I. Voorstel; VII. 5. en XI. 26.

I. GEVOLG.

Hieruit blijkt hoe men het gezegde van velen te verstaan hebbe, dat de inhoud eens kegels gelijk is aan het grondvlak door het derde gedeelte van de hoogte vermenigvuldigd.

St. X. 18. Gev. 2. — L. G. VIII. 5.

II. GEVOLG.

De inhoud van eenen kegel kan uitgedrukt worden door $\frac{\pi \times r^2 . H}{3}$, zoo H de hoogte des kegels is.

III. GEVOLG.

De inhoud eens kegels staat tot dien van een *parallelepipedum* om den kegel beschreven, als het derde gedeelte van den inhoud des cirkels tot het vierkant op de middellijn: of als een twaalfde gedeelte van den omtrek tot de middellijn. (III. Voorst.)

IX. VOORSTEL.

Verschillende kegels staan tot elkander in samengestelde rede hunner grondvlakken en hoogten.

St. X. 19.

BEWIJS. Uit het VIII. Voorst. Gev. 2.

I. GEVOLG.

Kegels die de zelfde hoogte hebben zijn als hunne grondvlakken, of in verdubbelde rede van de middellijnen dier grondvlakken: kegels die gelijke grondvlakken hebben zijn als hunne hoogten: en kegels, welke op gelijke grondvlakken en tusschen de zelfde evenwijdige vlakken staan, zijn gelijkhaltig.

EUCL. XII. 11, 14. — St. X. 19. Gev. 1, 2, 3. — L. G. VIII. 3. Cor.

BEWIJS. Uit II, VIII. en uit de V. Bep. van dit Boek.

II. GEVOLG.

Indien twee kegels gelijkhaltig zijn, staan derzelver grondvlakken in omgekeerde rede hunner hoogten: en omgekeerd.

EUCL. XII. 15. — St X. 19. Gev. 4, 5.

III. GEVOLG.

De inhouden van gelijkvormige kegels staan tot elkander in driedubbelde rede van de middellijnen hunner grondvlakken.

EUCL. XII. 12. — St. X. 20. — L. G. VIII. 5. Cor. 3.

X. VOORSTEL.

De kegelachtige oppervlakte van een' regten kegel wordt uitgedrukt door eenen driehoek, waarvan de grondlijn de omtrek is van het grondvlak, en de hoogte de zijde van den kegel: of, wat op het zelfde uitkomt, die oppervlakte is gelijkhaltig met eenen cirkel wiens *radius* middelevenredig is tusschen den *radius* van het grondvlak, en de zijde van den kegel.

TACQUET l. c. pr. 10. Cor. 6. Cor. 10. en pr. 13. en Cor. pr. 13. — L. G. VIII. 7.

BEWIJS. Uit het VII. Voorst. XI. 27. en VII. 13. Gev. 2.

I. AANMERKING. Alle de gevallen in welke de inhouden van verschillende driehoeken gelijk zijn, of in een bepaalde rede staan (zie IV. 8. Gev. 3, 4.) hebben ook plaats voor de oppervlakten van kegels.

TACQUET pr. 10. Cor. 7. en pr. 13 Cor. 2, 3, enz.

I. GEVOLG.

Hierop steunt de bepaling van gelijkvormige kegels.

II. GEVOLG.

De kegelachtige oppervlakte des kegels wordt derhalve uitgedrukt door $\pi \times r \times Z$: indien r de *radius* des grondvlaks en Z de zijde des kegels is.

III. GEVOLG.

De kegelachtige oppervlakte van den regten kegel staat tot zijn grondvlak, als de zijde van den kegel tot den *radius* van het grondvlak.

TACQUET l. c. pr. 10. Cor. 8. en pr. 14.

IV. GEVOLG.

En dus, zoo de snede van den kegel die door den top gaat een gelijkzijdige driehoek is, dat is, zoo de zijde van den kegel gelijk is aan de middellijn van het grondvlak, is de kegelachtige oppervlakte van den kegel het dubbeld, en dus de *gehele* oppervlakte het drievoud van het grondvlak.

TACQUET pr. 10. Cor. 9.

V. GEVOLG.

De kegelachtige oppervlakte eens regten kegels staat tot de *cylindrische* oppervlakte eens regten *cylinders* die de zelfde hoogte en het zelfde grondvlak heeft, als de halve zijde van den kegel tot de hoogte van den *cylinder*. (IV. Voorst. Gev. 1.)

TACQUET 10. Cor. 9 en 14. Cor. 3.

VI. GEVOLG.

Dus is ook de kegelachtige oppervlakte eens regten kegels gelijk aan eenen cirkel-*sector*, wiens boog aan den omtrek van het grondvlak, en wiens *radius* aan de zijde van den kegel gelijk is. De zijde nu van den kegel staat tot den *radius* van het grondvlak, als 360° tot den gemelden boog.

II. AANMERKING. Hieruit beschrijft men gemakkelijk eenen *Sector*, die, door omrolling van het papier, een kegel van eene gegeven hoogte en grondvlak wordt.

Want, zij (fig. 232.) PQ de middellijn van den cirkel X, die het grondvlak van den kegel zijn zal: zij AC, of Z, de

zijde van den kegel: zij 2 AC, of de middellijn, tot PQ, als 360°, of de omtrek, tot den boog DE, dat is tot den hoek DCE: maak dan op CA, uit C, ∠ DCA = ∠ ACE = ½ gevonden hoek: dan is de driehoek DCE de oppervlakte van den kegel; de boog DAE gelijk aan den omtrek van het grondvlak X; en dus, indien men DAE om den cirkel X rolt, zal men den gevraagden kegel verkrijgen.

Immers, zij de middellijn des cirkels X kortsheidshalve uitgedrukt door D: de kegelachtige oppervlakte is $\infty \frac{\pi . D . Z}{2}$ en *fector* $\infty \frac{B r}{2}$ (VII. 15.) of hier $\infty \frac{B \times Z}{2}$; derhalve kegelachtige oppervlakte tot *fector* $= \frac{\pi . D . Z}{2} : \frac{B . Z}{2}$ $= \pi D : B$. Maar hier is $1 : \pi$ (of 360°) $= D : B$: en dus $B = \pi D$: derhalve ook kegelachtige oppervlakte gelijk aan den *fector* ECD.

XI. VOORSTEL. Fig. 231.

De oppervlakte van eenen geknotten regten kegel is gelijk aan den inhoud van een regthoekig *trapezium* waarvan de hoogté de zijde van den geknotten kegel is, en de onderfte en bovenfte zijden de omtrekken zijn van den onderften en bovenften cirkel des geknotten kegels: of, 2°. wat op het zelfde uitkomt, die oppervlakte is gelijk aan den inhoud van een' regthoek, wiens hoogte de gemelde zijde is, en wiens grondlijn middel *arithmetisch evenredig* is tusfchen de omtrekken der beiden cirkels van den kegel: of eindelijk, 3° wat nog op het zelfde uitkomt, die oppervlakte is gelijkhaltig met den inhoud van een' cirkel, wiens *radius* geometrisch middelevenredig is tusfchen de zijde des kegels, en de fom der *radii* van de beide cirkels.

TACQUET l. c. pr. 15. — L. G. VIII. 8.

BEWIJS. Uit het X. Voorftel en IV. 9. Gev. 8.

AANMERKING. Indien X de cirkel is die de bovenfte oppervlakte van een' geknotten kegel uitmaakt: en men ftelt, (Fig. 232.) middellijn van X tot middellijn van Y = AC: CF: zal boog GH gelijk aan den omtrek van den cirkel Y zijn: en dus zal GDEH de oppervlakte zijn van den geknotten kegel, en het vlak, dat door omrolling op de beide cirkels, den geknotten kegel uitmaakt.

GE-

GEVOLG.

De tweede uitdrukking in het Voorstel kan ook aldus veranderd worden: De kegelachtige oppervlakte eens geknotten kegel, is gelijkhaltig met den inhoud eens regthoeks, wiens hoogte is de gemelde zijde, en wiens grondlijn is de omtrek eens cirkels, door het midden van den afstand tusschen de twee grondvlakken getogen.

L. G. VIII. 8. Cor.

BEWIJS. Immers zoo $AI = IF$ is $IL = \frac{FG + AE}{2}$.

XII. VOORSTEL. Fig. 233.

De inhoud van eenen geknotten regten kegel (AEGB) is gelijk aan het derde gedeelte der som van drie *cylinders*, wier gemeene hoogte [FC] is de hoogte van den geknotten kegel, en wier grondvlakken zijn, het onderste grondvlak van den gegeven geknotten kegel, het bovenste grondvlak deszelven, en een grondvlak wiens *radius* middel-evenredig is tusschen de *radii* der twee gemelde grondvlakken.

L. G. VIII. 6.

BEWIJS. Geknotte kegel ∞ kegel AVB — kegel EVG.

Zij $AC = R$, $EF = r$, $FC = H$: is

Gekn. kegel $\infty \frac{1}{3}\pi . R^2 \times VC - \frac{1}{3}\pi . r^2 \times VF \infty$

$\frac{1}{3}\pi (R^2 . VC - r^2 VF)$

maar $VC : VF = R : r$: derhalve 1°. $R . VF = r . VC$.

2°. $VC - VF : VC = R - r : R$: of

$FC : VC = R - r : R$;

en dus $VC = \frac{FC \times R}{R - r}$; waaruit volgt

$$\text{gekn. kegel} \infty \tfrac{1}{3}\pi \times \left(\frac{R^3\, FC}{R - r} - r^2 . VF\right) \infty$$

$$\tfrac{1}{3}\pi \times \left(\frac{R^3 . FC - r^2 . R . VF + r^3\, VF}{R - r}\right) \infty \text{ (uit 1°.)}$$

$$\tfrac{1}{3}\pi \times \left(\frac{R^3 . FC - r^3 . VC + r^3 . VF}{R - r}\right) \infty$$

$$\tfrac{1}{3}\pi \times \left(\frac{R^3 . FC - r^3 . (VC - FV)}{R - r}\right) \infty$$

$$\tfrac{1}{3}\pi \times \left(\frac{R^3 . FC - r^3 . FC}{R - r}\right) \infty \tfrac{1}{3}\pi \frac{FC\,(R^3 - r^3)}{R - r} \infty$$

$$\tfrac{1}{3}\pi H \left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right) \infty \tfrac{1}{3}\pi H . (R^2 + r^2 + Rr)$$

zij $R : \rho = \rho : r$; is $Rr = \rho^2$: derhalve

geknotte kegel $\infty \frac{1}{3}\pi . H (R^2 + r^2 + \rho^2)$: het geen den regel in den tekst opgeeft.

AANMERKING. Deze regel is reeds door CLAVIUS gegeven in zijne *Geom. Practica*: V. Cap. 8.

III. AFDEELING.

OVER DEN KLOOT, OF BOL.

XI. BEPALING.

Indien een halve cirkel om zijne middellijn, als om eene ſpil wentelt, zal hij door die beweging een ligchaam vormen dat *kloot*, of *bol*, of *ſpheer*, genoemd wordt. De middellijn van den cirkel is de *as*, het middelpunt is het *middelpunt* van den kloot; en de beide uiteinden der as worden *polen* van den kloot genoemd.

EUCL. XI. Bep. 14, 15, 16, 17. — St. X. Bep. 8.

GEVOLG.

De lijnen die men uit het middelpunt van den kloot trekt naar alle de ſtippen van deszelfs omtrek, zijn gelijk.

AANMERKING. Deze is de reden waarom ſommigen den kloot een ligchaam noemen, zoodanig geſteld, dat alle de lijnen uit zeker punt naar deszelfs oppervlakte getrokken onderling gelijk zijn.

TACQUET op EUCL. XII. def. 5. — L. G. VII, def. 1.

XIII. VOORSTEL. Fig. 238.

Op welke wijze men den kloot door eenig vlak ſnijde, de ſnede is altijd een cirkel.

L. G. VII. 1.

BEWIJS. Zij DE de ſnede, of liever de gemeene ſnede van dat vlak en den cirkel die door het middelpunt van den kloot gaat: dan is DE eene choorde van dien cirkel BGHB: en dus indien men de zelve in F, in twee gelijke deelen ſnijdt, en door F en het middelpunt C de lijn BFCH trekt, is die lijn BH eene middellijn van den cirkel BGHB: dus zijn BEH en BDH halve cirkels: en gevolgelijk indien de halve cirkel BDH om BH wentelde zoude deze den zelfden kloot, en het ſtip D eenen cirkel beſchrijven, waarvan DE de middellijn is: gevolgelijk is de ſnede van het vlak dat den kloot langs ED ſnijdt een cirkel.

I. GEVOLG.

Hoe ook een kloot, door eenen kloot, of door eenen cy-

cylinder, of door eenen kegel gesneden worde, is de gemeene snede altijd een cirkel.

D. G. Meetk. § 924.

II. GEVOLG.

Door twee stippen op de oppervlakte eens kloots gegeven en door het middelpunt, kan altijd een vlak getrokken worden, dat op de oppervlakte des kloots eenen cirkel zal afperken.

L. G. VII. 1. Cor. 6.

XII. BEPALING.

De sneden, die door het middelpunt des kloots gaan, worden *groote cirkels* des kloots genoemd, en hunne middellijnen zijn middellijnen van den kloot. Indien een derzelver als As beschouwd wordt, zal de groote cirkel op wiens vlak die as loodregt staat den naam van *Equator*, of *Evenaar* des kloots dragen.

St. X. Bep. 9. 10. — L. G. VII. def. 3.

AANMERKING. Door twee stippen en het middelpunt kan maar één éénige cirkel getrokken worden, ten zij de twee gegeven stippen twee tegenover elkander staande polen des kloots zijn: als dan is het getal onbepaald.

L. G. VII. 1. Cor. 3.

GEVOLG.

Alle groote cirkels zijn gelijk, en snijden zoo wel de oppervlakte als den inhoud des kloots in twee gelijke deelen.

L. G. VII. 1. Cor. 8.

XIII. BEPALING.

De sneden des kloots die niet door het middelpunt gaan, worden *kleine cirkels* des kloots genoemd.

L. G. VII. def. 3.

AANMERKING. Het blijkt dat men de bepaling van *kleine cirkels* niet geven kan, alvoorens bewezen zij dat alle de sneden van den kloot cirkels zijn.

GEVOLG.

Het middelpunt eens kleinen cirkels en die van den kloot zijn in eene en de zelfde regte lijn, welke loodregt staat op het vlak des kleinen cirkels.

L. G. VII. 1. Cor. 4.

XIV.

XIV. VOORSTEL.

De kleine cirkels van den kloot zijn des te kleiner dat zij verder van den *Equator* afstaan: hunne middellijnen en hunne omtrekken staan tot de middellijn en den omtrek eens grooten cirkels, als de *cosinussen* der hoeken, of bogen, die hunne afstanden van den *Equator* bepalen, tot den *radius* des kloots: en hunne oppervlakten staan in de verdubbelde reden dier *cosinussen*.

L. G. VII. 1. Gev. 5.

BEWIJS. Fig. 149. Zij EKFGE de snede van den kloot, EF de as, GK de snede van den *Equator*, en IND, MRB, die van twee kleine cirkels: dan zijn de bogen KD en KB derzelver afstanden van den *Equator* en CS, of ND, CR of PB, zijn de *cosinussen* van die afstanden, of van de bogen KD en KB: waaruit het gezegde volgt.

AANMERKING. De kennis dezer kleine cirkels en van de rede die derzelver omtrekken tot elkander hebben, naar mate hunner afstanden van den *Equator*, is in de *Geographie* en *Navigatie* van het grootste belang. Indien een graad onder den *Equator* in 15 *Geographische* of *Duitsche*, en in 60 Engelsche zee-mijlen verdeeld wordt: zal een graad van eenigen cirkel evenwijdig aan den *Equator*, op eenigen afstand van dezen, of op eenige breedte, geen 15 Duitsche of geen 60 Engelsche zee-mijlen bevatten: maar minder: en op 60 gr. breedte, maar $7\frac{1}{2}$ Duitsche of 30 Engelsche, om dat de *cosin.* 60°. = *sin.* 30°. = $\frac{1}{2}$ *rad.* Om het getal mijlen die in eenigen graad *lengte*, d. i. in eenigen graad op den *Equator*, of op eenen cirkel aan den *Equator* evenwijdig, te kennen, is op vele pleinschalen, inzonderheid op de Engelsche, eene lijn bestemd, waarvan wij reeds in IX, *Afd* 1: *Geval* 4, *Aanm.* 3, gesproken hebben. Zij is bestempeld met de letters *Lon*, verkorting van *Longitude*, of enkel met de letters L. M. verkorting van *Longitude-miles*. Indien men den *radius* eens cirkels in 60 deelen verdeelt, zullen die 60 deelen 60 Engelsche mijlen, of ieder $\frac{1}{4}$ Duitsche mijl aanduiden, die gesteld worden op den *Equator* éénen graad uittemaken. Indien men dan met het stip K (fig. 149.) te beginnen, daar de 60 staat, achtervolgens aftrok den *sinus-versus* KS, den *sinus-versus* KP, enz. zoude men het getal deelen die CS, of CP uitmaken kennen, dat is, het getal deelen welke op de breedte KD, of KB in een' graad begrepen zijn: maar om dat er op de *pleinschalen* doorgaans geen lijn van *sinus-versus* is, maar wel eene van *choorden*, en de zeelieden meer met deze gewoon zijn om te gaan, zijn de mijlen (van 60 in een' graad) op eene lijn, gelijk aan de choorde van 90 gr. op zoodanige wijze gesteld, dat, indien men successivelijk, te beginnen aan het uiteinde 60, de choorden van 10, 20, 30, enz. gr. met den passer stelt; de tweede punt deszelven dat getal mijlen aanwijst welke op een breedte van 10, 20, 30, enz. gr. in éénen graad bevat zijn. Bij voorbeeld, de choorde van 30, valt op 51.96, die de *cosinus* is van 30°., wanneer de *radius* door 60 wordt uitgedrukt, en die het getal mijlen aanduidt die op de breedte van 30 gr. in éénen graad lengte begrepen zijn.

XV.

XV. VOORSTEL. Fig. 241.

Wanneer door twee ſtippen E en I op de oppervlakte eens kloots, een groote en een kleine cirkel gaan, is de boog des grooten cirkels welke tusſchen die ſtippen begrepen is, kleiner dan die des kleinen cirkels welken door de zelfde toppen gaat.

BEWIJS. Immers zij E I de choorde der beide bogen: de *radii* C E en C I des grooten cirkels, zijn grooter dan de *radii* K E en K I des kleinen: zij beſpannen echter de zelfde choorde E I: de boog des grooten cirkels is derhalve een kleiner gedeelte van zijnen omtrek dan die des kleineren cirkels van den omtrek van dezen is.

GEVOLG.

Op de oppervlakte des kloots, is de kortſte weg van een ſtip tot een ander, de boog des grooten cirkels die door beide ſtippen gaat.

L. G. VII. 3.

XIV. BEPALING. Fig. 241.

Men noemt *bolvormig ſegment* [*ſegment ſphérique*] van een' kloot, of bol, het ſtuk [B P D O B R D] dat begrepen wordt door een gedeelte van de bolvormige oppervlakte des kloots en den cirkel [B R D O B] die het zelfde ſtuk van den kloot ſcheidt.

L. G. VII. 13. — D. G. XII. §. 932.

GEVOLG.

Zoodanig bolvormig ſegment [D P B O B R D] wordt derhalve door den cirkel B R D O bepaald: en deszelfs *hoogte* is de loodlijn S P, uit het middelpunt van dien cirkel tot aan de oppervlakte opgerigt.

I. AANMERKING. Die hoogte, of loodlijn, P S is derhalve een ſtuk van de *as* des kloots; want alle loodlijnen die op cirkelvlakken welke den kloot ſnijden, uit het middelpunt van die vlakken opgerigt worden, gaan klaarblijkelijk door het middelpunt van den kloot, en zijn dus, tot de oppervlakte wederzijds verlengd zijnde, asſen derzelven.

II. AANMERKING. De hoogte P S is de *ſinus-verſus* van den boog P D helfte des boogs B P D welke de bolvormige oppervlakte van dat ſtuk bepaalt.

XV. BEPALING. Fig. 241.

Men noemt *bolvormige schijf* des kloots dat gedeelte BDFE deszelven, dat tusschen twee aan elkander evenwijdige cirkels BRDO, EQFT begrepen is. Die cirkels zijn dus de twee grondvlakken van de *bolvormige schijf*, en worden door een gedeelte der bolvormige oppervlakte des kloots vereenigd. De klootsche oppervlakte, begrepen tusschen de twee cirkelvlakken die den schijf bepalen, kan den naam van *band*, of *gordel*, of *klootschen band*, of *klootschen gordel* (*zone sphérique*) dragen.

GEVOLG.

De hoogte van de schijf is de lijn KS die de middelpunten der beide cirkels vereenigt, en derhalve loodregt op dezelve staat, en een gedeelte der as van den kloot is.

AANMERKING. Indien de bolvormige schijf BDFE grooter, en de cirkel BRDQ die denzelven bepaalt, kleiner, en eindelijk de hoogte KP in plaats van KS wierd: zoude de cirkel BRDO verdwijnen, en de bolvormige schijf zoude een *bolvormig segment* worden.

XVI. BEPALING. Fig. 241.

Wanneer de halve cirkel PA*p*P door deszelfs omwenteling om den as P*p* eenen kloot beschrijft, zal de cirkel*sector* BCP eene ligchamelijke figuur BCDPB beschrijven, die men *sector* van den kloot noemt.

I. GEVOLG.

Het grondvlak van den sphærischen *sector*, zal een stuk BPD van den oppervlakte des kloots zijn.

II. GEVOLG.

Zoo lang de cirkel-*sector* BCP kleiner is dan het vierde gedeelte van den cirkel, is de sphærische *sector* PBCDPB een kegel, wiens grondvlak is het gedeelte BPD der oppervlakte van den kloot: en die kegel zal bestaan 1°. uit den gewoonen kegel BCD, wiens grondvlak is de kleine cirkel BODRB: en 2°. uit het sphærische bolvormig-segment BPD, door dien zelfden cirkel bepaald.

 III.

III. GEVOLG.

Wanneer de cirkel-*fector* het vierde gedeelte ACB van een cirkel is, wordt de fpherifche *fector* de halve kloot.

IV. GEVOLG.

Wanneer de cirkel-*fector* PA*b*C grooter mogt zijn dan het vierde des cirkels, zal de fpherifche *fector* grooter zijn dan de halve kloot, en een ligchaam voortbrengen dat gelijk zal zijn aan den kloot, *min* de fpherifche *fector* *b*C*dp* die gemaakt wordt door de omwenteling van den cirkel-*fector* *b*C*p*, fupplement van de gegeven cirkel *fector* PA*b*C.

XVII. BEPALING.

Indien een vlak UVWX, ten opzichte van den bol PA*pa*, zoodanig gefteld is, dat het met den bol maar één éénig ftip *p* gemeen heeft, wordt dat vlak gezegd den bol te raken.

GEVOLG.

De as P*p* des kloots ftaat loodregt op alle de lijnen Y*p*Z die in het zelve vlak getrokken worden; en die lijnen zijn raaklijnen van den kloot, en van alle de cirkels die door het ftip van aanraking gaan.

XVIII. BEPALING.

Een *cubus* wordt gezegd in een kloot befchreven te zijn, als hij zoodanig in den kloot bevat is, dat zijne acht hoeken op de holle oppervlakte van den kloot rusten: en een *cylinder*, wanneer de twee cirkel-vlakken, die den zelven bepalen, de oppervlakte des kloots raken.

I. GEVOLG.

Geen *cylinder* kan in den kloot befchreven worden, ten zij hij regthoekig zij, deszelfs as met de as van den *cylinder* overeenkome, en de onderfte en bovenfte cirkel-oppervlakten op gelijke afftanden van het middelpunt des kloots ftaan.

II. GEVOLG.

De omtrekken der beide circulaire oppervlakten van den

cylinder die in den kloot beschreven is, komen overeen met de twee kleine cirkels deszelven, die op de zelfde afstanden van het middelpunt staan.

XIX. BEPALING.

Een *cubus*, of een *cylinder*, wordt gezegd om eenen kloot beschreven te zijn, als de kloot zoodanig in den zelven bevat is, dat hij alle de vlakken van den *cubus*, en zoo wel de holle oppervlakte als de beide grondvlakken van den *cylinder* raakt.

St. X. Bep. 11.

GEVOLG.

Hieruit volgt 1°. dat de zijde van den *cubus*, of de middellijn van het grondvlak des *cylinders*, om den kloot beschreven, gelijk is aan de middellijn van den kloot.

2°. Dat de aanraking van den kloot met de oppervlakte van den *cylinder*, of met de zijden van den *cubus*, geschiedt door den *Equator* van den kloot, en op de helft van de hoogte van den *cubus*, of *cylinder*.

3°. Dat de as van den kloot met dien van den *cylinder* overeenkomt.

XX. BEPALING.

Een kegel wordt gezegd in den kloot beschreven te zijn, als zijn circulair-grondvlak de holle oppervlakte van den kloot raakt, en zijn top, op die oppervlakte rust.

I. GEVOLG.

De as des regten kegels, in den kloot beschreven, komt dus in rigting met de as des kloots overeen.

II. GEVOLG.

De omtrek van het grondvlak des kegels komt met dien cirkel van den kloot overeen, welke op den zelfden afstand van het middelpunt des kloots staat.

XXI. BEPALING.

Een kegel wordt gezegd om eenen kloot beschreven te zijn, als de kloot op het grondvlak van den kegel rust, en de oppervlakte van den kloot door die van den kegel geraakt wordt.

GE-

GEVOLG. Fig. 236.

Die cirkel des kloots welke de oppervlakte eens regten kegels raakt, is een kleine cirkel, en is des te meer van den *Equator* verwijderd dat de kegel stomper is: want Po: PC = *cos.* ∠ oPC: 1 = *cos.* ∠ POI: 1 = *cos.* ½ ∠ GOF: 1.

XXII. BEPALING.

Eene veelvlakkige ligchamelijke figuur wordt gezegd in den kloot beschreven te zijn, als de toppen van alle deszelfs ligchamelijke hoeken op de holle oppervlakte van den kloot rusten.

XXIII. BEPALING.

Eene veelvlakkige ligchamelijke figuur wordt gezegd om den kloot beschreven te zijn, als de kloot zoodanig binnen dezelve geplaatst is, dat de bolle oppervlakte des kloots alle de vlakken van de ligchamelijke figuur raakt.

XVI. VOORSTEL. Fig. 239.

De kloot is de limiet van alle de veelvlakkige ligchamen die in denzelven beschreven kunnen worden.

BEWIJS. Uit XI. 30. en VII. 13.

GEVOLG.

Hieruit blijkt hoe men te verstaan hebbe het geen velen zeggen, dat de spheer een veelvlakkig ligchaam, of *polyëdrum*, is van een *oneindig* getal *oneindig kleine* vlakken; een denkbeeld dat geheel onnaauwkeurig is.

XVII. VOORSTEL. Fig. 144.

De oppervlakte van den kloot is gelijkhaltig met een' cirkel wiens *radius* het dubbeld is van den *radius* des grooten cirkels; of 2°, wat op het zelfde uitkomt, zij is het viervouwd van den grooten cirkel des kloots: of eindelijk 3°, wat nog op het zelfde uitkomt, zij is gelijkhaltig aan den regthoek uit de middellijn en den omtrek eens grooten cirkels.

TACQUET, *Selecta ex* ARCHIMEDE, pr. 18—24. — L. G. VIII. 10. Cor. 1.

BEREIDING. Men onderstelle dat er in den grooten cirkel een regelmatige veelhoek van een even getal zijden beschreven is, doch welk getal door vier deelbaar is. Zij

ABCDEFGH een dergelijke veelhoek, EA de *as* van den kloot: men trekke de lijnen zoo als in de figuur, en men stelle dat nu de kloot door de omwenteling van den halven cirkel ABCDE op de as AE gevormd wordt: dan beschrijft die omtrek van den halven veelhoek een ligchaam, bestaande uit twee gelijke kegels ABH en FED en verschillende geknotte kegels BCGH en CDFG, doch die wederzijds van den *Equator* CG altijd, ieder in hunnen rang, gelijk zijn, zoo dat er altijd twee gelijke gevonden worden.

BEWIJS. Men neemt (door Voorst. X. en XI.) de oppervlakten van die kegels en geknotte kegels ABH, HBCG enz. en derzelver som: welke men tot eene eenvoudige waardij herleid: namelijk $\pi \times AE \times BE$ door VI. 15; de oppervlakte des kloots is dus de limiet van die som: en men stelt dan, voor de lijn BE die in dezelve voorkomt, hare *limiet*, namelijk de middellijn AE; waaruit het gestelde volgt door VII. 14.

I. AANMERKING. Men neemt een getal zijden voor den veelhoek, dat door vier deelbaar is, op dat het even zoude zijn in den halven cirkel: en op dat er derhalve geen zijde evenwijdig aan den diameter zoude zijn, waar door een *cylinder* geboren zoude worden.

II. AANMERKING. De derde uitdrukking in het Voorstel vermeld doet zien hoe LE GENDRE dezelve aldus heeft kunnen opgeven: „de oppervlakte van den kloot is gelijk aan zijnen „diameter door den omtrek eens grooten cirkels vermenigvuldigd."

XVIII. VOORSTEL. Fig. 144.

De ronde oppervlakte van een stuk [ACDFGHA] van een' kloot, dat is van een *spherisch-segment* deszelven (Bep. XIV.) is gelijkhaltig aan den inhoud van een' cirkel, wiens *radius* middelevenredig is tusschen de middellijn [AE] van den kloot, en de hoogte [AO] van het *segment*: of, wat op het zelfde uitkomt, wiens *radius* eene lijn [AD] is, getrokken uit het stip A van dat stuk, pool van den cirkel die het grondvlak van het stuk is, naar den omtrek van dezen cirkel.

TACQUET, *Selecta ex* ARCHIMEDE, pr. 25.

BEWIJS. Uit het XVII. Voorstel en VI. 16. wordt gemakkelijk bewezen, dat de oppervlakte van het ligchaam FGHABCDF gelijk is aan $\pi \times BE \times AO$: maar de op-

oppervlakte des kloots is de *limiet* van die des ligchaams FGHABCDF, en dus is zij = π × AO × *limiet* van BE: welke is AE: derhalve is die oppervlakte = π × AE × AO. Maar AE : AD = AD : AO: gevolgelijk π × AE . AO = π × $\overline{AD}^2$ = cirkel, wiens *radius* is AD. (VII. 14. Gev. 1.)

I. GEVOLG.

De ronde oppervlakten van *sphærische segmenten* in den zelfden kloot, staan tot elkander als de vierkanten der choorden, uit hunne toppen tot aan de omtrekken hunner grondvlakken getrokken; of als hunne hoogten.

D. G. *Meetk.* §. 935.

BEWIJS. Immers door dit Voorstel, oppervlakte *segm.* ABCDFHA: Oppervl. *segm.* ABHA = AD²: AB². Maar AD²: AB² = AO: AK (V. 15.) derhalve oppervl. *segm.* ABCDFHA: oppervl. *segm.* ABHA = AO: AK.

II. GEVOLG.

De ronde oppervlakte eens *sphærisch-segments* staat tot die van den kloot als het vierkant van de choorde des *segments* tot dat van de middellijn, of als de hoogte des *segments* tot de middellijn.

D. G. *Meetk.* §. 936.

XIX. VOORSTEL.

De oppervlakten van verschillende *sphæren* staan tot elkander als de vierkanten hunner middellijnen.

AANMERKING. Indien men dit Gevolg vergelijkt met de 7. Bepaling van het XI. Boek, en met het geen wij in de II. Aanmerking op het X. Voorstel van het VII. Boek gezegd hebben: zal het blijken dat alle bollen, of *sphæren*, *gelijkvormige* ligchamen zijn.

XX. VOORSTEL. Fig. 239.

De inhoud van den kloot is gelijkhaltig met dien van een' kegel, wiens hoogte de *radius* is van den kloot, en wiens grondvlak gelijkhaltig is met de oppervlakte van den kloot.

TACQUET pr. 28.

BEWIJS. Uit XI. 29. en het XIII. Voorstel.

I. GEVOLG.

De kloot is het viervoud van een' kegel wiens grondvlak de groote cirkel en wiens hoogte de *radius* is van den kloot.

I. AANMERKING. Dit Gevolg geeft deze uitdrukking, kloot $= 4 \odot \times \frac{1}{3} R =$ oppervl. $\times \frac{1}{3} R$; het geen de uitdrukking is door LE GENDRE gebezigd. VIII. II. Cor.

II. AANMERKING. Hieruit volgen deze uitdrukkingen.

$$\text{Kloot} = \frac{4 \pi R^3}{3} = \frac{4 \pi M^3}{24} = \frac{\pi M^3}{6}.$$

II. GEVOLG.

En dus is ook de kloot het dubbeld van een' kegel wiens grondvlak de groote cirkel en wiens hoogte de middellijn is van den kloot.

III. GEVOLG.

En de halve kloot is het dubbeld van een' kegel wiens grondvlak de groote cirkel, en wiens hoogte de *radius* is van den kloot.

TACQUET pr. 28. Cor. en pr. 30.

XXI. VOORSTEL.

Een kloot staat tot den *cubus* om denzelven beschreven, als het zesde gedeelte van den omtrek tot de middellijn.

BEWIJS. Uit het XVII. en III. Voorstel; of XVII. Aanm. 2.

GEVOLG.

De kloot staat tot den *cubus* van de middellijn, naar de rede door ARCHIMEDES gegeven, als 11 : 21 : naar die van LUDOLF, als 157 : 300 of 11 : 21, 02.

BEWIJS. Uit VII. 19.

AANMERKING. Hierop steunt op den proportionaal-passer, op de lijn getyteld *Reduc. Corpor. regul.*, waarvan wij in XI. 35. Aanm. 4. gesproken hebben, de afstand waarop het teeken van eenen kloot of *spheer* staat. Immers zij

zij M de middellijn van den kloot, en de zijde of ribbe van den *cubus* daar om beschreven; is *kloot*: *cubus* = 11: 21.02. Zij nu A de middellijn eens kloots gelijk aan den *cubus*: dan is $M^3 : A^3 = 11 : 21.02$: en

$$M : A = \sqrt[3]{11} : \sqrt[3]{21.02}; \text{ en } A = M\sqrt[3]{\frac{21.02}{11}} =$$

$M \times 1.2401$: en deze is op de gemelde lijn des proportionaal passers de afstand van de *spheer* tot het middelpunt, zoo die van den *cubus* gelijk aan 1 gesteld wordt.

XXII. VOORSTEL.

Verschillende *spheeren* staan tot elkander in de driedubbelde rede hunner middellijnen.

EUCL. XII. 18. — St. X, pr. 22. — L, G. VIII. 15. Cor.

BEWIJS. Uit Voorst. XX. Aanm. 2.

I. AANMERKING. De lijn der *cubi* of *ligchamen*, op den *proportionaal-passer*, waarvan in XI. 36. Aanm. gesproken is, dient insgelijks om *spheeren* of *bollen* te vervaardigen die eene bepaalde rede tot elkander hebben: dat is om den *radius* te vinden van eene *spheer* die met eene andere in eene bepaalde rede staan moet: immers die *radii*, of middellijnen, zijn als de cubic-wortels der bewuste rede.

II. AANMERKING. Ook is er op sommige proportionaal-passers eene lijn welke met de woorden *Metalen* wordt uitgedrukt. Deze dient om de middellijnen van kogels te bepalen, die uit verschillende metalen gemaakt worden, en echter een gelijk gewigt moeten houden. Als dan moet men de digtheid, of soortelijke zwaarte, kennen der metalen waaruit de kogels vervaardigd zijn: immers het gewigt is in samengestelde rede der grootte, of hier van den *cubus* der middellijn, en der digtheid. Zij G de digtheid bijv. van Goud: g die van ijzer: M en m de middellijnen van twee gelijkwigtige kogels: dan is

$$G \times M^3 = g \times m^3 : \text{ en dus } M^3 : m^3 = g : G \text{ en } M : m$$

$$= \sqrt[3]{g} : \sqrt[3]{G} = 1 : \sqrt[3]{\frac{G}{g}}.$$ Op die wijze is deze lijn vervaardigd: en de middellijn van een' ijzeren kogel van zeker gewigt gegeven zijnde, zal men die van eenen loden gelijkwigtigen kogel vinden, als men met een' passer de middellijn des gegeven ijzeren kogels stelt tusschen ♂ en ♂ (ijzer) op de beide bladen: en dan met een' passer de opening neemt tusschen ♄ en ♄ (lood) en zoo voorts in alle gevallen.

XXIII. VOORSTEL.

Kleine *sphaeren* hebben meerder oppervlakte met betrekking tot haren inhoud, dan groote: en wel in omgekeerde rede der middellijnen.

BEWIJS. Indien O en *o*, de oppervlakten, I en *i* de inhouden, M en *m* de middellijnen aanduiden, is
O = 4 gr. Cirk. = 4 omtr. gr. Cirk. × ¼ M = omtr. gr. cirk. × M

$I = \pi \times \frac{1}{6} M^3 =$ omtr. gr. cirk. $\times \frac{M^2}{6}$

dus $O : I = 6 : M$ en $\frac{O}{I} = \frac{6}{M}$

insgelijks $\frac{o}{i} = \frac{6}{m}$: en $\frac{O}{I} : \frac{o}{i} = \frac{6}{M} : \frac{6}{m} = m : M$.

XXIV. VOORSTEL.

De oppervlakte van den kloot is gelijkwaaltig aan de *cylindrische* oppervlakte van eenen regthoekigen *cylinder* die om denzelven beschreven is.

TACQUET, *Selecta ex* ARCHIMEDE, pr. 26.

BEWIJS. Uit Voorstel IV. Gev. 2. en Voorstel XVII.

XXV. VOORSTEL. Fig. 240.

Indien er een regthoekige *cylinder* om eenen kloot beschreven is, en men snijdt den *cylinder* en den kloot beiden door vlakken ISQM die loodregt op de as BL staan; zullen de *cylindrische* oppervlakten van ieder stuk [ACMI] van den *cylinder* gelijk zijn aan de ronde oppervlakten van ieder overeenkomend stuk [SBQ] van den kloot.

TACQUET, *Selecta ex* ARCHIMEDE, pr. 26, 27.

BEREIDING. Zij het □ AE de snede van den *cylinder*, door de as, en dus de cirkel FBDL die van den kloot.

BEWIJS. Uit het IV. en XXIV. Voorstel.

AANMERKING. Dit geldt insgelijks voor de sphaerische oppervlakten der *sphaerische - schijven* en der *sphaerische segmenten*: want is oppervlakte *segment* SBQS ∞ oppervl. *cyl.* ACMI en oppervlakte *segment* FSBQD ∞ oppervl. *cyl.* FACD: is het verschil, dat is, oppervlakte *schijf* SQDF ∞ oppervl. *cyl.* IMFD.

Daar

Daar nu het grondvlak van die *cylinders* een groote cirkel des kloots is, en de hoogte, de hoogte van het *spherische segment*, of van de schijf, geeft dit Voorstel dit.

I. GEVOLG.

De oppervlakte van eene schijf, of *segment*, eens kloots, wordt uitgedrukt door den omtrek des grooten cirkels gemultipliceerd door de hoogte van het *segment*, of van de schijf.

L. G. VIII. 11.

II. GEVOLG.

De oppervlakten van twee verschillende *segmenten*, of schijven, van den zelfden bol, of van gelijke bollen, staan tot elkander als hunne hoogten.

L. G. VIII. 11. Cor.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 240.

De *cylinder* is gelijk aan *anderhalf maal* den kloot om welken hij beschreven is, zoo wel wat den inhoud als de *geheele* oppervlakte betreft.

TACQUET, *Selecta ex* ARCHIMEDE, 32. — St. X. 21. — L. G. VIII. 16.

BEWIJS. Voor den *inhoud*. Uit Voorstel XVII. Aanm. 2. en Voorstel II. Gev. 6.

Voor de *oppervlakte*. Uit Voorstel XXIV en Voorstel IV. Gev. 3.

AANMERKING. ARCHIMEDES schatte dit Voorstel zoo hoog, dat hij beval dat men op zijn graf eenen kloot, in eenen *cylinder* beschreven, verbeelden zoude.

I. GEVOLG.

Hieruit blijkt hoe men te verstaan hebbe het geen velen zeggen, dat de kloot gelijk is aan den inhoud van den grooten cirkel, door twee derde gedeelten van de middellijn gemultipliceerd.

St. X. 21. Gev. 2. — L. G. VIII. 15.

XXVII. VOORSTEL.

Indien een kegel en een *cylinder* den grooten cirkel van eenen kloot tot grondvlak hebben, en tot hoogte de middellijn van den kloot: zullen de kegel, de kloot, en de *cylinder* tot elkander staan als, 1, 2, 3.

TACQUET *Selecta etc.* pr. 32. Cor. 1. — St. X. 21. Gev. 1.

BEWIJS. Uit Voorstel II. Gev. 6. Voorstel VIII. en Voorst. XX, Gev. 2.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 236.

De oppervlakte van den kloot staat tot de geheele oppervlakte van den gelijkzijdigen kegel in den zelven beschreven als 16 tot 9.

TACQUET, *Selecta* pr. 39.

BEWIJS. De oppervlakte van den kloot is het viervoud van den grooten cirkel, en die van den kegel het drievoud van het grondvlak (Voorst. X. Gev. 4). Maar groote cirkel van den kloot tot grondvlak van den kegel zoo als $ON^2 : \overline{GF}^2$ of $\overline{OG}^2$
$= \overline{GO}^2 : \overline{OI}^2$ (IV. 15. Gev. 2.) en dus
$= OG^2 : \frac{3}{4} (OG)^2 : = 4 : 3$
en dus oppervlakte van den kloot tot die van den kegel $= 16 : 9$.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 236.

De oppervlakte van den kloot staat tot de geheele oppervlakte van den gelijkzijdigen kegel om denzelven beschreven als 4 tot 9.

TACQUET, *Selecta etc.* pr. 40.

BEWIJS. De oppervl. van kloot GNFO : oppervl. van kegel GOF
$= 16 : 9$. (Voorstel XXVIII.)
Maar, om dat $KI = \frac{1}{2} ON$,
is oppervl van kloot KBID $= \frac{1}{4}$ oppervl. van kloot GNFO.
dus oppervl. van kloot KBID : oppervl. van kegel GOF $= 4 : 9$.

GEVOLG.

Dus is de geheele oppervlakte van den omschreven kegel het viervoud van de geheele oppervlakte van den ingeschreven kegel.

TACQUET, *Selecta* pr. 41.

XXX. VOORSTEL. Fig. 236.

De kloot staat tot den gelijkzijdigen kegel in denzelven beschreven, als 32 tot 9.

TACQUET, *Selecta* pr. 42.

BEWIJS. Kloot KMDIBP : kegel BKD $= 4 \overline{KI}^2 \times CI :$
$BD^2 \times KL$ (Voorst. XX. Aanm. 1, en VIII. Gev. 2.)
$= 16\, CI^3 : BD^2 \times KL$
$= 16\, CI^3 : 3\, CI^2 \times KL$, (VI. 18.)
$= 16\, CI^3 : 3\, CI^2 \times \frac{3}{2}\, CI$ (VI. 17.)
$= 32 : 9$.

XXXI.

XXXI. VOORSTEL. Fig. 236.

De kloot staat tot den gelijkzijdigen kegel om denzelven beschreven, als 4 tot 9.

TACQUET, *Selecta etc.* pr. 44.

BEWIJS. Kloot KMDIBP : kegel GOF $= 4\ KI^2 \times CI : GF^2 \times OI$ (XX. Aanm. 2. en VIII. Gev. 2.)

$= 16 \times CI^3 : GF^2 \times OI$

$= 16 \times CI^3 : 3\ CN^2 \times OI =$ (VI. 18.)

$= 16 \times CI^3 : 3\ CN^2 \times \frac{3}{2}\ CN$ (VI. 17.)

$= 32\ CI^3 : 9\ CN^3$

$= 32\ CI^3 : 9 \times 8\ \overline{CI}^3$

$= 4 : 9.$

AANMERKING. De zelfde rede heeft ook plaats voor de oppervlakten van dien kloot en van dien kegel, zoo als blijkt uit Voorst. XXIX.

GEVOLG.

Dus is de gelijkzijdige kegel om den kloot beschreven, het achtvoud van den gelijkzijdigen kegel binnen den kloot beschreven.

TACQUET, *Selecta etc.* pr. 43.

XXXII. VOORSTEL.

De gelijkzijdige kegel en de regte *cylinder*, beiden om den kloot beschreven, staan, zoo wel voor den inhoud, als voor de *geheele* oppervlakte, tot elkander als de gemelde *cylinder* tot den kloot, of als 3 tot 2.

TACQUET, *Selecta etc.* pr. 45.

BEWIJS. Uit het XXXI. en XXVI. Voorstel.

XXXIII. VOORSTEL. Fig. 236.

Indien een gelijkzijdige kegel en een regte *cylinder*, beide, om den zelfden kloot beschreven zijn; staan hunne *geheele* oppervlakten, hunne bolle oppervlakten, hunne inhouden, hunne hoogten, hunne grondvlakken, als 3 tot 2.

TACQUET, *Selecta etc.* pr. 46.

BEWIJS. Voor de geheele oppervlakten, en de inhouden

kegel : kloot $= 9 : 4$: (XXXI. en XXIX.)

kloot : *cylinder* $= 2 : 3$ (XXVI.)

Dus kegel : *cylinder* $= 3 : 2$

Voor de bolle oppervlakten;
kegel : *cylinder* = $\frac{1}{2}$ GF² : KI² (IV, X, en Boek VII. 14, 16.)
= $\frac{2}{2}$ CN² : 4 IN² (VI. 17.)
= $\frac{3}{2}$ CN² : CN² = 3 : 2.
Voor de hoogten; kegel : *cylinder* = OI : KI = 3 : 2.
Voor de grondvlakken : kegel : *cylinder* = ⊙ op GF : ⊙ op TS + ⊙ op QR
= ⊙ op GF : 2 ⊙ op TS = (VII. 16)
= GF² : 2 TS² = 3 $\overline{CN}^2$: 2 $\overline{CN}^2$ = 3 : 2.

XXXIV. VOORSTEL.

De inhoud eens klootschen *sectors* van den kloot is gelijkhaltig aan dien van een' kegel, wiens hoogte de *radius* van den kloot en wiens grondvlak de oppervlakte van den *sector* is.

TACQUET, *Selecta, etc.* pr. 29. — L. G. VIII. 15

GEVOLG.

De inhoud van den klootschen *sector* wordt gevolgelijk aldus uitgedrukt $\frac{2\pi R \times R}{3} \times H = \frac{2\pi R^2 \times H}{3}$ (VII. 15.)

XXXV. VOORSTEL. Fig. 241.

De inhoud van een *spherisch-segment* is gelijk aan de helft van een' *cylinder* op het zelfde grondvlak staande en de zelfde hoogte hebbende als het *spherisch-segment*, te samen met den inhoud des kloots, waarvan de hoogte des *segments* de middellijn zoude zijn.

L. G. VIII. 18.

BEWIJS. *Sector* CBRDC ∞ *segm.* BPD + kegel BDC
∞ *segm.* BPD + ⊙ BRDO × $\frac{1}{3}$ CS : (Voorst. VIII. Gev. 2.)
dat is, *sector* CBPDC ∞ *segm.* BPD + ⊙ BRDO × $\frac{1}{3}$ (R − H)
waaruit volgt,
1°. *Segm.* BPD ∞ *sector* CBPDC − ⊙ BRDO × $\frac{1}{3}$ (R − H)
∞ $\frac{2 \pi . R^2 . H}{3}$ − ⊙ BRDO × $\frac{1}{3}$ (R − H)

maar 2°. ⊙ BRDO : ⊙ ATaNM = BS² : AC² (VII. 16.)
en BS² = PS × ps = Ps × H = (2 R − H) × H, (V. 13.)
derhalve
3°. ⊙ BRDO : πR² = (2 R − H) × H : R² ∞

4°.

4°. $\odot$ BRDO $= \pi.(2R - H).H = 2\pi.R.H - \pi.H^2$
derhalve
5°. $\pi.R.H = \frac{1}{2}\odot$ BRDO $+ \frac{1}{2}\pi.H^2$
en uit N°. 1. en 4.
6°. *Segm.* BPD $= \frac{2\pi.R^2.H}{3} - \frac{\pi H(2R - H)}{3}.(R - H)$
$= \frac{2\pi.R^2.H}{3} - \frac{2\pi.R^2.H}{3} + \pi.R.H^2 - \frac{1}{3}\pi H^3 =$
$H(\pi.H.R - \frac{1}{3}\pi H^2)$: derhalve uit 6 en 5.
7°. *Segm.* BPD $= H(\frac{1}{2}\odot$ BRDO $+ \frac{\pi H^2}{2} - \frac{1}{3}\pi H^2)$
$= \frac{1}{2}\odot$ BRDO $\times H + \frac{1}{6}\pi.H^3$. Indien dan R de *radius* van het cirkel grondvlak BRDO gesteld wordt, is
8°. *Segm.* BPD $= \frac{1}{2}\pi.R^2 \times H + \frac{1}{6}\pi.H^3$: het geen door (Voorst.II.Gev.5.en XX Aanm.2.) de woorden van het Voorstel uitdrukt.

I. AANMERKING. De formule, *segment* BPD $= \frac{1}{2}\pi.R^2.H + \frac{1}{6}\pi H^3$, hangt van R en van H af: maar men kan ze afhankelijk maken alléén van H, of alléén van R. Indien de As of middellijn des kloots A gesteld wordt is $BS^2 = PS \times Sp$ (V. 13.); $R^2 = H(A - H) = AH - H^2$. Het geen in de formule gesteld geeft $\frac{1}{2}\pi H^2.A - \frac{1}{2}\pi.H^3 + \frac{1}{6}\pi.H^3 = \frac{1}{2}\pi H^2.A - \frac{2}{6}\pi.H^3$: en gevolgelijk oplevert dit

I. GEVOLG.

Een *spherisch-segment* is gelijk aan het verschil tusschen den dubbelden kloot, wiens middellijn is de As des *segments* en den halven *cylinder* die tot hoogte heeft de As des kloots, en tot grondvlak den cirkel, wiens *radius* is de hoogte des *segments*.

II. AANMERKING. Indien men de formule van ons Voorstel wil uitdrukken alleen door R: hervat men $R^2 = AH - H^2$ (Aanm. 1.) waaruit volgt
$H^2 - A.H = -R^2$: en $H^2 - A.H + \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4}A^2 - R^2$
en $H - \frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - R^2}$: waaruit volgt
$H = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4R^2}}{4}$: en derhalve ook
$H^2 = \frac{2A^2 - 4R^2 \pm 2A\sqrt{A^2 - 4R^2}}{4}$, of

H³

$H^2 = \frac{A^2 - 2R^2 \pm A\sqrt{A^2 - 4R^2}}{2}$. Indien men nu voor H en H^2 deze waardijen ſtelt in de formule van de 1. Aanm., te weten *ſegment* $= \frac{1}{2}\,\pi \cdot H^2 A - \frac{2}{3}\,\pi \cdot H^3 = \frac{1}{6}\,\pi\, H^2 \times$ $[3A - 2H]$ verkrijgt men $\frac{1}{12}\,\pi\,[A^2 - 2R^2 \pm 2A\sqrt{A^2 - 4R^2}]$ $\times\ [3A - A \mp \sqrt{A^2 - 4R^2}$: het geen behoorlijk gemultipliceerd, en gereduceerd, geeft

ſegment $= \frac{\pi}{12}\,[A^3 \pm (A^2 + 2R^2)(\sqrt{A^2 - 4R^2})]$.

Indien men nu ſtelt $C^2 = A^2 + 2R^2$: en $E^2 = A^2 - 4R^2 = A - (2R)^2$: zal het *ſegment* uitgedrukt worden door $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}\ A^3 \mp \times C^2 \times \frac{E}{12}$, het geen opgeeft in woorden dit

II. GEVOLG.

Een *ſpherisch ſegment* is, naar mate het kleiner of grooter is dan de halve kloot, gelijkhaltig aan het verſchil of aan de ſom van den halven kloot, en van het twaalfde gedeelte eens *cylinders*, waarvan de *radius* van het grondvlak is de wortel uit de ſom van het vierkant van de As, en het dubbeld vierkant van den *radius* van het grondvlak des *ſegments*, en de hoogte gelijk aan den vierkanten wortel uit het verſchil van het vierkant van de As, en van het vierkant der middellijn van het grondvlak des *ſegments*.

XXXVI. VOORSTEL. Fig. 241.

De inhoud van eene klootſche ſchijf [BDFE], door twee aan elkander evenwijdige cirkels (BRDO en EQFT) gevormd, wordt uitgedrukt door de halve ſom der beide grondvlakken vermenigvuldigd door de halve hoogte, te ſamen met den inhoud des kloots, wiens middellijn is de zelfde hoogte van den ſchijf.

L. G. VIII. 18. — D. G. *Meetk.* §. 968.

BEWIJS. De ſchijf is gelijk aan het verſchil der ſegmenten EPF en BPD: en derhalve (Voorſt. XXXV.) zoo R en *r* de *radii* der grondvlakken, H en *h* de hoogten der ſegmenten zijn, is de ſchijf $= [\frac{1}{2}\,\pi\,R^2 + \frac{1}{6}\,\pi\,H^3] - [\frac{1}{2}\,\pi\,r^2 + \frac{1}{6}\,\pi\,h^3]$ $=$ (Voorſt. XXXV. Aanm. 1.) $[\frac{1}{2}\,\pi\,H^2 . A - \frac{2}{3}\,\pi\,H^3]$ $- [\frac{1}{2}\,\pi\,h^2\,A - \frac{2}{3}\,\pi\,h^3] = \frac{1}{6}\,\pi\,[3\,A\,[H^2 - h^2]$ $- 2\,\pi\,[H^3 - h^3]$. Het geen nader ontwikkeld geeft,

1°. $\frac{1}{6}\pi\,(3\,A.H^2 - 2\,H^3 - 3\,A.h^2 + 2\,h^3)$ of

2°. $\frac{1}{6}\pi\,[3\,A.H^2 - 3\,H^3 + H^3 - 3\,A.h^2 + 3\,h^3 - h^3]$

waaruit

3°. $\frac{1}{6}\pi\,[3\,H(A.H - H^2) - 3h\,(Ah - h^2) + H^3 - h^3]$

en om dat $R^2 = AH - H^2$ en $r^2 = Ah - h^2$

4°. $\frac{1}{6}\pi\,[3\,R^2.H - 3\,r^2.h + H^3 - h^3] =$

$\frac{1}{6}\pi\,[3\,R^2.H - 3\,r^2.h - 3\,r^2.H + 3\,R^2.H - 3\,R^2.(h + 3\,R^2.h) + H^3 - h^3]$

$= \frac{1}{6}\pi\,[3\,R^2.H - 3\,R^2.h + 3\,r^2.H - 3\,r^2.h + H^3 - 3\,r^2.H + 3\,R^2.h - h^3]$

dat is

5°. $\frac{1}{6}\pi\,[3\,R^2\,[H - h] + 3\,r^2\,[H - h] + H^3 - h^3 - 3\,r^2\,H + 3\,R^2.h]$

maar de twee laatste leden van N°. 5.

$-3\,r^2.H + 3\,R^2.h = -3\,(A.h - h^2)\,H + 3\,(AH - H^2)\,h = -3\,A.H.h + 3\,H.h^2 + 6\,A.H.h - 3\,H^2.h = 3\,H.h^2 - 3\,H^2.h.$

Deze waardijen in N°. 5. gesteld zijnde komt

6°. $\frac{1}{6}\pi\,[3\,(R^2 + r^2)\,(H - h) + H^3 - 3\,H^2.h + 3\,Hh^2 - h^3]$

$= \frac{1}{6}\pi\,[3\,(R^2 + r^2\,(H - h) + (H - h)^3].$

Daar nu $H - h = \mathfrak{h}$ de hoogte is van de schijf: heeft men

7°. Inhoud van de schijf des kloots $= \frac{1}{2}\pi.R^2.\mathfrak{h} + \frac{1}{2}\pi\,r^2.\mathfrak{h} + \frac{1}{6}\pi.\mathfrak{h}^3$: het geen de woorden van het Voorstel uitdrukt.

I. AANMERKING. Het blijkt uit de formule dat dit Voorstel ook aldus uitgedrukt hadt kunnen worden.

De inhoud van eene kloотsche schijf door twee aan elkander evenwijdige cirkels gevormd is gelijk aan de som van den inhoud des kloots, die de hoogte der schijf tot middellijn heeft, en van dien des halven *cylinders*, die tot hoogte heeft de hoogte der schijf en tot grondvlak eenen cirkel wiens *radius* is de vierkante wortel uit de som der vierkanten van de *radii* der beide vlakken van de schijf.

II. AANMERKING. LE GENDRE, en na hem DE GELDER, heeft dit Voorstel tot Hoofd-Voorstel genomen en er het voorgaande als een Gevolg uit afgeleid: immers indien $r = 0$: $h = 0$: wordt de schijf een *segment* des kloots: en de formule wordt $\frac{1}{2}\pi\,R^2.H - \frac{1}{6}\pi\,H^3$: dat het voorgaande Voorstel is. Beide bewijzen derhalve dit ons XXXVI. Voorstel onmiddelijk, en uit geheel andere gronden, uit eenige voorafgaande voorzetsels ontleend.

Ik

Ik heb geoordeeld, den inhoud eener fchijf uit dien der *fegmenten* te moeten afleiden: al ware het maar om de overeenkomst te toonen van de formule voor de fchijf door LE GENDRE opgegeven, met die welke daar voor uit het verfchil van twee *fegmenten* wordt afgeleid, en die, in den eerften opflag, daar mede veel fchijnt te verfchillen.

IV. AFDEELING.

OVER DE INSCHRIJVING DER REGELMATIGE LIGCHAMEN IN DEN KLOOT.

XXXVII. VOORSTEL.

Alle regelmatige ligchamen kunnen in eenen kloot befchreven worden.

I. AANMERKING. Men vindt in het XIII, XIV, en XV Boek van EUCLIDES vele voorftellen die infchrijving betreffende; wij zullen alléén aanmerken, vooreerst, dat wanneer een regelmatig ligchaam in eenen kloot befchreven is, de *as* van den kloot ook die van het ligchaam is: en ten tweeden, dat, zoodra de *as* van een regelmatig ligchaam gegeven is, zijne zijden en ribben ook eene bepaalde grootte hebben. Gevolgelijk, om een bepaald ligchaam in eenen bepaalden kloot te befchrijven, moet men 1°. uit de gegeven grootte van de *as* des kloots befluiten, welke de grootte is van de ribben in het gemelde ligchaam: en 2°. de ftippen van de klootfche holle oppervlakte bepalen op welken de hoeken van het ligchaam rusten zullen: welke ribben en hoeken het onderwerp maken van het XXXVIII. en XXXIX. Voorftel.

II AANMERKING. Wat het eerfte gedeelte betreft, men kan zulks gemakkelijk verrigten door het geen wij in de toepasfing van het XXXIII. Voorftel van het XI. Boek gezegd hebben. Wij zullen nu kortheidshalven door A de *as* van den kloot, en dus ook van het ligchaam, en door R de ribbe van het ligchaam uitdrukken. Verder, men kan ook, de *as* des kloots door eene lijn uitgedrukt zijnde, de ribben van alle de regelmatige ligchamen, in dien kloot befchreven, insgelijks door lijnen uitdrukken.

XXXVIII. VOORSTEL. Fig. 242.

Te vinden de hoegrootheid der ribben van ieder der vijf re-

regelmatige ligchamen, wanneer de As des kloots waarin zij beschreven moeten worden, gegeven is: en dezelve door lijnen uitdrukken.

OPLOSSING. Zij dan (Fig. 242.) AB de as van den kloot, AEB de halve cirkel op denzelven, en dus de halve snede van den kloot langs de as.

I. Voor het TETRAEDRUM.

$A = R\sqrt{\frac{3}{2}}$: (XI. 38. N°. 1.)

$R = A\sqrt{\frac{2}{3}} = A \times 0\,8165$

$R^2 = \frac{2}{3}A^2$; of $R^2 : A^2 = 2 : 3$

Deze is de XIII. propositie van het XIII. Boek van EUCLIDES.

Indien men nu maakt $AD : DB : AB = 2 : 1 : 3$; ZD loodregt in D opricht; en AZ trekt: dan is AZ de ribbe van het *tetraedrum*: want 1°. $\overline{ZD}^2 = AD \times DB$ (V. 13.)

$= \frac{2}{3}AB \times \frac{1}{3}AB = \frac{2}{9}AB^2$; voorts $AD^2 = \frac{4}{9}AB^2$

dus $AZ^2 = AB^2 \times \frac{6}{9} = AB^2 \times \frac{2}{3}$: en

$AZ = AB\sqrt{\frac{2}{3}}$.

EUCL. XIII. 13 en 18.

II. Voor het OCTAEDRUM.

is $A = R\sqrt{2}$: (XI. 38. N°. II. 2.)

of $A^2 = 2R^2$

dus $R = \frac{A}{\sqrt{2}}$: of $R : A = 1 : \sqrt{2}$; $R = A \times 0.7071$.

Dit is EUCL. XIII. 14.

Men trekke, uit C, CE loodregt, en dan AE; AE is de ribbe van het *Octaedrum*: want $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 = (\frac{1}{2}AB)^2$; dus $AE = AB\sqrt{\frac{1}{2}}$.

EUCL. XIII. 14 en 18.

III. Voor den CUBUS.

is $A = R\sqrt{3}$: (XI. 38. N°. IV. 2.) dus $R = \frac{A}{\sqrt{3}} = \times 0{,}5774$

of $A^2 = 3R^2$

dus $A^2 : R^2 = 3 : 1$.

Dit is EUCL. XIII. 15.

Trek ZB; ZB is de ribbe van den *cubus*: want

$\overline{ZB}^2 = ZD^2 + DB^2 = \frac{2}{9}AB^2 + \frac{1}{9}AB^2$

$= AB^2 \times \frac{1}{3}$: dus $ZB = AB\sqrt{\frac{1}{3}}$.

EUCL. XIII. 18.

IV. Voor het ICOSAEDRUM.

is $A = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ (XI. 33. N°. III. 1°.)

dus $R = A\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} = A \times 0.5255.$

en $R^2 = A^2 . \left(\frac{2}{5+\sqrt{5}}\right)$

Stel AH = AB: trek HC: uit T, TK loodregt op AB; en dan TB · AT; deze is de ribbe van het *Icosaedrum*:

want TK : KC = HA : AC : IV. 2.) = AB : AC dus KC = ½ TK dus
$TC^2 = TK^2 + KC^2 = 5\,KC^2 = \frac{1}{4}\,AB^2$: en $KC = AB\sqrt{\frac{1}{20}}$.
Ook is AT : AK = AB : AT. (IV. 15.)
dus $AT^2 = AK \times AB$.
Maar $AK = AC - KC = \frac{1}{2}\,AB - AB\sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{1}{2}\,AB\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$
dus $AT^2 = \frac{1}{2}\,AB\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right) \times AB$

$= AB^2 . \frac{(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}} = AB^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$

dus $AT = AB\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = A\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}$.

EUCL. XIII. 16 en 18.

V. Voor het DODECAEDRUM.

is $A = R \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$ (XI. 33. N°. V. 1°.)

$R = \frac{A}{2\sqrt{3}} \times (\sqrt{5}-1) = A\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} = A \times 0.3565$

$R^2 = A^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

Men snijde dus ZB in N, in uiterste en middelste rede: dan is NZ de ribbe van het *Dodecaedrum*:

want $NZ = \frac{1}{2}\,ZB\,(\sqrt{5}-1)$ door IV. 18. Aanm. 2.
maar $ZB = AB\sqrt{\frac{1}{3}}$:
dus $NZ = \frac{AB}{2\sqrt{3}} \times (\sqrt{5}-1) = AB\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} = R$.

EUCL. XII. 17 en 18.

I. AANMERKING. Zie daar de grootte der ribben van de vijf ligchamen in den zelfden kloot beschreven, bepaald, en door lijnen uitgedrukt. EUCLIDES heeft ook, zoo als wij gezien hebben, de grootte van de ribben van het *tetraedrum*, het *octaedrum*, en den *cubus* bepaaldelijk opgegeven; doch niet van het *icosaedrum* en het *dodecaedrum*: en hierin zijn wij dus verder. Hij geeft aan de ribbe van het *icosaedrum* den naam van de *kleine onmeetbare* lijn, en aan die van het *dodecaedrum* den naam van *apotome*, dat is de *afgesnedene*. Men zoude eene vrij omslagtige verklaring van vele stukken uit het zeer moeijelijke X. Boek van EUCLIDES moeten geven om dit alles te verklaren: genoeg zij het hier te herinneren het geen in VI. 22. Gev. 1. gezegd is, en er bij te voege, dat de ribbe van het *icosaedrum* in de daad eene *kleine onmeetbare* is naar de bepalingen van EUCLIDES:

$$\text{want } AT^2 = \frac{AB^2}{10} \times (5 - \sqrt{5}) = \frac{AB}{10} \times AB.(5 - \sqrt{5}):$$

dat is het product van eene meetbare lijn $\frac{AB}{10}$ en eene onmeetbare $AB.(5 - \sqrt{5})$ die een vierde *apotome* is.

II. AANMERKING. Nu blijft er nog overig de inschrijving zelve.

XXXIX. VOORSTEL. I. Fig. 242.

De vijf regelmatige ligchamen in eenen kloot te beschrijven.

I. OPLOSSING voor het TETRAEDRUM.

AZ is de ribbe van het *tetraedrum*: dus zullen de drie ribben, die het driehoekig grondvlak uitmaken, in het vlak van den kleinen cirkel moeten staan, waarvan ZD de *radius* is.

maar $ZD^2 : AB^2 = \frac{2}{9} AB^2 : AB^2 = 2 : 9$

en dus $ZD : AB = \sqrt{2} : 3$ of

$ZD : \frac{1}{2} AB = \sqrt{2} : \frac{3}{2} = 2\sqrt{2} : 3$. En dus zal men den cirkel hebben, in welken men eenen gelijkzijdigen driehoek beschrijft, die met de lijnen naar den top A getrokken het *tetraedrum* zal uitmaken.

EUCL. XIII. 13.

II. OPLOSSING voor het OCTAEDRUM.

Voor het *octaedrum* is AE de ribbe: dus EC de *radius* van den cirkel, waarin het vierkant staat, dat de beide *pyramiden*, welke het vlak van het *octaedrum* uitmaken, vereenigt: en dus, indien men eenen grooten cirkel loodregt op den as stelt, beschrijve men slechts een vierkant in dien cirkel, en trekke men lijnen naar de beide uiteinden van de as.

EUCL. XIII. 14.

III. Oplossing voor het icosaedrum.

AT is de ribbe van het *icosaedrum:* men neemt vooreerst op den kloot eenen kleinen cirkel, loodregt op de as, en waarvan $TK = 2\,KC = 2\,AB\,\sqrt{\tfrac{1}{20}} = AB\,\sqrt{\tfrac{1}{5}}$ de halve middellijn is. Dit komt juist overeen met EUCLIDES XIII. 16, want hij stelt, bijv. in Fig. 124, AD de middellijn van den kloot; maakt $AF : FD = 5 : 1$; trekt BD en neemt die voor den *radius* van den cirkel;

nu is $AD : BD = BD : FD$

en dus $BD = \sqrt{AD \cdot FD} = \sqrt{AD \times \tfrac{1}{5}\,AD} = AD\,\sqrt{\tfrac{1}{5}}$.

Men beschrijve dan verder in dien cirkel eenen vijfhoek, die de vijfhoek DGHBZ fig 228.) zijn zal, welken de vijf gelijkzijdige driehoeken, DIG, HIG, BIH, BIZ, ZID in den top I vereenigd, uitmaken.

Men beschrijft uit den anderen pool B eenen dergelijken cirkel: men laat door de polen, en door twee hoeken van den reeds beschreven vijfhoek, twee halve cirkels gaan, die den tweeden kleinen cirkel in twee stippen snijden: men deelt den boog tusschen die twee stippen in twee gelijke deelen: Men maakt van het stip van deeling af in dien kleinen cirkel eenen vijfhoek, die gelijk zal zijn aan den reeds beschreven, doch zoodanig gesteld dat zijne hoeken loodregt over het midden der zijden van den anderen staan. Men trekt lijnen van de hoeken van den eenen vijfhoek naar de beide uiteinden van de tegenoverstaande zijden van den anderen en van de hoeken van iederen vijfhoek naar den pool, en men heeft het *icosaedrum.*

EUCL. XIII. 16.

IV. Oplossing voor den cubus. Fig. 242.

Daar ZB de ribbe is van den *cubus*, beschrijft men uit B met ZB op de oppervlakte van den kloot eenen cirkel waarvan ZD de *radius* is: dus is die cirkel de zelfde als voor het *tetraedrum.* Indien men in dien cirkel eenen gelijkzijdigen driehoek beschrijft, zijn deszelfs zijden de diagonalen van drie vierkanten van den *cubus*; en dus uit B lijnen trekkende naar de zijden van dien driehoek, heeft men drie ribben van den *cubus.*

Indien men door de polen en de uiteinden van eene der ribben eenen grooten cirkel laat gaan, dan uit den tweeden pool, en om denzelven, eenen gelijken kleinen cirkel trekt als uit den eersten pool; en in denzelven, te beginnen met de plaats daar hij door den gemelden grooten cirkel gesneden wordt, weder eenen gelijkzijdigen driehoek maakt, en naar denzelven uit den tweeden pool lijnen trekt, heeft men wederom drie ribben; dezelve met de anderen vereenigende verkrijgt men de zes overige, en dus den geheelen *cubus.*

EUCL. XII. 15.

V. Oplossing voor het dodecaedrum.

De beschrijving van het *dodecaedrum* hangt van den *cubus* af: de *cubus* eens beschreven zijnde, zijn de acht stippen daar de acht hoeken van den *cubus* raken, ook acht stippen waarop acht der hoeken van het *dodecaedrum* rusten. Indien men de ribben van den *cubus* in twee gelijke deelen snijdt, en de tegenovergestelde deelings-stippen met lijnen vereenigt, zullen deze zich op ieder vierkant, of zijde, van den *cubus*, in het middelpunt van dat vierkant vereenigen. Indien men dan op eene dier lijnen, in een dier vierkanten genomen, ter

ter wederzijde van het middelpunt, de helft stelt van het grootste der twee stukken van de zijde des *cubus*, wanneer die in uiterste en middelste rede gesneden is, en uit de uiteinden dier halve stukken loodlijnen tot aan de holle oppervlakte van den kloot, rigt: zal de lijn die de uiteinden van deze loodlijnen bespant de ribbe zijn van het *dodecaedrum*; en dus de uiteinden van die ribbe met de naastliggende hoeken van den *cubus* vereenigende, verkrijgt men reeds vijf ribben van het *dodecaedrum*: men gaat op dezelfde wijze voort voor ieder vlak van den *cubus*: met dit onderscheid, dat men in de vier vlakken, die aan het vlak dat men voor het eerste genomen heeft grenzen, niet de lijnen neemt welke met de gebruikte lijn evenwijdig zijn, maar die welke met deze regte hoeken maken. Men verkrijgt dus voor ieder vlak, vijf ribben: en gevolgelijk voor de zes, de dertig ribben van het *dodecaedrum*.

EUCL. XIII. 17.

AANMERKING. Indien men nu de vijf ligchamen in eenen en den zelfden kloot beschrijven wil, moet de as van alle de zelfde zijn, de middellijn namelijk van den kloot: er blijft dan niets overig dan de ribben te vinden: en men verkrijgt uit het geen hier boven gezegd is, en noemende A de as van den kloot, het volgend

XL. VOORSTEL.

De oppervlakte en den inhoud te bepalen van ieder der vijf regelmatige ligchamen in den zelfden kloot beschreven.

I. Voor het TETRAEDRUM.

Ribbe $= A \times \sqrt{\tfrac{2}{3}}$: (Voorst. XXXVIII. No. I.)

Oppervlakte $= R^2 . \sqrt{3} = 2\, A^2 \times \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ (XI. 35. Gev. 2.)

Inhoud $= R^3 . \dfrac{1}{6\sqrt{2}} = \dfrac{A^3}{9\sqrt{3}}$

II. Voor het OCTAEDRUM.

Ribbe $= \dfrac{A}{\sqrt{2}} = A \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. (Voorst. XXXVIII. No. II.)

Oppervlakte $= 2\, R^2 \sqrt{3} = A^2 \sqrt{3}$ (XI. 35. Gev. 3.)

Inhoud $= \dfrac{A^3}{6}$.

III. Voor het ICOSAEDRUM.

Ribbe $= A \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = A \sqrt{\dfrac{2}{5 + \sqrt{5}}}$ (Voorstel XXXVIII. No. V.)

Oppervlakte $= 5\, R^2 \sqrt{3}$ (XI. 35. Gev. 4.)

$= 5\, A^2 \left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \sqrt{3} = A^2 \left(\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \sqrt{3}$

 In-

Inhoud $= R^3 \times \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})$ (XI. 35. Gev. 4)

$= \frac{10}{12} A^3 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2(5 - \sqrt{5})}}$

$= \frac{10}{12} A^3 \sqrt{\frac{2}{5(5 - \sqrt{5})}} = \frac{1}{6} A^3 \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

IV. Voor den CUBUS.

Ribbe $= A \times \sqrt{\frac{1}{3}}$

Oppervlakte $= 2 A^2$

Inhoud $= \frac{A^3}{3\sqrt{3}}$.

V. Voor het DODECAEDRUM.

Ribbe $= A \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}}\right) = A \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}$ (Voorstel XXXVIII. N°. V.

Oppervl. $= 15 R^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = 5 A^2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$

$= 5 A^2 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$ (XI. 35. Gev. 5.)

Inh. $= R^3 \sqrt{\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}} = A^3 \times \frac{5}{12} \sqrt{\frac{2(3 + \sqrt{5})}{15}}$

$= \frac{A^3}{12} \sqrt{\frac{30 + 10\sqrt{5}}{3}}$.

I. GEVOLG.

De oppervlakte van het *dodecaedrum* staat tot die van het *icosaedrum* als de ribbe van den *cubus* tot die van het *icosaedrum*.

EUCL. XIV. 4.

BEWIJS. De oppervlakte van het *dodecaedrum* staat tot die van het *icosaedrum*.

$= 5 A^2 \cdot \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} : 5 A^2 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \sqrt{3}$

$= 1 : \sqrt{3} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$.

II.

II. GEVOLG.

Het *dodecaedrum* staat tot het *icosaedrum* als de ribbe van den *cubus* tot die van het *icosaedrum*.

EUCL. XIV. 5.

BEWIJS. *Dodecaedrum: icosaedrum* =

$$= A^3 \times \tfrac{5}{12} \sqrt{\frac{2\,(3 + \sqrt{5})}{15}} : \tfrac{10}{12}\, A^3 \sqrt{\frac{2}{5\,(5 - \sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}} : 2\sqrt{\frac{1}{5 - \sqrt{5}}}$$

$$= 1 : 2\sqrt{\frac{8}{(3 + \sqrt{5})\cdot(5 - \sqrt{5})}}$$

$$= 1 : 2\sqrt{\frac{8\,.\,(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})\cdot(3 - \sqrt{5})\cdot(5 - \sqrt{5})}}$$

$$= 1 : \sqrt{\frac{8\,(3 - \sqrt{5})}{5 - \sqrt{5}}} := \sqrt{\tfrac{1}{8}} : \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$$

: als de ribbe van den *cubus* tot die van het *icosaedrum*.

III. GEVOLG.

Dus hebben de oppervlakten van het *dodecaedrum* en *icosaedrum* de zelfde rede tot elkander als de inhouden dier zelfde figuren; namelijk die van de ribbe van den *cubus* tot die van het *icosaedrum*.

IV. GEVOLG.

De ribbe van den *cubus* staat tot die van het *icosaedrum* als de lijn wier vierkant gelijk is aan het vierkant van eene lijn in uiterste en middelste rede gesneden te samen met het vierkant van het grootste stuk, tot de lijn wier vierkant gelijk is aan het vierkant van de gemelde gesneden lijn te samen met dat van het kleinste stuk.

BEWIJS. Zij L eene lijn in uiterste en middelste rede gesneden, zij G het grootste, K het kleinste stuk: dan is (IV. 18. Aanm. 1.)

$G = \frac{L}{2}(\sqrt{5} - 1)$ en door IV. 18. Aanm. 2.

$K = \frac{L}{2}(3 - \sqrt{5})$; en dus

$$\sqrt{L^2 + G^2} : \sqrt{L^2 + K^2} = \sqrt{L^2 + \frac{L^2\cdot(\sqrt{5} - 1)^2}{4}} :$$

$\sqrt{L^2}$

$$\sqrt{L^2 + \tfrac{1}{4} L^2 (3 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} : \sqrt{18 - 6\sqrt{5}}$$

$$= 1 : \sqrt{\frac{3(3 - \sqrt{5})}{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$$

= ribbe van den *cubus* tot die van het *icosaedrum*. Maar $\sqrt{L^2 + G^2}$ en $\sqrt{L^2 + K^2}$ zijn de zijden wier vierkanten, dat is de vierkanten op dezelve gemaakt, gelijk zijn aan de sommen der vierkanten op de geheele lijn en het grootste of kleinste stuk.

V. GEVOLG.

De driehoek van het *icosaedrum*, en de vijfhoek van het *dodecaedrum*, kunnen in den zelfden cirkel beschreven worden.

EUCL. XIV. 2.

BEWIJS. De *radius*, (of straal) des cirkels waarin een gelijkzijdige driehoek beschreven is, is $S = R\sqrt{\tfrac{1}{3}}$:

doch hier $R = A\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$: dus

$$S = A\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3(5 - \sqrt{5})}}.$$

De *radius* van den cirkel waarin een vijfhoek beschreven wordt, is $S = R\sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$. (VI. 22. Gev. 1.)

Maar $R = A\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{3}}$:

$$\text{dus } S = A\sqrt{\frac{2(\sqrt{5} - 1)^2}{4 \times 3(5 - \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{2(6 - 2\sqrt{5})}{4 \times 3(5 - \sqrt{5})}}$$

$= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3(5 - \sqrt{5})}}$: en dus die *radius* gelijk aan den *radius* van den cirkel waarin de driehoek van het *icosaedrum* kan beschreven worden.

AANMERKING. Op sommige *proportionaal-passers* is eene lijn, die den titel voert *corporum regul. inscriptio*; op welke de vijf regelmatige ligchamen en de kloot zijn afgebeeld. De afstand van het middelpunt des passers af, tot het teeken van den kloot toe, is de middellijn van den kloot; en de afstanden van het middelpunt tot *tetraedrum*, *octaedrum*, *cubus*, *ico-*

sae-

saedrum, *dodecaedrum*, duiden respectivelijk aan de grootte der ribben van ieder dezer ligchamen, op dat zij in den kloot ingeschreven zullen kunnen worden. Die afstanden zijn dus in de zelfde rede als de lijnen AZ, AE, ZB, AT, NZ, in de fig. 242. voor eenen kloot waarvan AB de as, of middellijn, is.

V. AFDEELING.

OVER DE CIRKELS DIE OP DE OPPERVLAKTE DES KLOOTS GETROKKEN WORDEN EN DE MAAT DER DEELEN WELKE DAARUIT ONTSTAAN.

XLI. VOORSTEL. Fig. 241.

Indien men uit het middelpunt C van den kloot, in de vlakken PA*p*P en PM*p*P van twee groote cirkels PA*p*P en PM*p* die elkander snijden, loodlijnen CA en CM trekt, op de gemeene snede, of op de As, P*p*: is de hoek ACM welke die loodlijnen vormen de helling der twee cirkelvlakken PA*p*P en PM*p*P: en de boog AM des grooten cirkels, die door de uiteinden der loodregte *radii* CA, CM gaat, is de maat van die helling.

BEWIJS. Uit X. Bep. 5.

GEVOLG.

Indien men uit een ander stip K van de as insgelijks de loodlijnen KE, KI trekt, zal ook de hoek EKI, waarvan de boog EI des kleinen cirkels EIF, evenwijdig aan AM*a*, de maat is, de helling aanduiden der beide vlakken PA*p*P en PM*p*P: en deze wordt insgelijks aangeduid door den hoek *y*P*z* welke de raaklijnen P*y*, P*z* der cirkels PA*p*, PM*p* onderling in den pool P maken.

XXIV. BEPALING. Fig. 241.

De hoek EPI [of APM], welke twee bogen van groote cirkels, die elkander op de oppervlakte des kloots snijden, in het snijdings-stip P maken, wordt *klootsche* of *sphærische hoek* genoemd.

D. G. §. 946.

GEVOLG.

De maat van dien hoek is de regtlijnige hoek yPz, door de raaklijnen dier cirkels in den top des hoeks gevormd: of ook de regtlijnige hoek die door lijnen uit eenig ſtip van de gemeene as, op dezelve, in de vlakken dier cirkels loodregt getrokken, gevormd wordt.

L. G. VII. 8.

XLII. VOORSTEL. Fig. 241.

Wanneer men uit het middelpunt C eens grooten cirkels AMa eene loodlijn PCp op het vlak van dien cirkel trekt, zullen de uiteinden P en p van dezelve op de oppervlakte des kloots even ver af ſtaan van alle de ſtippen in den omtrek van dien cirkel genomen: gelijk mede van alle de ſtippen in den omtrek van iederen kleinen cirkel EIF die aan gemelden grooten cirkel evenwijdig is.

L. G. VII. 6.

BEWIJS. Om dat alle de bogen PA, PM, PN, enz vierde gedeelten des omtreks zijn: en dat, vermits ⊙ EIF // ⊙ AMa, ook de bogen EA, IM, Fa onderling gelijk zijn, gelijk ook de bogen PE, PI, PF.

XXV. BEPALING. Fig. 241.

Men noemt *pool* van een' cirkel op de oppervlakte eens kloots beſchreven, dat ſtip P dier oppervlakte, hetwelk even ver afſtaat van alle de ſtippen van den omtrek diens cirkels.

L. G. VII. def. 5.

I. GEVOLG.

Ieder cirkel EIF, of AMa op de oppervlakte eens kloots beſchreven heeft twee polen P en p die over elkander ſtaan, of ieder eenen halven omtrek van elkander verwijderd zijn, en door eene lijn welke door het middelpunt van den kloot gaat, en dus door eene as, veréénigd worden.

II. GEVOLG.

Voor eenen grooten cirkel ſtaat de pool 90 graden van deszelfs omtrek af.

III. GEVOLG.

De cirkelboog die op de oppervlakte des kloots de beſtendige maat is van eenen klootſchen hoek, (Voorſt. XLI. Gev.) en de boog eens grooten cirkels is, heeft tot *pool* den top van gemelden hoek.

XLIII.

XLIII. VOORSTEL. Fig. 241.

Wanneer twee cirkels [PMp, AMa] zich op de oppervlakte eens kloots snijden, en derzelver vlakken loodregt op elkander staan, maken zij onderling regte hoeken; de cirkels, omtrekken dier vlakken, gaan door de *polen* de een van den anderen: en zij maken om het stip van snijding vier regte hoeken.

GEVOLG. Fig. 244.

Wanneer het vlak eens cirkels PMp schuins op het vlak eens anderen cirkels AMa valt: is in het stip van snijding [M], de eene hoek op de oppervlakte des kloots grooter, de andere kleiner dan regt: te samen maken zij twee regte: de schuinsche hoeken AMp, pMa zijn onderling gelijk: en de hoeken rondom dat stip M zijn te samen gelijk aan vier regte hoeken.

AANMERKING. Het zelfde heeft dan ten deze opzigte plaats voor klootsche als voor regtlijnige hoeken.

XLIV. VOORSTEL. Fig. 244.

De hoek [EPL] welke de bogen EP, PL van twee groote cirkels PEp, PLp, uit het zelfde stip P op de oppervlakte des kloots getrokken onderling maken, is grooter dan de regtlijnige hoek [EPL], die in het zelfde stip [P] door de choorden [EP, PL) dier bogen gemaakt wordt.

BEREIDING. Trek uit E in het vlak PEpP de loodlijn ET, op de gemeene snede d. i. op de as Pp: en uit T in het vlak PLpP de loodlijn TU, die de choorde PL ontmoet in U: trek verder EU.

BEWIJS. EP > TE en PU > TU: beide de driehoeken EPU en ETU hebben de zelfde grondlijn EU: derhalve hoek EPU < ∠ ETU: maar ETU is de maat der helling van de beide vlakken PEpP, en PLpP: dat is, is de maat des klootschen hoeks EPL (Voorst. XLI. Gev.): waaruit het Voorstel volgt.

AANMERKING. Dit Voorstel wordt reeds gevonden bij STEVIN, in het bewijs van het XIV. Voorstel in het derde Boek der *Cosmographie*.

XLV. VOORSTEL. Fig. 244.

Wanneer twee groote cirkels [PApEP, en PMpLP] van den kloot, elkander op deszelfs oppervlakte snijden, zal het volgende plaats hebben. 1°. Die cirkels snijden zich in twee stippen P en p zoodanig gesteld dat de lijn Pp, die dezelve

vereenigt, door het middelpunt C van den kloot gaat, en dus eene *as* is van dezen: 2°. Zij verdeelen elkander in twee gelijke deelen, die gevolgelijk ieder een halve omtrek des cirkels zijn: 3°. zij verdeelen de oppervlakte des kloots in vier deelen, waarvan de twee tegen elkander overgestelde, PA*p*MP en *p*EPL*p*; *p*MPE*p* en PA*p*LP, onderling gelijk zijn.

BEWIJS. Uit den aard zelven van den kloot.

XXVI. BEPALING. Fig. 241.

De *strooken* PA*p*MP, *p*MP*ap*, *p*NP*a*, en PA*p*NP, welke door de onderlinge snijding van twee groote cirkels op de oppervlakte des kloots gevormd worden, en gevolgelijk wederzijds eindigen in de polen P en *p*, uiteinden der gemeene middellijn P*p*, of der gemeene snede van de vlakken PA*p*, PM*p*, PN*p*, *pa*P, dragen den naam van *spherische schuitjes: (fuseaux sphériques)*.

L. G. VII. def. 9.

AANMERKING. *Schuitje* is de naam welke die strooken in de Globe-fabrieken dragen. Het is bekend dat de kaarten waar mede de oppervlakten der *Globes* bedekt worden, uit dergelijke naast elkander geplaatste *schuitjes* bestaan, welke op de oppervlakte van de *Globe* geplakt, dezelve geheel bedekken.

XXVII. BEPALING. Fig. 241.

De ruimte welke bevat is tusschen twee cirkel-vlakken PA*p*P en PM*p*P (van twee groote cirkels) die elkander in de *As* P*p* snijden, d. i. dat gedeelte van den inhoud des kloots, dat door die twee cirkelvlakken, tusschen de as en het *spherisch-schuitje* PA*p*M*p* begrepen is, draagt den naam van *spherische keg* (*coin-sphérique*) en ook van *tweevlakkigen bolvormigen sector*.

L. G. VII. def. 10. — D. G. §. 941.

XLVI. VOORSTEL. Fig. 241.

De oppervlakte van eene spherische *strook*, of *spherisch-schuitje* [PA*p*P], staat tot de geheele oppervlakte des kloots, als de hoek, welken de vlakken, die het gemelde schuitje vormen, onderling maken, tot vier regte hoeken: of, zoo als de boog AM welke de maat is diens hoeks tot den geheelen omtrek. In de zelfde rede staat de inhoud der *klootsche keg*, of des tweevlakkigen *bolvormigen sectors*, tot den inhoud des kloots.

L. G. VII. 20. — D. G. §. 942.

BEWIJS. Dit wordt op de zelfde wijze bewezen als VIII. 1 en 2.

I.

I. AANMERKING. Indien men de oppervlakte van het schuitje door S, den boog die de maat is van den hoek welken de vlakken van het schuitje onderling maken, door B, de oppervlakte der kloots door de Grieksche letter (Ω), genoemd *oméga* of lange O uitdrukt, is door dit Voorstel $S = \frac{B \cdot \Omega}{4 \cdot L}$: en daar uit, (door dit Voorstel en door VII. 14. Gev. 1.) is $S = \frac{B \cdot \times 4 r^2 \pi}{360^\circ} = \frac{B \times \pi \times r^2}{90^\circ.}$: waar door, de boog B bekend zijnde, de oppervlakte van het schuitje in gedeelten van de oppervlakte des kloots tot welken het behoort, bepaald wordt: zoo $B = 90^\circ$. is $S = \frac{30^\circ. \times \pi \cdot r^2}{90^\circ.} = \frac{\pi \cdot r^2}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{12} = \frac{\Omega}{12}$, of aan het twaalfde gedeelte der oppervlakte van den kloot: en het zelfde gedeelte van des kloots inhoud is de inhoud van de klootsche keg wier boog is 30°.

DE LAMBRE, *Abrégé d'Astronomie*, *Leçon* IV. §. 74.

II. AANMERKING. Men heeft ook door VII. 19. Aanm. 4.
$S = \frac{B \cdot \pi \cdot r^2}{90^\circ.} = \frac{B \times 3.14159265 \times r^2}{324000''.} =$ (VIII. 10. Gev. 2.) $B \cdot r^2 \cdot \mathit{fin.}\ 2''$. waar door de oppervlakte van het schuitje in vierkante deelen van den *radius* des kloots wordt uitgedrukt.

XXVIII. BEPALING. Fig. 244.

Wanneer drie *groote cirkels* zich op de oppervlakte eens kloots snijden, wordt het gedeelte der oppervlakte, dat door drie bogen PE, PL, LE van die cirkels bepaald wordt, *klootsche driehoek* genoemd: en de bogen waaruit deze bestaat, zijn deszelfs *zijden*.

L. G. VII. 6. — D. G. §. 947.

AANMERKING. De namen van gelijkzijdige en gelijkbeenige driehoeken hebben de zelfde beteekenis als voor de regtlijnige driehoeken.

I. GEVOLG.

Een klootsche driehoek bestaat uit drie bogen van groote cirkels die met den zelfden *radius* beschreven zijn.

II. GEVOLG.

Een klootfche driehoek behoort dus altijd tot eenen bepaalden kloot, wiens *radius* gegeven is, en van wiens oppervlakte hij een gedeelte uitmaakt: de driehoek kan van die oppervlakte flechts bij aftrekking gefcheiden worden.

III. GEVOLG.

Het gedeelte van de oppervlakte des kloots, dat door eenen klootfchen driehoek beperkt wordt, hangt af, en van de grootte der bogen en van de grootte der hoeken van dien driehoek: zoo dat, indien op den zelfden kloot twee driehoeken befchreven zijn, wier zijden gelijk zijn, ieder aan ieder, en waarin de hoeken tusfchen gelijke zijden begrepen ook gelijk zijn ieder aan ieder, de oppervlakten dier twee klootfche driehoeken gelijk zullen zijn.

XXIX. BEPALING., Fig. 243.

Men noemt *drievlakkige klootfche pyramide* de *pyramide* die er in het middelpunt C des kloots gevormd wordt, uit de vlakken, PCE, ECL, PCL, die door de bogen PE, EL, PL, zijden diens klootfchen driehoeks op de oppervlakte des kloots befchreven, en de *radii* EC, PC, LC beperkt zijn, en uit de oppervlakte des klootfchen driehoeks zelve PEL als grondvlak.

D. G. §. 947. noemt de drievlakkige *klootfche pyramide*, *drievlakkigen bolvormigen fector*; waarvan het grondvlak een *bolvormige*, *klootfche* of *fpherifche driehoek* is.

AANMERKING. Deze drievlakkige *pyramide* verfchilt dan van die waarvan in het XI. Boek gehandeld is, alleen door het grondvlak, welke hier geen platte maar een klootfche driehoek is, d. i. eene bolle oppervlakte, die een gedeelte uitmaakt van de oppervlakte zelve des kloots: gelijk de geheele *pyramide* een gedeelte is van deszelfs inhoud.

GEVOLG.

De vlakke hoeken die te famen den ligchamelijken tophoek der gemelde *pyramide* uitmaken, hebben ieder tot maat den boog, dat is de zijde des klootfchen driehoeks, welke het vlak van dien hoek op de oppervlakte des kloots beperkt.

XLVII. VOORSTEL.

In eenen klootfchen driehoek waarvan de drie zijden eene bepaalde grootte hebben, zijn ieder der drie hoeken ook bepaald: en indien twee zijden en de hoek tusfchen dezelve

be-

begrepen bepaald zijn, heeft de derde zijde ook eene bepaalde grootte.

BEWIJS. Men trekke uit L in het vlak PCL, LB loodregt op PC: en uit B, BD loodregt op PC in het vlak PCE; vervolgens in het vlak ECL, DL.

Om dat boog PL gegeven is, is ∠PCL gegeven: en derhalve zijn LB *finus* en BC *cofinus* bepaald. In △ BCD is BC bepaald: ∠ CBD regt, en ∠ PCE gegeven om dat ⌒ PE gegeven is: derhalve is CD bepaald. In △ CDL zijn gegeven DC, CL, en ∠ DCL om dat ⌒ EL bepaald is; derhalve is DL bepaald: gevolgelijk zijn in △ DBL, de drie zijden bepaald: derhalve ook ∠ DBL: maar deze is de maat des klootschen hoeks EPL, die dan ook bepaald is: en zoo voor ieder der hoeken.

Indien alleen de bogen PE, PL gegeven zijn met den hoek EPL: dan zijn in den regtlijnigen driehoek DBL, BL en BD en ∠ DBE bepaald: des ook DL: en derhalve in △ DCL, CD, DL, CL: gevolgelijk ∠ ECL: wiens maat is de boog EL.

I. GEVOLG.

Indien dan op de oppervlakte des zelfden kloots twee driehoeken beschreven zijn, waarin de drie zijden gelijk zijn ieder aan ieder: zullen de hoeken die tusschen gelijke zijden begrepen worden ook gelijk zijn: en de driehoeken zijn in alle opzigten gelijk.

St. Kl. Dr. §. 63. — L. G. VII. 14.

II. GEVOLG.

Indien op de oppervlakte van den zelfden kloot twee driehoeken beschreven zijn, waarin twee zijden gelijk zijn ieder aan ieder, en de begrepen hoek ook gelijk: is de derde zijde gelijk aan de derde, en dus ook zijn die driehoeken in alle opzigten gelijk.

St. Kl. Dr. §. 59.

III. GEVOLG.

Uit beide die gevolgen wordt nog opgemaakt, dat indien men in eenen gelijkbeenigen driehoek, uit den top, den boog eens grooten cirkels op het midden der overstaande zijde trekt, 1°. die boog daarop loodregt staan zal: 2°. dat de hoeken op die grondzijde in den gelijkbeenigen driehoek gelijk zijn: en omgekeerd.

St. Kl. Dr. §. 60. — L. G. VII. 15.

XLVIII.

XLVIII. VOORSTEL. Fig. 243.

In alle klootsche driehoeken zijn twee zijden te samen grooter dan de derde: geen zijde, of geen hoek kan van 180 graden zijn; en de drie zijden te samen zijn altijd kleiner dan de geheele omtrek eens cirkels.

L. G. VII. 2 en 4.

BEWIJS *voor het* I. Uit Bep. XXIX. Gev. en XI. 1.

Voor het II. Indien een der hoeken, bij v. E P L, twee regte bedroeg, was er geen klootsche driehoek meer, maar alleen uit twee bogen een spherisch schuitje; insgelijks indien een der bogen den halven omtrek uitmaakt.

Voor het III. Fig. 244. Om dat ⌒ PE + ⌒ PL > ⌒ LE, is ⌒ pE + ⌒ PE + ⌒ PL + ⌒ pL > ⌒ LE + ⌒ PE + ⌒ PL

d. i.

360°. > ⌒ LE + ⌒ PE + ⌒ PL.

AANMERKING. Men kan wel eenen klootschen driehoek onderstellen, waarin eene zijde grooter zoude zijn dan een halven cirkel, en de daar over staande hoek grooter dan twee regte: maar dan ware die hoek uitspringend: en de vlakken die denzelven vormen, zouden met het vlak wiens boog is de derde zijde, grooter dan de halve omtrek, aan den anderen kant eenen klootschen driehoek uitmaken, waarin alles volgens dit Voorstel plaats heeft, en wiens hoeken en bogen uit die des gegeven driehoeks bepaald zijn. Zoo dat de eerstgemelde driehoeken, waarin iedere zijde kleiner dan de halve omtrek, en iedere hoek kleiner dan twee regte is, hier alleen in aanmerking komt.

L. G. VII. 19. *Scholie.*

XLIX. VOORSTEL.

In alle klootsche driehoeken staat de grootste hoek over de grootste zijde: en omgekeerd.

BEWIJS. Fig. 245. Zij in △ ABC, ∠ A > ∠ B: maak ∠ BAL = ∠ B: dan is AL = BL: maar AL + LC > AC: derhalve BL + LC of BC > AC.

Indien BC > AC: is ∠ BAC > ∠ B: want ware dezelve gelijk, zoude BC = BA zijn: en indien ∠ BAC < ∠ B zoude BC < AC zijn: dat beide tegen de onderstelling strijdt.

St. Kl. Dr. §. 66. — L. G. VII. 16.

L. VOORSTEL.

De drie hoeken eens klootschen driehoeks zijn te samen kleiner dan zes, en grooter dan twee regte hoeken.

L. G. VII. 19.

BEWIJS. *voor het* I. Uit Voorstel XLVIII.

Voor het II. Om dat, uit Voorst. XLIV, ieder klootsche hoek grooter is dan de regtlijnige die gemaakt wordt door de choorde zijner bogen, zullen de drie te samen grooter zijn dan de som der drie regtlijnige van den driehoek der choorden: en gevolgelijk dan twee regte hoeken.

I. GEVOLG.

De overmaat der drie hoeken eens klootschen driehoeks boven de som der hoeken in den regtlijnigen driehoek der choorden, of boven twee regte, wordt genoemd *sphersch exces*.

II. GEVOLG.

De som der drie hoeken eens klootschen driehoeks heeft dan, in tegendeel van het geen voor de regtlijnige plaats heeft, geen bepaalde grootte, en men kan uit twee derzelve de grootte van den derden niet opmaken.

III. GEVOLG.

Een klootsche driehoek kan niet alléén éénen stompen of éénen regten hoek bezitten; maar twee, of drie, zoo wel stompe als regte.

IV. GEVOLG.

Indien twee hoeken te samen kleiner zijn dan 90°: is de derde hoek grooter dan 90°.

XXX. BEPALING.

Een klootsche driehoek draagt den naam van *regthoekigen* of van *stomphoekigen*, al is maar ééne van deszelfs hoeken regt, of stomp: maar de drie hoeken moeten alle scherp zijn, zal hij den naam van scherphoekigen voeren.

LI. VOORSTEL. Fig. 244.

Indien men twee zijden [PA, PM] eens klootschen driehoeks [APM] op de oppervlakte eens kloots beschreven, verlengt, zullen zij elkander niet weder ontmoeten, dan wanneer zij, gerekend uit den top [P] des hoeks dien zij bevatten, ieder tot eenen halven omtrek (PAp, PMp) verlengd,

lengd, zich in een stip [p] vereenigen, dat, als een tweede pool vlak over den pool [P], top des hoeks, staat. Die aldus verlengde bogen zullen een *spherisch schuitje* uitmaken, dat door de derde zijde [AM] des gegeven driehoeks, in twee driehoeken verdeeld wordt, die gelijke grondzijden, gelijke tophoeken hebben: en waarin de overige hoeken en de overige zijden in den eenen, respectivelijk de supplementen zijn der aangrenzende hoeken, of zijden, in den anderen.

BEWIJS. Uit den aard der zaken en Voorst. XLIII. Gev.

AANMERKING. Zoo de twee zijden des driehoeks ieder 90°. bevatten: zullen de twee driehoeken die aldus gevormd worden, in alle opzichte gelijk zijn: en de hoeken die door de derde zijde met ieder der twee andere gevormd worden, zullen regt zijn: het geen in andere woorden opgeeft dit

GEVOLG.

Indien twee zijden van een' driehoek tot 90°. verlengd worden: zullen die aldus verlengde zijden loodregt staan op den grooten cirkel die door hare uiteinden gaat; en de boog diens grooten cirkels tusschen gemelde uiteinden begrepen zal de maat zijn des klootschen hoeks welke gemelde zijden onderling maken.

St. Kl. Dr. §. 51.

LII. VOORSTEL. Fig. 246.

Indien men van een' klootschen driehoek ABC, wiens zijden kleiner zijn dan negentig graden, de bogen verlengt tot dat zij, te rekenen van den top des hoeks dien zij vormen, ieder 90 graden bedragen, en dan uit den top van iederen hoek, door de uiteinden der aldus verlengde zijden cirkels trekt; zullen die drie cirkels elkander ontmoeten, en eenen nieuwen klootschen driehoek vormen; waarin de top van iederen hoek de pool zal zijn der tegenoverstaande zijde in den gegeven driehoek: en de top van iederen hoek van den gegeven driehoek is de pool van de tegenoverstaande zijde in den nieuw gevormden driehoek.

BEWIJS. Om dat de bogen CI en CH ieder 90 graden bedragen, is C de pool des cirkels MIHN en staat 90°. van M en van N af.

Om de zelfde rede is B de pool van den boog MDEO: en derhalve staat B 90°. van M en van N af. Maar M staat ook 90 gr. van C: derhalve is M de pool van den boog BC, of ECBH.

Op de zelfde wijze wordt bewezen dat A de pool is van den boog OFGN: O de pool van boog AB: en N de pool van AC: waaruit het Voorstel volgt

XXXI. BEPALING.

De driehoek, beschreven op de wijze in het voorgaande Voorstel aangeduid, wordt *pool-driehoek*, en ook *supplement-driehoek* van den gegeven driehoek genoemd.

AANMERKING. De reden, waarom die driehoek *pool-driehoek* genoemd wordt, blijkt uit het voorgaande Voorstel: het volgende zal de reden van den naam *supplement-driehoek* doen zien.

LIII. VOORSTEL.

In den *pool-driehoek* [MON] van eenen gegeven driehoek, zijn de zijden de supplementen van de overstaande hoeken in den gegeven driehoek: en de hoeken de supplementen van de zijden.

BEWIJS *van het* I. $\frown DG$ is de maat van den hoek O; $\frown HE$ die van den hoek M; $\frown IF$ die van den hoek N.

Maar $\frown DG = \frown DB + \frown BG = 90^\circ. + 90^\circ. - \frown AB = \angle O = 180^\circ - \frown AB$;

insgelijks $\frown HE = \angle M = 180^\circ - \frown BC$;

$\frown IF = \angle N = 180^\circ - \frown AC$.

BEWIJS *van het* II. $\frown MN = \frown MH + \frown HN = 90^\circ. + 90^\circ. - \frown IH = 180^\circ. - \frown IH$ d. i. $\frown MN = 180^\circ. - \angle C$.

insgelijks $\frown NO = 180^\circ. - \frown FG = 180^\circ. - \angle A$.

en $\frown MO = 180^\circ. - \frown DE = 180^\circ. - \angle B$.

I. GEVOLG.

Indien in eenen klootschen driehoek ACB, eene zijde AB bepaald is, en de hoeken B en A aan die zijde grenzende eene bepaalde grootte hebben: is ook de derde hoek bepaald.

BEWIJS. Want dan zijn in den supplementairen driehoek MNO, bepaald $\angle$ O, zijde ON en zijde OM: en dus (Voorstel XLVII.) zijde ME; gevolgelijk ook $\angle$ C.

II. GEVOLG.

Zoo dan in twee driehoeken eene zijde gelijk is aan eene zijde, en de twee hoeken aan die zijde grenzende ook gelijk zijn, ieder aan ieder, is de derde hoek gelijk aan den derden, en de driehoeken zijn in alle opzichten gelijk.

St. Kl. Dr. §. 64. — L. G. VII. 13.

AANMERKING. Dit Voorstel is hier zoo algemeen niet als voor de regtlijnige driehoeken: want daar heeft het plaats al zijn de gegeven hoeken aan de gegeven zijde niet aangrenzende. De reden blijkt uit den aard der beide soorten van driehoeken.

LIV. VOORSTEL.

Wanneer drie groote cirkels op de oppervlakte eens kloots ge-

getrokken worden, verdeelen derzelver omtrekken door hunne ontmoetingen de oppervlakte des kloots in agt klootsche driehoeken, welke twee aan twee genomen, aan elkander gelijk zullen zijn: die namelijk welke door de verlenging van twee zijden die eenen hoek maken wiens top als pool beschouwd wordt, aan den kant van den tweeden pool gevormd worden.

I. AANMERKING. Dit kan naauwelijks met genoegzame duidelijkheid op eene platte figuur aangewezen worden: maar valt van zelf in het oog als men die cirkels op de oppervlakte eens kloots trekt: en men kan het zelfs zonder figuur uit den aard der zaken nagaan.

II. AANMERKING. Wanneer men van die acht driehoeken, er twee neemt, die aan elkander grenzen: maken zij te samen een sphærisch schuitje: en zijn derhalve in het geval van het voorgaande Voorstel.

GEVOLG.

Wanneer twee groote cirkels elkander regthoekig snijden: en uit het middelpunt een vlak loodregt op de gemeene *as*, of sneede, dier twee cirkels getogen wordt: is de oppervlakte des kloots door deze drie cirkels, in acht gelijke driehoeken verdeeld, die ieder drie regte hoeken bezitten, uit gelijke bogen bestaan, ieder een vierde des omtreks bedragende, en op de oppervlakte acht gelijke deelen beperken.

III. AANMERKING. Gelijk de regte hoek, als maat der hoeken genomen wordt, kan zoodanige spherische driehoek ook als maat van den inhoud des kloots, en de spherische oppervlakte van zoodanigen driehoek als maat van de oppervlakte des kloots gehouden worden.

VI. AANMERKING. Zoodanige ligchamelijke regte hoek, in het middelpunt des kloots gevormd, en op de oppervlakte des kloots een achtste gedeelte van dezelve afperkende, zoude dus voor eenheid aangenomen kunnen worden; en zoo men, naar analogie met het geen voor vlakke regte hoeken plaats heeft, zich verbeeldde dat dezelve, of liever, dat het gedeelte der oppervlakte daar door afgepast, 90 deelen, onder den naam van *graden van oppervlakte* bevat; zoude de geheele oppervlakte eens kloots uit 720 zoodanige graden van oppervlakte bestaan; welke graden van oppervlakte in verschillende spheren tot elkanderen staan zullen in verdubbelde rede der *radii* van dezelve. Zie, hier onder, Voorstel LVI. Aanm. 1.

LV. VOORSTEL. Fig. 244.

Indien twee groote cirkels PM*p*, AM*a*, op de opper-

vlakte eens halven kloots MAP$a$$p$AP getrokken, elkander snijden: zullen de oppervlakten der twee, in den top M tegen elkander overstaande driehoeken AMP en pMa die zij vormen, te samen gelijk zijn aan de oppervlakte van het *sphærisch schuitje* waarvan M de hoek is.

L. G. VII. 22.

BEWIJS. Indien men de bogen Mp, Ma verlengt, zullen zij elkander in eenig stip m ontmoeten, wanneer zij tot eenen halven omtrek verlengd zullen zijn; welk stip m, vallende aan de andere zijde des cirkels AP$a$$p$A die den halven kloot, waarop de driehoeken AMP en aMp getrokken zijn, bepèrkt, de pool zijn zal die vlak over den pool M staat: en de driehoek pMa, die op de tweede halve oppervlakte gevormd wordt, zal in alle opzigten gelijk zijn aan den driehoek AMP (Voorst. LIV.): waaruit volgt dat de beide driehoeken AMP en aMp te samen gelijke oppervlakte hebben als het schuitje waarvan M de hoek is.

LVI. VOORSTEL. Fig. 245.

De oppervlakte van een' klootschen driehoek [ABC] staat tot dien van den geheelen kloot, als de som der drie klootsche hoeken van den driehoek, *min* twee regte hoeken, tot acht regte hoeken.

L. G. VII. 23. — D. G. §. 950.

BEREIDING Men verlenge de bogen AB, BC, AC, tot dat zij den grooten cirkel HGFEDI ontmoeten.

BEWIJS. Men drukke de oppervlakte des kloots uit door de Grieksche letter (Ω) genoemd *omega* of lange O.

Oppervl. schuitje waarvan A de hoek is: Ω = ∠ A : 4 L
—— —— waarvan B de hoek is: Ω = ∠ B : 4 L
—— —— waarvan C de hoek is: Ω = ∠ C : 4 L
} Voorst. XLVI.

derhalve

som der 3 schuitjes: Ω = ∠ A + ∠ B + ∠ C : 4 L

maar door Voorst. LV is

schuitje waarvan ∠ A ∞ Δ DAE + Δ HAG
—— —— ∠ B ∞ Δ GBF + Δ IBD
—— —— ∠ C ∞ Δ HCI + Δ FCE.

Maar Δ DAE + Δ AHG ∞ Δ HAG + fig. BCED + Δ ABC
Δ GBF + Δ IBD ∞ Δ IBD + fig. ACFG + Δ ABC
Δ HCI + Δ FCE ∞ Δ FCE + fig. HABI + Δ ABC

Welke som klaarblijkelijk de halve oppervlakte des kloots uitmaakt met tweemaal den Δ ABC.

Gevolgelijk is de som der drie schuitjes gelijk aan de halve oppervlakte des kloots *plus* 2 Δ ABC; derhalve

$\frac{1}{8}\Omega + 2\,\Delta\,ABC : \angle A + \angle B + \angle C = \Omega : 4\,L$ en

$\frac{1}{8}\Omega \times 4\,L + 2\,\Delta\,ABC \times 4\,L = \Omega\,.\,(\angle A + \angle B + \angle C)$

en $\Delta\,ABC = \frac{\Omega \times (\angle A + \angle B + \angle C - 2\,L)}{8\,L}$: of

oppervl. $\Delta\,ABC : \Omega = \angle A + \angle B + \angle C - 2\,L : 8\,L$.

I. AANMERKING. Dit Voorstel is, in kragt, reeds opgegeven door ALBERT GIRARD (*Inv. nouv. en Algèbre*) en in deze bewoordingen bevat. „ Een klootsche driehoek uit drie bogen van groote cir„ kels bestaande, bevat zoo vele graden van oppervlakte, als „ in de overmaat der som van de drie hoeken boven twee regte „ bevat zijn." Hij verdeeld namelijk de geheele oppervlakte des kloots in 720 deelen die hij graden van oppervlakte noemt: zie boven Voorstel LIV. Aanm. 4.

II. AANMERKING. $\Delta\,ABC = \frac{\Omega\,.\,(\angle A + \angle B + \angle C - 2\,L)}{8\,L} =$

(door Voorstel XLVII. en VII. 14. Gev. 1.)

$= \frac{4\pi\,.\,r^2\,(\angle A + \angle B + \angle C - 2\,L)}{720^\circ}$

$= \frac{\pi\,.\,r^2\,(\angle A + \angle B + C - 2\,L)}{180^\circ} =$ (VII. 19. Aanm. 4.)

$= \frac{r^2 \times 3.14159265\,(\angle A + \angle B + \angle C - 180^\circ.)}{648000''} =$

(VIII. 10. Gev. 2.) $= r^2$ *sin.* $1''.\,(\angle A + \angle B + \angle C - 180^\circ)$: waar door de oppervlakte eens klootschen driehoeks uitgedrukt wordt in gedeelten van het vierkant des *radius*. DELAMBRE *Abrégé d'Astronomie*, *Leçon* IV. §. 74.

III. AANMERKING. Uit $\Delta\,ABC = \frac{\pi\,.\,r^2\,(\angle A + \angle B + \angle C - 2\,L)}{180^\circ}$

wordt afgeleid

$\angle A + \angle B + \angle C - 2\,L = \frac{\Delta\,ABC \times 180^\circ}{\pi\,.\,r^2}$: daar nu (Voorst. L. Gev. 1.) $\angle A + \angle B + \angle C - 2\,L$ is het geen men *spherisch exces* noemt; blijkt het dat het *spherisch exces* in een' driehoek, op eenen bepaalden kloot beschreven, door de oppervlakte van dien driehoek wordt uitgedrukt.

XXXII. BEPALING.

Wanneer meer dan drie groote cirkels elkander op de oppervlakte

van den kloot fnijden, wordt het gedeelte der oppervlakte, dat zij door hunne ontmoetingen afperken, *fpherifche veelhoek* genoemd.

L. G. VII. def. 8.

XXXIII. BEPALING.

Wanneer men door het middelpunt des kloots en door de bogen eens fpherifchen veelhoeks vlakken laat gaan, welke door die bogen zelve op de oppervlakte beperkt worden, draagt het ligchaam aldus gevormd den naam van *fpherifche pyramide*: haar grondvlak is de klootfche veelhoek, door de vlakken zelven afgeperkt.

L. G. VII. def. 11.

LVII. VOORSTEL.

Alle de bogen die eenen fpherifchen veelhoek op de oppervlakte eens kloots beperken, zijn te famen genomen kleiner dan de omtrek eens grooten cirkels.

L. G. VII. 5.

BEWIJS. Immers alle de vlakke hoeken welke de fpherifche *pyramide* uitmaken zijn te famen kleiner dan vier regte hoeken (XI. 2.): dus zijn ook de bogen die de maat van ieder dezer hoeken uitmaken, dat is de bogen, of zijden, des fpherifchen veelhoeks te famen kleiner dan de boog maat van vier regte hoeken, dat is dan de omtrek eens grooten cirkels.

LVIII. VOORSTEL.

De oppervlakte van een' fpherifchen veelhoek heeft tot maat, de fom van de hoeken des veelhoeks *min* zoo veel malen twee regte hoeken, als de veelhoek zijden heeft min twee.

L. G. VII. 24.

BEWIJS. Immers met cirkel-vlakken door het middelpunt des kloots en de over elkander ftaande hoeken des fpherifchen veelhoeks, te laten gaan, wordt die veelhoek in zoo vele klootfche driehoeken verdeeld als de veelhoek zijden heeft min twee: in iederen klootfchen driehoek nu is (Voorftel LVI.) de maat der oppervlakte de fom der hoeken min twee regte hoeken: derhalve is de maat der oppervlakte van den fpherifchen veelhoek de fom van de oppervlakten in dezer driehoeken; dat is de fom van de hoeken des veelhoeks min tweemaal zoo veel regte hoeken als er zijden zijn min twee.

AANMERKING. Indien s de som der hoeken van den klootschen veelhoek en g het getal der zijden uitdrukt: en de eenheid voor den regten hoek wordt aangenomen: wordt de maat van den veelhoek uitgedrukt door $s - 2(g - 2)$, of $s - 2g + 4$.

AANHANGSEL.

INHOUD.

AANHANGSEL.

Ik ben voornemens, in dit Aanhangsel, sommige bijvoegsels op eenige voorstellen voortedragen; gelijk mede zoodanige *formules* betreffende de wortelrekking, de verheffing tot magten, of de uitdrukking van Logarithmen en van Goniometrische lijnen, die niet wel in de Meetkunde zelve, waar toe zij minder behooren, ingelascht konden worden, gelijk ik op meer dan eene plaats heb opgegeven: ik zal de verschillende zaken onder verschillende hoofdstukken rangschikken.

I. HOOFDSTUK.

BIJVOEGSEL OP HET III. GEVOLG VAN HET XX. VOORSTEL DES TWEEDEN BOEKS.

In het derde Gevolg des XX. Voorstels van het II. Boek, hebben wij gezien, hoe daaruit, dat is uit het Voorstel van PAPPUS, het XIX. Voorstel deszelven Boeks kan worden afgeleid: maar tevens doen opmerken dat, het bewijs door CASTILLON gegeven, en daar ter plaatse aangevoerd, de kennis der gelijkvormige driehoeken vereischt: het geen mij in de III. Aanmerking N°. 4. heeft doen zeggen, „ dat men „ het XIX. Voorstel uit het Voorstel van PAPPUS niet kan „ afleiden, zonder de leer der gelijkvormige driehoeken en „ der evenredige lijnen interoepen." Dit was te voorbarig: ik had in het bewijs van CASTILLON berust, zonder de zaak verder nategaan. De Heer PIETER ALBERTUS MUNK heeft mij daaromtrent voorgelicht; en het bewijs volbragt, zonder de leer der gelijkvormige driehoeken noodig te hebben, alleen door die zaken, welke in het tweede Boek zelf bevat zijn. Het is van belang, dat ik deze mijne feil verbetere en het bewijs des Heeren MUNK opgeve.

Men hervatte dan het bewijs tot N°. II. toe, alwaar wij het zelve op bl. 71. hebben afgebroken, te weten tot (fig. 72, 73.)

II. □ op AC ∞ □ op AB + □ op BC ± [Rh. uit AB en BS ± Rh. uit BC en BT]. en gaa aldus voort.

In △△ ACS en ACT is □ op AC ∞ □ op AS + □ op SC ∞ □ op AT + □ op TC: maar □ op SC ∞ □ op BC — □ op BS: en □ op AT ∞ □ op AB — □ op BT: stellende deze waardijen in het voorgaande, komt,

III. □ op AS + □ op BC — □ op BS ∞ □ op TC + □ op AB — □ op BT,

waaruit volgt,

[□ op BC — □ op TC] + □ op BT ∞ [□ op AB — □ op AS] + □ op BS.

Nu is voor den scherphoekigen △ ABC in fig. 73.

□ op BC — □ op TC ∞ □ op BT + 2 Rh. uit BT . CT } II. 3 Gev. 2.
en □ op AB — □ op AS ∞ □ op SB + 2 Rh. uit AS . SB }

waaruit volgt

2 □ op BT + 2 Rh. uit BT . CT ∞ 2 □ op BS + 2 Rh. uit AS . SB

derhalve

Rh uit BT en [BT + CT] ∞ Rh. uit BS en [AS + SB]

d. i.

Rh. uit BT en BC ∞ Rh. uit SB en AB:

Dit gesteld in N°. II. geeft

□ op AC ∞ □ op AB + □ op BC — 2 Rh. uit AB . BS het geen voor den scherphoekigen driehoek het XIX. Voorstel is.

IV. Om nu het zelfde voor den stomphoekigen driehoek ABC in Fig. 72. te bewijzen, hervatte men N°. III, te weten

[□ op AS — □ op BS] + □ op BC ∞ [□ op TC — □ op BT] + □ op AB

en gaa dus voort.

Maar □ op AS — □ op BS ∞ □ op AB + 2 Rh. uit AB . BS

□ op TC — □ op BT ∞ □ op BC + 2 Rh. uit BC . BT

het geen in N°. III. gesteld geeft

□ op AB + 2 Rh. uit AB . BS + □ op BC ∞ □ op BC + 2 Rh. uit BC . BT + □ op AB

waar-

waaruit volgt

Rh. uit AB . BS ∞ Rh. uit BC . BT:

en dit in N°. II. gesteld geeft:

□ op AC ∞ □ op AB + □ op BC + 2 Rh. uit AB . BS: het geen, voor den stomphoekigen driehoek, het XIX. Voorstel oplevert.

De toepassing van het Theorema van PAPPUS op het XIX. Voorstel, is derhalve door dit eenvoudig bewijs vollediger geworden dan door het bewijs van CASTILLON: en de Aanmerking N°. 4. welke ik gemaakt had is ongegrond; maar de vier overige blijven in hare volle waarde.

II. HOOFDSTUK.

OVER DE WORTELTREKKING UIT GETALLEN EN DE FORMULES OM EENE GROOTHEID TOT MAGTEN TE VERHEFFEN.

§. 1. Wij hebben in de I., V. en VI. Aanmerking op het III. Voorstel van het II. Boek, en in het II. Gevolg van het XIV. Voorstel van het XI. Boek de grondbeginsels opgegeven, waarop de regels gevestigd zijn, welke men tot de worteltrekking uit getallen gebruikt: wij oordeelen het niet ondienstig thans aantetoonen hoe die regels, in de daad, uit de gemelde grondbeginsels worden afgeleid.

Den *Quadraat- of Cubiek-wortel* uit een getal te trekken is, het getal te vinden dat, door zich zelf ééns of twee malen vermenigvuldigd, wederom het gegeven getal oplevert.

Het getal, dat de wortel is, kan begrepen worden uit zoo vele deelen te bestaan als het cijffer-letters heeft: dus bij voorbeeld bestaat 376 uit drie deelen 300, 70, en 6: of uit 3, 7, 6, wel verstaande, dat in het laatste geval ieder cijffer eene tien-voudige waarde verkrijgt wanneer men eene andere cijffer ter regte zijde van dezelve plaatst.

De regel nu bestaat uit twee deelen: vooreerst het bepalen van het getal der cijfferletters die den wortel uitmaken: en dan het vinden van ieder dier cijffers in het bijzonder.

I. Over den QUADRAATWORTEL.

§. 2. De Quadraat-wortels van alle de getallen tusschen 1 en 100 bestaan uit ééne cijfferletter; die van de getallen tus-

tusfchen 100 en 10,000 uit twee: die van de getallen tusfchen 10,000 en 1,000,000 uit drie en zoo voorts, zoo dat men altoos weten kan uit hoe vele letters de Quadraat-wortel van een gegeven getal beftaan zal. Men behoeft flechts, van de regter hand te beginnen, het gegeven getal in fneden, ieder van twee cijfferletters, te verdeelen; en dus, indien het getal dier cijfferletters oneven is, zal de laatfte fnede flechts uit ééne cijfferletter beftaan. De wortel zal zoo vele cijfferletters (en derhalve deelen) hebben, als er fneden gemaakt zijn.

Ieder paar cijfferletters in het gegeven getal geeft dus ééne cijfferletter voor den wortel; en iedere fnede heeft in het getal eene honderdvoudige waarde met betrekking tot de volgende; zoo als ook iedere letter van den wortel eene tien-voudige waarde heeft met betrekking tot hare volgende (*).

§. 3. Om nu den wortel uit een gegeven getal te trekken, heeft men flechts te letten op de uitdrukking $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 = a^2 + (2\,a + b)\,b$, en het gegeven getal met dezelve te vergelijken.

Ik wil bijv. den Quadraat wortel uit 1764. trekken: ik deel het getal in fneden van twee letters aldus 17 | 64: waar door ik weet dat de wortel uit twee letters zal beftaan, waarvan ik de eene met *a*, de andere met *b* zal vergelijken.

Ik vergelijk dus 17 | 64 met $a^2 + 2\,ab + b^2$ en wel 17, (dat is hier 1700). met a^2. Het vierkant dat het naast aan 17 (of 1700) komt is 16 (of 1600), waarvan de wortel is 4 (of 40): ik ftel dus 4 (dat is 40) $= a$, voor het eerfte gedeelte van den wortel: ik trek het quadraat 16 (of 1600) van 17 | 64 af; de rest 164 zal nu gelijk zijn aan $2\,ab + b^2 = (2\,a + b)\,b$. Ik neem het dubbeld van 4 (of 40) dat is 8 (of 80) welke ik dus vergelijk met $2\,a$: ik deel door hetzelve 16 (of 160) dat is $2\,ab$: en het quotient 2 is *waarfchijnlijk* de tweede letter van den wortel, of *b*; want $\frac{2\,ab}{2\,a} = b$. Ik ftel dus de 2 naast de

8,

(*) Bijv. In het getal 17 | 64: is de eerfte fnede, in zich zelve befchouwd 17, en de tweede 64: doch zoo ik de eerfte met de tweede vergelijk, is de eerfte met betrekking tot de tweede niet 17, maar 1700, dus honderdmaal meer dan in het afgetrokkene. Insgelijks in den wortel 42 is de eerfte cijffer in het afgetrokkene, of op zich zelf befchouwd, 4: de tweede is 2: doch zoo ik de eerfte met de tweede vergelijk, wordt die eerfte 40, of krijgt eene tiendubbelde waarde.

8, dat is, ik voeg de 2 bij de 80: of ik neem $2a + b$: ik multipliceer 82 door 2 (dat is $(2a + b)$ door b): ik verkrijg 164 die ik met $2ab + b^2$ vergelijk: en daar dit product gelijk is aan de rest 164, blijft er na de aftrekking niets over: en dus is 42 de wortel van 1764. Zie hier de geheele bewerking in orde gesteld.

```
      getal    wortel
  17 | 64 { 42
  16 |    { 82
 ------------ 2
   1 | 64 ----
   1 | 64  164
 ----------
       0
```

§. 4. Ik heb gezegd dat 2 *waarschijnlijk* de tweede letter van den wortel is: want indien 82 × 2 grooter ware geweest dan de rest 164; zoude men daaruit gezien hebben dat 2 te groot is, en men hadt voor 2 eene kleinere cijffer moeten gebruiken.

§. 5. Wanneer de wortel uit drie of meerder cijfferletters bestaat, gaat men op de zelfde wijze te werk, en men beschouwt, om de derde letter te vinden, de twee eerste letters als maar ééne uitmakende, volgens de uitdrukking $(a + b + c)^2 = \overline{a + b}^2 + 2(a + b) \times c + c^2$. Wanneer nu de twee eerste gevonden zijn, is het deel $\overline{a + b}^2$ afgehandeld, en de overige cijffers van het gegeven getal zijn gelijk aan $2(a + b)c + c^2$. Om de vierde letter te vinden beschouwt men de drie eerste als ééne letter uitmakende, en men gaat altijd zoo voort.

REGEL.

§. 6. I. Deel het gegeven getal (bij voorb. 488601) in sneden ieder uit twee letters bestaande, beginnende aan de regterhand (48 | 86 | 01).

II. Neem het quadraat (36) dat het naast aan het getal (48) van de eerste snede komt: trek het van die snede af, en teeken de rest (12) aan. De wortel (6) van dat quadraat is de gezochte cijffer van den wortel.

III. Stel de cijffers van de volgende snede (86) naast de rest, en beschouw dit getal (1286) als één getal.

IV. Neem het dubbeld (12) van de gevonden letter (6) des wor-

wortels: divideer daar door het getal N°. III. de laatste cijffer niet mede rekenende (dus hier 128): merk het quotient (9) aan als de nieuwe cijffer van den wortel.

V. Stel het zelfde quotient (9) naast het dubbeld getal N°. IV: multipliceer dan dat getal (129), als één getal beschouwd, door dat quotient, of die nieuwe cijffer van den wortel (9): trek het product (1161) van de rest N°. III. af, en teken de rest (125) aan.

VI. Zoo er nog meerder letters in het gegeven getal zijn, stelt men de volgende snede (hier 01) naast de gemelde rest (125), en men beschouwt dit getal als één getal (12501).

VII. Vervolgens beschouwt men de reeds gevonden letters (69) van den wortel als ééne letter, en men gaat volgens N°. IV, V, en VI. voort, tot dat men alle de sneden van het gegeven getal uitgewerkt heeft. Zoo er dan geen *rest* over blijft, is het gegeven getal een quadraat getal, waarvan het gevonden getal de wortel is.

VIII. Zoo er een *rest* over blijft, stelt men zoo veel paren nullen naast die *rest* als men in den wortel decimale letters tot nadering wil gebruiken, en men ziet ieder paar aan als eene nieuwe snede van het gegeven getal, dat men uitwerkt volgens N°. IV, V, en VI

IX. Wanneer men eene breuk heeft, (bijv. $\frac{16}{81}$) neemt men afzonderlijk de wortels van den teller en van den noemer en maakt van dezen eene breuk ($\frac{4}{9}$) die de gevraagde wortel is: of men brengt (zoo de teller en noemer geen quadraat getallen zijn) de breuk tot eene decimale breuk, waaruit men den wortel trekt.

§. 7. Zie hier drie uitgewerkte voorbeelden.

I. Den wortel te trekken uit 488601.

```
48 | 86 1 01 ⎫ 699
36 |        ⎬ 12 9    138 9
-------     ⎭    9        9
12 86       -----    -------
11 61       1161     125 01
-------
   125 01
   125 01
  -------
      0
```

De wortel is 699.

II. Den wortel te trekken uit 300

```
 3 1 00      { 17.3205
 1           { 27  | 343  | 3462
 ----        {  7  |   3  |    2
 200           --- | ---- | ----
 189           189 | 1029 | 6924
 ----          -------------------
  11 00                    346405
  10 29                         5
  -----                   -------
    71 00                 1732025
    69 24
    -----
     176.00
    -------
    1760000
    1732025
    -------
      27975.
```

De wortel is ten naasten bij 17. 3205

III. Den wortel te trekken uit 0.273: dat is uit $\frac{273}{1000}$: daar de noemer geen quadraat getal is, multipliceer ik door 10, en de breuk wordt $\frac{2730}{10000}$ (*); dus zal de noemer van den wortel 100 zijn, dat is, men krijgt honderdfte gedeelten; trekkende den wortel uit 2730, heeft men

```
 27 | 30      { 0.522 enz.
 25 |         { 102 | 1C42
 -- |         {   2 |    2
  2 | 30        --- | ----
  2   04        204 | 2084
     ----
     2600
     2084
     ----
      516
```

Dus is de wortel grooter dan 0.52, of dan 0.522; en men kan al verder voortgaande zoo na komen als men wil.

II.

(*) Men moet altijd, zoo noodig, de gegeven breuk met zoo vele *nullen* aanvullen als vereischt wordt, op dat de noemer (die in decimale breuken niet opgegeven, maar onderfteld wordt, en gemakkelijk valt optemaken) een quadraat getal zij: dat is 1 met een oneven getal nullen: d. i. zoo de gegeven breuk uit een oneven getal cijfferletters beftaat, moet er ééne *nul* bijgevoegd worden: bijv. zij het getal 0.07891; ik voeg ééne nul bij, om te hebben 0.078910: en de noemer wordt 1,000,000: waarvan de wortel is 1000. Men behandelt dan den teller, of de gegeven breuk met de aangevulde nullen (hier 78910), als een geheel getal, waaruit men den wortel, juist, of bij nadering, trekt.

II. Over den CUBIEKWORTEL.

§. 8. De cubiekwortels van alle de getallen tusschen 1 en 1000 bestaan uit ééne cijfferletter: van de getallen tusschen 1,000 en 1,000,000 uit twee cijfferletters: van de getallen tusschen 1000,000 en 1,000,000,000 uit drie cijfferletters, en zoo voorts; zoo dat men altoos weten kan uit hoe vele letters de cubiek-wortel van een gegeven getal bestaan zal: men moet slechts, van de regterhand te beginnen, het getal in sneden afdeelen ieder van 3 letters: en dus, indien het getal cijfferleters in het gegeven getal niet door drie deelbaar is, zal de laatste snede (die aan de linkerhand) maar ééne of twee cijffers bevatten.

Ieder drietal cijfferletters in het getal geeft dus ééne cijfferletter voor den wortel: en iedere snede heeft in het getal eene duizendvoudige waarde met betrekking tot de volgende; zoo als iedere letter van den wortel eene tienvoudige waarde heeft met betrekking tot de volgende cijffer.

§. 9. Om nu den cubiek-wortel uit een gegeven getal te trekken behoeft men slechts te letten op de uitdrukking (XI. 14. Gev. 2.) $a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 = a^3 + 3\,a\,b\,(a + b) + b^3$: en het gegeven getal daar mede te vergelijken.

Ik begeer den cubiek-wortel uit 74,088 te trekken. Ik deel dat getal in sneden, aldus 74 | 088, waar door ik weet dat de wortel uit twee letters zal bestaan, waarvan ik de eene met a de andere met b zal vergelijken.

Ik vergelijk dus ook 74 | 088 met $a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$: en wel 74 (of hier 74 000) met a^3. Het cubiek-getal dat het naast aan 74 komt is 64 (*) of hier 64 000), waarvan de wortel 4 (of 40) de eerste letter is van den gezochten wortel: ik trek dat cubiek-getal van 74 | 088 af: de rest is 10 088, die gelijk is aan $3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$. Ik neem het quadraat van de reeds gevonden letter 4 (of 40), dat is 16 (of 1600): ik multipliceer het door 3, en krijg 48 (of 4800) welk getal ik dus vergelijk met $3\,a^2$: ik deel 100 door die 48 (of 10088 door 4800) en verkrijg tot quotient 2, die *waarschijnlijk* de tweede let-

(*) Men dient een tafeltje voor oogen te hebben van de *cubi* der 10 eerste getallen: zie hier hetzelve

cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
wortels	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

letter van den gezochten wortel is, om dat $\frac{3\,a^2\,b}{3\,a^2} = b.$

Ik ſtel dus 2 naast de eerſte letter en heb 42.

Ik multipliceer het drievoudig quadraat van de eerſte letter, hier 48, door de tweede letter; het product is 96 (of 9600 $= 3\,a^2\,b$): ik multipliceer het drievoudig quadraat 12 van de tweede letter 2 door de eerſte letter 4: het product is 48 (of 480 $= 3\,ab^2$): ik neem den *cubus* van de tweede letter 2; dezelve is 8 $= b^3$: ik addeer die drie producten (96, 48, 8) te ſamen, wel lettende van het tweede (beginnende aan de regterhand), eene letter verder naar (*) de regterhand te plaatſen dan het eerſte, het derde eene letter meer naar de regterhand dan het tweede (†): de ſom 10088 is $= 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3$.

Ik trek die ſom van de gegeven rest af, en zie dat er niets overig blijft: waaruit ik beſluit dat 42 de gezochte wortel is. Zie hier de bewerking.

74 | 088	}	42	
94 |		16	4 8
10 | 088		3	3
10 088		48	12
0		2	4
		96	48
		48	
		8	
		10088	

§. 10. Ik heb gezegd dat 2 *waarſchijnlijk* de tweede letter van den wortel zijn moest: want indien de gemelde producten en *cubus* te ſamen grooter geweest waren dan de

(*) Immers, is die 96 eigenlijk 9600, en de 48 maar 480: of, in het algemeen, daar de eerſte letter eene tienvoudige waarde heeft van het geen zij in het afgetrokken ſchijnt te hebben, zal het quadraat van die letter eene tienvoudige waarde bezitten ten opzichte van het product dier eerſte letter door het quadraat van de tweede gemultipliceerd.

(†) Immers is de 48 eigenlijk 480: in het algemeen daar de eerſte letter in de daad eene tienvoudige waarde bezit, heeft ook het product van die letter door het quadraat van de tweede eene tienvoudige waarde met betrekking tot het product van het zelfde quadraat door die tweede letter, dat is tot den *cubus* van de tweede letter.

de rest 10 088, zoude het een teeken zijn dat 2 te groot is voor de tweede letter, en ik zoude een kleiner getal moeten gebruiken.

§. 11. Indien de wortel uit drie of meerder letters bestaat, gaat men op den zelfden voet voort, en men beschouwt de reeds gevondene letters als één getal, volgens de uitdrukking $(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 \times c + 3(a + b)c^2 + c^3$; en insgelijks voor de vierde, vijfde letter enz.: waaruit deze regel afgeleid wordt, welke wij tevens op een voorbeeld zullen toepassen.

REGEL.

§. 12. I. Deel het gegeven getal (5,268,024), beginnende aan de regterhand in sneden ieder van drie cijfferletters.

II. Neem den *cubus* (1) die het naast komt aan het getal (5) van de eerste snede aan de linkerhand: trek dien van dat getal af: teeken de rest (4) aan. De wortel (1) van dien *cubus* is de gezochte cijffer van den wortel.

III. Stel de cijffers (268) van de volgende snede naast die rest (4) en beschouw het als één getal (4268).

IV. Neem het quadraat (1) van die eerste cijffer: multipliceer het door 3: divideer door dat product (3) het gemelde getal N°. III, de twee laatste cijffers niet mede rekenende: het quotient (hier 7) (*) is *waarschijnlijk* de volgende letter van den wortel.

V. Multipliceer het drievoudig quadraat (3) van de reeds te voren gevonden letter door de nu op nieuws gevonden (7) No. IV: multipliceer het quadraat (49) van de nieuwe letter door 3: en het product (147) door de te voren gevonden letter (1): neem den *cubus* (343) van die nieuwe letter (7). Addeer de drie producten te samen, stellende het tweede eene letter meer naar de regterhand dan het eerste, en het derde dan het tweede; trek de som (3913) van de gemelde rest N°. III. af: teeken de rest (355) aan.

VI. Zoo er nog meerder letters in het gegeven getal zijn, stelt men de volgende snede (hier 024) naast de gevonden rest

(*) Hier gaat wel is waar 3 veertien malen in de 42; doch men kan niet meer dan 9 voor een quotient stellen: en indien men 9 stelde zoude men door de volgende bewerking N°. V. vinden, dat niet alleen 9 maar ook 8 te groot is: men moet hier het quotient bijna altijd veel kleiner nemen dan in den eersten opslag schijnt.

rest (355) en men beschouwt dit getal als één getal (355024) uitmakende.

VII. Men ziet de reeds gevonden letters (17) van den wortel als ééne letter aan en gaat voort volgens N°. IV, V, VI, tot dat men alle de sneden van het getal uitgewerkt heeft: zoo er dan geen *rest* over blijft, is het gegeven getal een cubiek-getal, waarvan het gevonden getal (174) de wortel is.

VIII. Zoo er eene *rest* over blijft, stelt men zoo vele malen drie nullen achter het getal als men in den wortel decimalen tot nadering wil gebruiken. Men ziet ieder drietal nullen aan als eene nieuwe snede van het gegeven getal die men uitwerkt volgens N°. IV, V, VI.

§. 13. Wanneer men eene breuk heeft (bijv. $\frac{64}{125}$) neemt men afzonderlijk de cubiek-wortels (4 en 5) van den teller en van den noemer, en maakt van dezen eene nieuwe breuk ($\frac{4}{5}$) die de cubiek-wortel van de gegeven breuk is: of men brengt (zoo de teller en de noemer geen cubiek-getallen zijn) de breuk tot eene decimale breuk, den teller zoo ver uitstrekkende, of, zoo die bepaald is, er zoo vele nullen bijvoegende als noodig is op dat na die bijvoeging de noemer een cubiek getal zij (*): als dan handelt men met den teller als met een geheel getal. Zie hier het voorbeeld uitgewerkt.

	174			
5 | 268 | 024	1	7³ = 49	17	4² = 16
1	1² = 1	× 3	17² = 289	× 3
4 | 268	× 3	147	× 3	48
3 913	3	× 1	867	× 17
355.024	× 7	147	× 4	816
355 024	21	7³ = 343	3468	4³ = 64
0	147		816	
	343		64	
	3913		356024	

III.

(*) Derhalven 1, of met 3, of met 6, of met 9 enz. nullen, altijd met drie opklimmende: gevolgelijk moeten de cijfers van de opgegeven breuk met zoo veel *nullen* aangevuld worden als vereischt wordt op dat hun getal door 3 deelbaar zij: bijv. zij de breuk 0,0085: ik voeg 2 nullen bij om te hebben 0,008500: de noemer zal zijn 1,000,000: waar-

III. Over de algemeene formule om magten en wortels uittedrukken.

§. 14. Indien men de hoegrootheid $\overline{p + q}$ achtervolgens, bij multiplicatie door zich zelve tot de magten 1, 2, 3, 4, 5 enz. verheft, verkrijgt men

$$\overline{p \pm q}^{1} = p + q$$
$$\overline{p \pm q}^{2} = p^2 \pm 2\,pq + q^2$$
$$\overline{p \pm q}^{3} = p^3 \pm 3\,p^2\,q + 3\,pq^2 \pm q^3$$
$$\overline{p \pm q}^{4} = p^4 \pm 4\,p^3\,q + 10\,p^2\,q^2 \pm 4\,pq^3 + q^4$$
$$\overline{p \pm q}^{5} = p^5 \pm 5p^4q + 10p^3\,q^2 \pm 10p^2\,q^3 + 5pq^4 \pm q^5$$

en zoo voorts.

Indien men vervolgens de wet nagaat die de *coëfficienten* der verschillende termen volgen, en ze uit den aard der zaken opmaakt, zal blijken dat men deze algemeene formule kan daarstellen, welke onder den naam van *binomium* van NEWTON bekend is: te weten

$$\overline{p \pm q}^{n} = p^n \pm n\,.\,p^{n-1}\,q + \frac{n\,.\,n-1}{2}\,p^{n-2}\,q^2$$
$$\pm \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{2\,.\,3}\,p^{n-3}\,q^3$$
$$+ \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{2\,.\,3\,.\,4}\,p^{n-4}\,q^4 \pm \text{enz.}$$

Zoo dat in het algemeen, indien D de *coëfficient* is van de term $p^{n-r}\,b^r$ de *coëfficient* van de volgende term $p^{n-(r+1)}\,q^{r+1}$ zijn zal $\frac{D\,(n-r)}{q+1}$.

§. 15. I. GEVOLG. Hieruit volgt dat zoo eene grootheid p, eene vermeerdering of vermindering $\pm q$ ondergaat, de vermeerdering voor het vierkant zal zijn $\pm 2\,pq + q^2$; voor den *cubus* of voor de derde magt $\pm 3p^2\,q + 3\,pq^2 \pm q^3$. En

waarvan de wortel is 100: de wortel zal dus uit honderdste deelen bestaan: en 8500 wordt als een geheel getal beschouwd, waarvan de cubiek-wortel grooter is dan 20 en kleiner dan 21. men kan bij nadering zoo naauwkeurig te werk gaan als men verkiest.

En derhalve dat de rede van de grootheid tot haren aanwas, of tot hare vermindering, zijn zal
voor de enkele grootheid als $p : q$

voor het vierkant als $p : 2\,q + \frac{q^2}{p}$

voor den *cubus*, als $p : 3\,q + \frac{q^2\,(3\,p + q)}{p^2}$

Indien nu q zeer klein is ten opzichte van p, zal de *limiet* van deze drie reden zijn,
voor de enkele grootheid $p : q$
voor het vierkant $p : 2\,q$
voor den *cubus* $p : 3\,q$.
dat is, deze drie reden zullen des te naauwkeuriger de ware rede uitdrukken dat q kleiner is: en men ziet daaruit, dat indien eene grootheid eene kleine verandering ondergaat, deze voor den *cubus* het drievoud, en voor het *quadraat* het dubbeld is van het geen voor de enkele grootheid plaats heeft. Dit voorstel is in de Natuurkunde van zeer veel nut.

§. 16. II. GEVOLG. Vermits n eene magt is in het algemeen, kan men ook stellen $n = \frac{1}{m}$: welke *fractionaire* magt eene worteltrekking uitdrukt (III. Bep. V. Aanm. 2.). Dit stellende, en tevens in acht nemende, dat eene *negatieve* magt eene divisie aanduidt (III. Bep. IV. Aanm. 3.) verkrijgt men

$$\overline{p \pm q}^{\frac{1}{m}} = p^{\frac{1}{m}} \pm \frac{1}{m}\ p^{\frac{1}{m}-1}.\,q + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}\times\left(\frac{1}{m}-1\right)$$

$$p^{\frac{1}{m}-2}\,q^2 \pm \frac{1}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)p^{\frac{1}{m}-3}\,q^3 \text{ enz.}$$

$$= p^{\frac{1}{m}} + \frac{p^{\frac{1}{m}}\,q}{m\,.\,p} \mp \frac{(m-1)\ p^{\frac{1}{m}}\ q^2}{2\,.\,m^2\ q^2}$$

$$\pm \frac{(m-1)\,(2\,m-1)\,.\,p^{\frac{1}{m}}\ q^3}{2\,.\,3\ m^3\,.\,p^3} : \text{enz.}$$

$$= p^{\frac{1}{m}} \left(1 \pm \frac{q}{mp} \mp \frac{m-1 \cdot q^2}{2 m^2 p^2} \pm \frac{m-1 \cdot 2m-1 \cdot q^3}{2 \cdot 3 m^3 \cdot p^3} \mp \text{enz.}\right)$$

Waar door de worteltrekking in vele gevallen gemakkelijk wordt.

§. 17. Zij bijv. $p = a^2$, $q = ab$: en dus $p + q = a^2 + ab = a(a + b)$: zij $m = 2$ dan is
$\sqrt{a^2 + ab} = \sqrt{a(a+b)} = [a(a + b)]^{\frac{1}{2}} =$
$a + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8a} + \frac{b^3}{16a^2} -$ enz.

Zoo dat, indien b zeer klein is ten opzichte van a: men hebben zal

$\sqrt{a(a + b)} = a + \frac{b}{2} = \frac{a + (a + b)}{2}$: dat juist oplevert het geen gezegd is geweest in III. 21. en VII. Bep. 1. Gev. 1. Voorbeeld 3.

III. HOOFDSTUK.

OVER HET VINDEN VAN LOGARITHMEN DOOR REEKSEN.

Wij hebben in het XXXIX. Voorstel van het III. Boek aangetoond, hoe men de Logarithmen van alle de getallen vinden kan door het nemen van herhaalde middel-evenredigen: en tevens gezegd (Aanm. IV.) dat de eerste berekenaars dier Tafels op deze wijze waren te werk gegaan: doch dat men naderhand korter wijzen hadt uitgedacht, en dat wij daarvan in het Aanhangsel zouden handelen.

Die meer verkorte wijzen steunen op het uitdrukken eens *Logarithmus* door eene reeks waarvan de leden zeer spoedig afnemen. Wij zullen de Letter *L* gebruiken om den *Logarithmus* van dit getal uittedrukken voor het welk het staat.

§. 1. I. Zij L. $(1 + n) = n + xn^2 + yn^3 + zn^4 + un^5 +$ enz.: dan moet men, om de reeks te kennen, de *coëfficienten* x, y, z, + enz. bepalen.

Zij

Zij L. $(1 + n)^2 = 2$ L. $(1 + n)$ III. §5. Gev. 2. derhalve

$$\text{II. L. } (1 + n)^2 = 2n + 2x \, . \, n^2 + 2yn^3 + 2zn^4 + 2un^5 + \text{enz.}$$
$$= \text{L. } (1 + 2n + n^2)$$

zij kortheidshalve $2n + n^2 = A$: dan is

$$\text{III. L. } (1 + n)^2 = \text{L. } (1 + A) = A + xA^2 + yA^3 + zA^4 + uA^5 + \text{enz.}$$

maar, om dat $A = 2n + n^2$

is $A^2 = (2n + n^2)^2$

$A^3 = (2n + n^2)^3$ enz. derhalve

$$\text{IV. L. } (1 + n)^2 = 2n + n^2 + x(2n + n^2)^2 + y(2n + n^2)^3 + z(2n + n^2)^4 + u(2n + n^2)^5 + \text{enz.}$$

Indien men die verſchillende magten van $2n + n^2$ door multiplicatie ontwikkelt, en dan, duidelijkshalve, die leden waarin n tot de zelfde magt verheven is, onder elkander ſchrijft, heeft men

$$\begin{aligned} \text{V. L. } (1+n)^2 = 2n + n^2 & + 4x^4n^3 + xn^4 + \text{enz.} \\ & + 4xn^2 + 8yn^3 + 12yn^4 + 6yn^5 + \text{enz.} \\ & + 16zn^4 + 32zn^5 + \text{enz.} \\ & + 32un^5 + \text{enz.} \end{aligned}$$

§. 2. Maar die uitdrukking N°. V. moet gelijk zijn aan de uitdrukking N°. II., vermits beide den zelfden *Logarithmus* opgeven. Die gelijkheid nu kan geen plaats hebben, ten zij de *coefficienten* der leden van beide de reekſen, waarin n tot de zelfde magt verheven is, gelijk zijn. Dien ten gevolge is:

$2x = 1 + 4x$: derhalve . . $x = -\frac{1}{2}$

$2y = 4x + 8y = -2 + 8y$: of $y = \frac{1}{3}$

$2z = x + 12y + 16z = -\frac{1}{2} + 4 + 16z$ of $z = -\frac{1}{4}$

$2u = 6y + 32z + 32u = \frac{6}{3} - \frac{32}{4} + 32u$: en $u = \frac{1}{5}$

en zoo voorts. Zoo dat men, met die waarde van n in de reeks N°. I. te ſtellen, heeft

$$\text{VI. L. } (1 + n) = n - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{5}n^5 \text{ enz.}$$

In welke reeks de wet der *coefficienten* duidelijk genoeg kenbaar is.

§. 3. Men zoude door die reeks nu het gevraagde opgelost hebben, indien deze reeks ſpoedig genoeg ſamen liep: maar

 dat

dat doet zij niet: men gaat dan aldus voort om uit die reeks eene andere, die sneller samenloopt, optemaken.

Het blijkt door eene gemakkelijke divisie, dat

VII. $\frac{1}{1-n} = 1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + \text{enz.}$

zij dan $n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5$ enz. $= B$.

dan is $L\left(\frac{1}{1-n}\right) = L.(1+B) = B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \frac{1}{4}B^4 + \frac{1}{5}B^5 - \text{enz.}$

Stellende nu in plaats van B, en deszelfs magten, $(n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + \text{enz.})$ en de magten daarvan welke men bij multiplicatie successivelijk ontwikkelt, komt

$$\text{IX. } L\left(\frac{1}{1-n}\right) = \begin{array}{l} n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + \text{enz.} \\ \quad - \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{2}n^3 - \frac{3}{2}n^4 - \frac{4}{2}n^5 - \text{enz.} \\ \quad\quad + \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{3}n^4 + \frac{6}{3}n^5 + \text{enz.} \\ \quad\quad\quad - \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{5}n^5 - \text{enz.} \\ \quad\quad\quad\quad \text{enz. enz.} \end{array}$$

Alle die leden optellende, en ieder derzelve tot de eenvoudigste uitdrukking herleidende, komt

$$\text{X. } L\left(\frac{1}{1-n}\right) = n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 + \text{enz.}$$

Maar $L\left(\frac{1+n}{1-n}\right) = L(1+n) \times \left(\frac{1}{1-n}\right)$

$= L(1+n) + L\left(\frac{1}{1-n}\right)$.

Indien men dan de reeks N°. IX. voegt bij de reeks N°. VI. komt

$$L\left(\frac{1+n}{1-n}\right) = \begin{pmatrix} n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{6}n^6 + \text{enz.} \\ n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{6}n^6 + \text{enz.} \end{pmatrix}$$

dat

dat is

$$L\left(\frac{1+n}{1-n}\right) = 2n + \tfrac{2}{3}n^3 + \tfrac{2}{5}n^5 + \tfrac{2}{7}n^7 + \tfrac{2}{9}n^9 + \text{enz.}$$

of

$$\text{XI. } L\left(\frac{1+n}{1-n}\right) = 2\left(n + \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^7}{7} + \frac{n^9}{9} + \text{enz.}\right).$$

Welke reeks zeer ſpoedig afneemt, en dien *Logarithmus* van $\left(\frac{1+n}{1-n}\right)$ uitdrukt, welken men noemt *natuurlijken*, en ook, naar den uitvinder dier *Logarithmen*, *Neeperiaanſchen Logarithmus.* Men vindt die formule bij alle de Schrijvers welke over deze zaken gehandeld hebben: en ook bij EULER *Introd. in Analyſin Infinit.* §. 121. bij DE GELDER, *Handleiding*, §. 716. en vele volgende.

De wijze welke ik hier verklaard heb is die van DODSON te vinden in de *Philoſoph. Tranſact. vol.* XLVIII. p. 280. Zij is mij eene der eenvoudigſte en meest *elementaire* voorgekomen.

§. 4. Om het gebruik dezer reeks aantetoonen, vrage men den natuurlijken *Logarithmus* van 2: dan is $\frac{1+n}{1-n} = 2$ en derhalve $n = \frac{1}{3}$; men heeft dan

$$L.2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} \text{ enz.}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 243} + \frac{1}{7\cdot 2187} + \frac{1}{9+19683} + \frac{1}{11+177147} \text{ enz.}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \frac{1}{2948317} \text{ enz.}\right]$$

 Wan-

Wanneer men nu alle die breuken tot *decimale* herleidt, en derzelver som neemt, verkrijgt men 0.3465736: het welk door 2 gemultipliceerd geeft Log. 2 = 0.6931472: uitdrukking die tot de laatste decimaal naauwkeurig is.

0.33333333
0.0123457
0.0008230
0.0000653
0.0000057
0.0000006

0.3465736

Indien men stelde $\frac{1+n}{1-n} = 3$: en dus $n = \frac{1}{2}$ zoude men op gelijke wijze den Logarithmus van 3 vinden te zijn 1.0981623.

§. 5. Deze logarithmen welke men door de reeks $\text{Log.} \left(\frac{1+n}{1-n}\right) = 2\left(n + \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^7}{7} + \frac{n^9}{9} \text{ enz.}\right)$ vindt, worden, gelijk reeds (§. 3.) gezegd is, *natuurlijke* Logarithmen genoemd, en kunnen te regt met dien naam bestempeld worden, om dat men zich in derzelver berekening niet bij voorraad verbonden heeft om het getal 1 te stellen voor den *Logarithmus* van een bepaald getal, eenmaal tot *basis* aangenomen. Het blijkt dat hier het getal waarvan 1 de *Logarithmus* is, gezocht en bepaald moet worden, en dat het invalt tusschen 2, wiens *Logarithmus* kleiner, en 3 wiens *Logarithmus* grooter is dan 1. Bij naauwkeurige berekening zoude men vinden dat 2.7182818 enz. het getal is waarvan 1 is de natuurlijke *Logarithmus*, of, gelijk men die Logarithmen ook noemt, de *Neperiaansche* of *Hyperbolische Logarithmus*.

§. 6. In onze gewoone Logarithmen-Tafels is, in tegendeel, bij voorraad 1 verordend tot den *Logarithmus* van 10, welke tot *basis* gesteld wordt. Wij moeten dan aanwijzen hoe men het getal vindt, *module* genoemd, waar door men den natuurlijken *Logarithmus* van 10 zal moeten multipliceeren op dat het product zoude opleveren 1, den bij voorkeuze aangenomen *Logarithmus* van 10 in onze gewone Tafels.

Men moet dan eerst den natuurlijken *Logarithmus* zoeken van 10: het geen men zoude kunnen doen met te stel-

ſtellen $\frac{n + 1}{n - 1} = 10$: of $n = \frac{9}{11}$ maar dan zoude de reeks te langzaam afnemen. Men gaa liever aldus te werk (*):

§. 7. Het getal 10 is $= 8 \times \frac{5}{4}$: en derhalve *Log.* 10 $=$ *Log.* 8 $+$ *Log.* $\frac{5}{4} =$ *Log.* $2^3 +$ *Log.* $\frac{5}{4} = 3$ *Log.* 2 $+$ *Log.* $\frac{5}{4}$.

Zij $\frac{n + 1}{n - 1} = \frac{5}{4}$ dan is $n = \frac{1}{9}$: en derhalve is *Log.* $\frac{5}{4}$ $= 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{9}\right)^7 + \text{enz.}\right)$

Welke reeks zeer ſpoedig afneemt: men zal op die wijze gemakkelijk vinden . *Log.* $\frac{5}{4} = 0.2231436$
voeg bij *Log.* $8 = 3$ *Log.* $2 = 3 \times 0.6931472 = 2.0794415$

Dus natuurlijke Logarithmus van 10 $= 2.3025851$

§. 8. In de gemaakte onderſtelling nu, moet die natuurlijke *Logarithmus* van 10 door eenig getal gedivideerd worden, om te worden 1, verordende *Tabulaire Logarithmus* van 10: de *diviſor* is derhalve het getal zelve, 2.3025851: de *module* is dan $\frac{1}{2.3025851} = 0.4342945$: dat is de *natuurlijke*, *Neeperiaanſche*, of *Hyperboliſche*, *Logarithmen* moeten door 0.432945 gemultipliceerd worden om de *Tabulaire Logarithmen* op te leveren: en deze moeten door 2.3025851 worden gemultipliceerd, om weder tot de natuurlijke herleid te worden.

§ 9. Men heeft dan gevonden de natuurlijke *Logarithmen* van 2, 3, 10 te zijn reſpectivelijk 0.6931472, 1.0986123: 2.3025851 waaruit die van 5 $=$ *Log.* 10 $-$ *Log.* 2, volgt, te weten, 1.6094338: indien men dezelve door 0.432945 multipliceert verkrijgt men den
Tabulairen Logarithmus van . 2 $= 0.3010300$
——— ——— . . 3 $= 0.4771213$
——— ——— . . 10 $= 1.0000000$
waaruit gemakkelijk worden opgemaakt
die van $4 = 2$ *Log.* 2 . . $= 0.6020600$
die van $5 = \frac{10}{2} =$ *Log.* 10 $-$ *Log.* 2 $= 0.6989700$
die

(*) Hier heb ik gevolgd de handelwijze van de Heer BANGMA, in zijne *Inleiding tot de Algebra*, §. 125.

die van 6 = 3 × 2 = *Log.* 3 + *Log.* 2 = 0.7781513
die van 8 = 2^3 = 3 *Log.* 2 . = 0.9030900
die van 9 = 3^2 = 2 *Log.* 3 . = 0.9542426

Er ontbreekt slechts de *Logarithmus* van 7: deze zal men vinden met te stellen $n = \frac{1}{99}$: dus $\frac{1+n}{1-n} = \frac{1+\frac{1}{99}}{1-\frac{1}{99}}$ $= \frac{100}{98} = \frac{50}{49}$. Nu is *Log.* $\left(\frac{50}{49}\right) = 2\left[\frac{1}{99} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{99}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{99}\right)^5 + \text{enz.}:\right]$ welke reeks ongemeen sterk afneemt: waaruit volgt natuurlijke *Log.* $\frac{50}{49}$ = 0.0202027: of *Log* 50 — *Log.* 49 = 0.0202027: of dezelve aftrekkende van *Log.* 50 = *Log.* 10 + *Log.* 5, of van: 3.9120230 blijft *Log.* 49 = 3.8918203 = *Log.* 7^2 = 2 *Log.* 7: dus natuurlijke *Log.* 7 = 1.945101: waaruit volgt de *Tabulaire Logarithmus* van 7 = 0.8450980. Dit zij hier over genoeg.

IV. HOOFDSTUK.

OVER DE UITDRUKKING VAN GONIOMETRISCHE LIJNEN, EN VAN BOGEN DES CIRKELS DOOR REEKSEN.

Wij hebben in het VIII. Boek, Voorst. XXII. Aanm. 6. en in het VII. Boek, Voorst. XXVI. Aanm. 4. gezegd, dat wij in het Aanhangsel iets zouden voordragen over de reeksen waar door men de *sinussen* enz. gelijk mede cirkelbogen, of den omtrek des cirkels door Goniometrische lijnen uitdrukt. Het voornaamste zullen wij in de volgende Afdeelingen bevatten (*).

I.

(*) Het is mij voorgekomen dat dit gewigtig stuk door niemand eenvoudiger behandeld is dan door den Heer DE GELDER eerst in de *Verh. van het Bataafsch Genootschap te Rotterdam* (Deel XII.), daarna in zijne *Handleiding*, §. 1063. en vele volgende; waarom ik dan ook deszelfs bewijstrant zoo veel mogelijk stipt gevolgd heb.

I. AFDEELING.

UITDRUKKING VAN SINUS EN COSINUS DOOR REEKSEN.

I. VOORSTEL.

Indien men de waardij van den *ſinus* eens boogs door eene reeks uitdrukt waarvan de Leden de magten zijn van x door bepaalde *cöefficienten* gemultipliceerd, zullen de leden dier reeks enkel uit de oneven magten van x kunnen beſtaan.

BEWIJS Zij *ſin.* $x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ enz. dan zoude men voor den negativen boog $- x$ moeten hebben *ſin.* $(- x) = - ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ enz. derhalve $-$ *ſin.* $(- x) = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5$ enz. Maar $-$ *ſin.* $(- x) =$ *ſin.* x: dus zoude men moeten hebben $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ enz. $= ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 +$ enz. het geen niet mogelijk is, ten zij de *cöefficienten* der even magten, te weten, b, d, f, enz. $= 0$: dat is ten zij die leden verdwijnen: en dus de reeks zelve deze gedaante hebbe *ſin.* $x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 +$ enz.

II. VOORSTEL.

Indien de *coſinus* eens boogs door eene reeks wordt uitgedrukt, waarvan de leden de magten zijn des boogs door bepaalde *cöefficienten* gemultipliceerd: zal die reeks zoodanig geſteld zijn, dat het eerſte lid de eenheid zij.

BEWIJS. Indien de reeks ware deze: *coſ.* $x = ax + bx + cx^2 + dx^3$ enz. zoude voor $x = 0$, *coſ.* $0 = 0$ zijn: dat echter geen plaats heeft: want *coſ.* $0 = 1$: derhalve kan het eerſte lid geen x bevatten: en moet boven dien de eenheid zelf zijn.

III. VOORSTEL.

Indien de *coſinus* van een' boog door eene reeks wordt uitgedrukt, waarvan de leden de magten van dien boog zijn, door beſtendige *cöefficienten* gemultipliceerd: zullen de leden

van

van die reeks geen andere dan even magten des gemelden boogs kunnen bevatten.

BEWIJS. Zij die reeks $cos.\ x = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ enz.

dan is $cos. - x = 1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4$ enz.

Maar $cos.\ x = cos. - x$: derhalve

$1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ enz. $= 1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4$ enz.: het geen onmogelijk is ten zij de *coëfficienten* der oneven magten, a, c, d, e, enz. $= 0$ zijn, en derhalve die leden verdwijnen. Zoo dat de reeks deze gedaante zal hebben $cos.\ x = 1 + Px^2 + Qx^4 + Rx^6 + Sx^8$ enz.

IV. VOORSTEL.

Indien de *sinus* eens boogs x door de reeks $Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7$ enz. wordt uitgedrukt, zal de *cosinus* van dien zelfden boog x uitgedrukt worden door de reeks $cos.\ x = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8$ enz., en in beide de reeksen zal $A = 1$ zijn.

BEWIJS. Indien $sin.\ x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7$ enz.
is $sin.\ y = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7$ enz.
en derhalve $sin.\ x - sin.\ y = A(x - y) + B(x^3 - y^3) + C(x^5 - y^5) + D(x^7 - y^7)$ enz.

Maar VIII. 32. N°. 34.

$sin.\ x - sin\ y = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2}(x - y)\ cos.\ \tfrac{1}{2}(x + y) =$ (VIII. 15.)
$= choorde\ (x - y) \times cos.\ \tfrac{1}{2}(x + y)$: derhalve
$choorde\ (x - y) \times cos.\ \tfrac{1}{2}(x + y) = A(x - y) + B(x^3 - y^3) + C(x^5 - y^5)$:
en divideerende alle de leden door $x - y$ (*) is:

$$\frac{choorde\ (x - y)}{x - y} \times cos.\ \tfrac{1}{2}(x + y) = A + B(x^2 + xy + y^2) + C(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + D(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)\ \text{enz.}$$

Indien nu $x = y$: is (VIII. 10. Gev. 5.)

$$\frac{choorde\ (x - y)}{x - y} = 1 : \text{en } cos.\ \tfrac{1}{2}(x + y) = cos.\ \tfrac{1}{2}(2x) = cos\ x$$

der-

(*) Eene grootheid $x^m - y^m$ is altijd deelbaar door $x - y$. Dit zal in het vervolg meer te pas komen.

derhalve is, wanneer $x = y$

$$\textit{cos.}\ x = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Cx^8 \text{ enz.}$$

Maar indien $x = 0$: is $\textit{cos.}\ x = A$: maar

$\textit{cos.}\ 0 = 1$: dus $A = 1$. Derhalve is

$$\textit{sin.}\ x = x + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 \text{ enz.}$$

$$\textit{cos.}\ x = 1 + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \text{enz.}$$

V. VOORSTEL.

De *cöefficienten* in de beide reeksen

$$\textit{sin.}\ x = x + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 \text{ enz.}$$

en

$$\textit{cos.}\ x = 1 + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \text{enz.}$$

worden bepaald door de formule

$$\textit{sin.}^2\ x + \textit{cos.}^2\ x = 1.$$

BEWIJS. Indien men de gemelde reeksen aanneemt en dezelve tot de tweede magten verheft, is

$$\textit{sin.}^2\ x = x^2 + 2Bx^4 + (B^2 + 2C)x^6 + (2BC + 2D)x^8$$
$$+ (2BD + 2E + C^2)x^{10} + (2BE + 2CD + 2BF)x^{12} \text{ enz.}$$

en

$$\textit{cos.}^2\ x = 1 + 6Bx^2 + (9B^2 + 10C)x^4$$
$$+ (30BC + 14D)x^6 + (42BD + 18E)x^8$$
$$+ (54BE + 70CD + 22F)x^{10} + \text{enz.}$$

En vermits $\textit{sin.}^2\ x + \textit{cos.}^2\ x = 1$; is ook

$$1 = 1 + (1 + 6B)x^2 + (2B + 9B^2 + 10C)x^4$$
$$+ (B^2 + 2C + 30BC + 14D)x^6 +$$
$$+ (2BC + 2D + 42BD + 18E)x^8 \text{ enz.}$$

derhalve zullen de *cöefficienten* van x^2, x^4, x^6 enz. alle ieder $=$ 0 zijn: vermits anders de reeks niet kan zijn, gelijk behoort, $= 1$. Derhalve

is: $1 + 6B = 0$ of $B = -\frac{1}{6}$ d. i. $B = \ldots - \frac{1}{2\cdot3}$

$2B + 9B^2 + 10C = 0$: of $C = \frac{1}{120}$:

dat is $C = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$

$B^2 + 2C + 30BC + 14D = 0$:

of $D = \frac{-1}{12\cdot30\cdot14}$ . . $D = -\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$

waaruit de wet genoegsaam blijkt.

I.

I. GEVOLG.

Men heeft dan

$$sin.\ x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}$$

$$+ \frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} \text{ enz.}$$

zijnde de algemeene term $\pm \frac{x^{2n-1}}{2.3.4...(2n-1)}$

$$cos. = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6}$$

$$+ \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8} \text{ enz.}$$

zijnde de algemeene term $\frac{x^{2n-2}}{2.3.4...(2n-2)}$

en in beide de reeksen zijn de oneven leden + de even leden —.

I. AANMERKING. Om zoodanige reeks in praktijk te brengen, moet de boog x in deelen van den *radius* worden uitgedrukt: Daar nu, indien $r = 1$, de halve omtrek, of $\pi = 3.1415926536$, is $\frac{\pi}{2} = \frown 90° = 1.5707963268$: en indien men stelt $x = \frac{m}{n} \times \frac{\pi}{2}$ zal men in het berekenen des *sinus* van den boog x moeten nemen alle de oneven magten van $\frac{m}{n}$, en van $\frac{\pi}{2}$; en voor den *cosinus* alle de even magten van $\frac{m}{n}$, en van $\frac{\pi}{2}$: de magten van $\frac{\pi}{2}$ blijven, wat ook $\frac{m}{n}$ zij, bestendig de zelfde: waarom EULER ze §. 134. van zijne *Introductio*, eens vooral heeft opgegeven: en na hem is zulks ook door DE GELDER *Handl.*

(*Handl.* §. 1089.) geschied (*). $\frac{m}{n}$ en deszelfs magten hangen af van den boog die men berekent: maar vermits de opgegeven reeksen zeer spoedig afnemen, dat is zeer sterk *convergeren*, is doorgaans een klein getal leden genoeg: Bij voorbeeld, indien men den *sinus* van 15°. wil berekenen; dan is $\frac{m}{n} = \frac{1}{6}$ van $\frac{\pi}{2}$, of van 90°. dan zullen vier leden genoegzaam zijn om eene vrij groote naauwkeurigheid te erlangen: want dan heeft men

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad = 0.261,799,39$$

$$\frac{1}{6^5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = \frac{1}{7776} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \quad . \quad = 0.000,010,25$$

$$\overline{0.261,809,64}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{216}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \quad . \quad = 0.002,990,57 \\ \frac{1}{279976}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \quad . \quad = 0.000,000,02 \end{array}\right\} - 0.002,990,59$$

$$\overline{0.258,819,05}$$

of,

(*) Zie hier de tien eerste magten van $\frac{\pi}{2}$.

Oneven magten voor den *sinus*.	Even magten voor den *cosinus*.
$\frac{\pi}{2} = 1.570,796,33$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1.233,700,55$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = .645,964,10$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 0.253,669,51$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0.079,692,63$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 = 0.020,863,48$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0.004,681,75$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 = 0.000,919,26$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)^9 = 0.000,160,44$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} = 0.000,025,20$

of, indien men 7 cijfferletters neemt, 0.258,8191: dat het zelfde getal is als in de Tafels voor *sin.* 15°.

II. GEVOLG.

Vermits $tang.\, x = \frac{sin.\, x}{cos.\, x}$ zal men hebben

$$tang.\, x = \frac{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{enz.}}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{enz.}}$$

en

$$cos.\, x = \frac{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{enz.}}{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{enz.}}$$

II. AANMERKING. Deze reeks, insgelijks door EULER opgegeven, kan door werkelijke divisie in eene andere hervormd worden; maar waarin de wet der *cöefficienten* niet gemakkelijk valt te onderkennen, en die wij, gelijk eenige andere, hier voorbij gaan: te meer om dat ons oogmerk alleen is aantetoonen, hoe men tot dergelijke reeksen komen kan.

II. AFDEELING.

UITDRUKKING VAN CIRKELBOGEN DOOR REEKSEN.

Gelijk men den *sinus* en den *cosinus* heeft uitgedrukt door reeksen, wier leden magten zijn des boogs waarvan men den *sinus* of *cosinus* zoekt: heeft men ook, omgekeerd, reeksen daargesteld wier leden zijn de *sinus* of *cosinus* van eenigen boog, om de hoegrootheid van dien boog optegeven. Dit steunt op de volgende Voorstellen.

VI. VOORSTEL.

Indien de grootte eens boogs uitgedrukt wordt door eene reeks

reeks waarvan de leden zijn de magten van den *finus* diens boogs, door bepaalde *coëfficienten* gemultipliceerd, kunnen die magten alleen de oneven magten des *finus* zijn, met de eerste te beginnen.

BEWIJS. Indien $x = a$ *fin.* $x + b$ *fin.*$^2 x + c$ *fin*$^3 x +$ enz. ware, zoude men voor eenen negativen boog, of voor $-x$, om dat *fin.* $(-x) = -$ *fin.* x, moeten hebben

$$-x = -a \text{ fin. } x + b \text{ fin.}^2 x - c \text{ fin.}^3 x + d \text{ fin.}^4 x \text{ enz.}$$

welke reeks met de voorgaande onbestaanbaar is ten zij de *coëfficienten* b, d, e, der even magten ieder $= 0$ zijn, en dus die leden verdwijnen: men zal dan hebben

$$x = A \text{ fin. } x + B \text{ fin.}^3 x + C \text{ fin.}^5 x + D \text{ fin.}^7 x \text{ enz.}$$

en

$$-x = A \text{ fin. } x - B \text{ fin.}^3 x - C \text{ fin.}^5 x - D \text{ fin.}^7 x \text{ enz.}$$
$$= -(A \text{ fin. } x + B \text{ fin.}^3 x + C \text{ fin.}^5 x + D \text{ fin.}^7 x \text{ enz.})$$

als wanneer alles volkomen overeenstemt. Verder, indien *fin.* $x = 0$: is, gelijk behoort, ook $x = 0$. De *coëfficienten* A, B, C, enz. moeten uit den aard der zaken bepaald worden.

VII. VOORSTEL.

Een boog x wordt door de volgende reeks uitgedrukt: $x = \text{fin. } x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \text{ fin.}^3 x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \text{ fin.}^5 x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \text{ fin}^7 x$ enz.: waarin de *coëfficient* van den term n, de *coëfficienten* van achteren opnemende, is

$$\frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \frac{2n-7}{2n-6} \cdot \frac{2n-9}{2n-8} \text{ enz.}$$

BEWIJS. Om dat

1°. $x = A \text{ fin. } x + B \text{ fin.}^3 x + C \text{ fin.}^5 x + D \text{ fin.}^7 x$ is

2°. $y = A \text{ fin. } y + B \text{ fin.}^3 y + C \text{ fin.}^5 y + D \text{ fin.}^7 y$

derhalve

3°. $(x - y) = A (\text{fin. } x - \text{fin. } y) + B (\text{fin}^3 x - \text{fin.}^3 y) + C (\text{fin.}^5 x - \text{fin.}^5 y) + D (\text{fin.}^7 x - \text{fin.}^7 y)$ enz.

gevolgelijk, de leden door *fin.* $x -$ *fin.* y divideerende.

4°. $\frac{x-y}{\text{fin. } x - \text{fin. } y} = A + B (\text{fin.}^2 x + \text{fin. } x \text{. fin. } y + \text{fin}^2 y) + C (\text{fin.}^4 x + \text{fin.}^3 x \text{. fin. } y + \text{fin.}^2 x \text{ fin.}^2 y + \text{fin. } x \text{ fin.}^3 y + \text{fin.}^4 y) +$ enz.

Maar (VIII. 32. N°. 34.)

is $\frac{x-y}{\text{fin. } x - \text{fin. } y} = \frac{x-y}{2 \text{ fin. } \frac{1}{2}(x-y) \text{. cof. } \frac{1}{2}(x+y)} =$ (VIII, 19.)

$\frac{x-y}{\text{choorde } (x-y) \text{ cof. } \frac{1}{2}(x+y)}$: wanneer nu $x = y$

is

is (VIII. 10. Gev. 5.) $\frac{x - y}{\textit{choorde }(x - y)} = 1$: en $\frac{1}{\cos.\, \frac{1}{2}(x + y)} = \frac{1}{\cos.\, x}$: dit stellende in N°. 4. is

5°. $\frac{1}{\cos.\, x} = A + 3\, B \sin.^2 x + 5\, C \sin.^4 x + 7\, D \sin.^6 x$ enz.

maar $\frac{1}{\cos.\, x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin.^2 x}}$

derhalve 6°. $\frac{1}{\cos.^2 x} = \frac{1}{1 - \sin.^2 x}$ = (door werkelijke divisie)

$= 1 + \sin.^2 x + \sin.^4 x + \sin.^6 x +$ enz.

maar $\frac{1}{\cos.^2 x} = (A + 3 B \sin.^2 x + 5\, C \sin.^4 x + 7\, D \sin.^6 x \text{ enz.})^2$

gevolgelijk

7°. $1 + \sin.^2 x + \sin.^4 x + \sin.^6 x = (A + 3\, B \sin.^2 x + 5\, C \sin.^4 x + \text{enz.})^2$

$= A^2 + 6\, AB \sin.^2 x + 9\, B^2 + 10\, AC) \sin.^4 x + (14\, AD + 30\, BC) \sin.^6 x + (42\, BD + 25\, C^2 + 18\, AE) \sin.^8 x$ enz. waaruit volgt:

$A^2 = 1$ . . . $A = 1$

$6\, AB = 1$: en dus . . $B = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\,.\,3}$

$9\, B^2 + 10\, AC = 1 = \frac{9}{36} + 10\, C$ $\quad C = \frac{3}{40} = \frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{4}\,.\,\frac{1}{5}$

$14\, AD + 30\, BC = 1$:

dus $D = \frac{5}{2\,.\,4\,.\,14}$ . . $D = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{7}$

$42\, BD + 25\, C^2 + 18\, AE = 1$:

dus $E = \frac{35}{64 \times 18}$ . . $E = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{9}$

enz, waaruit volgt dat de reeks $x = A\,.\, \sin.\, x + B \sin.^3 x + C \sin.^5 x + D \sin.^7 x$ enz.

deze wordt, $x = \sin.\, x + \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{3} \sin.^3 x + \frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{4}\,.\,\frac{1}{5} \sin.^5 x + \frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{4}\,.\,\frac{5}{6}\,.\,\frac{1}{7} \sin.^7 x + \frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{4}\,.\,\frac{5}{6}\,.\,\frac{7}{8}\,.\,\frac{1}{9} \sin.^9 x$ enz.

AANMERKING. Om dit op een voorbeeld toe te passen zij $x = 30°. = \frac{1}{6}\pi$: dan is $\sin.\, x = \sin.\, 30 = \frac{1}{2}$: en derhalve

$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{3}\,.\,\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{4}\,.\,\frac{1}{5}\,.\,\frac{1}{2^5} +$

I. $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} +$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}} +$ enz.

Indien men flechts deze	0.500,000,000
6 leden uitwerkt en bij el-	0.020,833,333
kander optrekt, zal men	0.002,343,750
bevinden dat de boog van	0.000,348.772
30°, den *radius* voor 1 ne-	0.000,059,339
mende in deelen van den	0.000,010,922
radius is . . .	0.523,596,116
en multipliceerende door . .	6
komt	3.151,576,696

voor den halven omtrek zoo de *radius* 1, en dus voor den geheelen omtrek zoo de middellijn = 1 is: het geen maar in de 5 decimaal met de naauwkeurige berekening van LUDOLF verfchilt: met meerder leden te nemen, wordt de naauwkeurigheid grooter: doch dit zij genoeg.

VIII. VOORSTEL.

Eén boog x wordt door middel van deszelfs *cofinus* uitgedrukt door deze reeks.

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos. x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos.^3 x - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cos.^5 x$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cos.^7 x \text{ enz.}$$

BEWIJS. Om dat $y = \sin. y + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sin.^3 y + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \sin.^5 y + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \sin.^7 y +$ enz.

ftellende $y = 90 - x = \frac{\pi}{2} - x$: is $\sin. y = \cos. x$

en dus $90° - x$ of $\frac{\pi}{2} - x = \cos. x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos.^3 x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cos.^5 x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cos.^7 x +$ enz.

en

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos. x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos.^3 x - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cos.^5 x - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cos.^7 x - \text{enz.}$$

AANMERKING. Het blijkt dat de *coëfficienten* dezelfde zijn, en derhalve de zelfde wet volgen, als voor den boog door den *finus* uitgedrukt. Het zal niet noodig zijn hier een voorbeeld te geven.

IX. VOORSTEL.

Een boog wordt, door middel van deszelfs *tangent* uitgedrukt door deze reeks

$$x = tang.\, x - \tfrac{1}{3}\, tang.^3\, x + \tfrac{1}{5}\, tang.^5\, x - \tfrac{1}{7}\, tang.^7\, x.$$

BEWIJS. Zij $x = A \,.\, tang.\, x + B \,.\, tang.^3\, x + C \,.\, tang.^5\, x$: zal gelijk behoort bij $tang.\, 0$, $x = 0$ worden: en vermits $tang.\, (-x) = -\, tang.\, x$ kunnen er in deze reeks geen andere dan oneven magten van $tang.\, x$ gevonden worden.

Insgelijks zij $y = A\, tang.\, y + B\, tang.^3\, y + C\, tang.^5\, y$ enz. zal men hebben

$x - y = A\, (tang.\, x - tang.\, y) + B\, (tang.^3\, x - tang.^3\, y) + C\, (tang.^5\, x - tang.^5\, y) +$ enz.

derhalve, dividerende werkelijk alle de leden door $tang.\, x - tang.\, y$: komt

$\dfrac{x - y}{tang.\, x - tang.\, y} = A + 3\, (tang.^2\, x + tang.\, x \,.\, tang.\, y + tang.^2\, y) + C\, (tang.^4\, x + tang.^3\, x \,.\, tang.\, y + tang.^2\, x\; tang.^2\, y + tang.\, x \,.\, tang.^3\, y + tang.^4\, y) +$ enz.

maar $tang.\, x - tang.\, y = \dfrac{(sin.\, (x - y)}{cos.\, x - cos.\, y}$ (VIII. 32. N°. 55.)

derhalve $\dfrac{x - y}{tang.\, x - tang.\, y} = \dfrac{(x - y)\; cos.\, x \,.\, cos.\, y}{sin.\, (x - y)}$

maar indien $x = y$, is $\dfrac{x - y}{sin.\, (x - y)} = 1$ (VIII. 10. Gev. 3.) en $cos.\, x \,.\, cos.\, y = cos.^2\, x$

derhalve

$cos.^2\, x = A + 3\, B\; tang.^2\, x + 5\, C\; tang.^4\, x + 7\, D\; tang.^6\, x$

maar $cos.^2\, x = \dfrac{1}{sec.^2\, x} = \dfrac{1}{1 + tang.^2\, x}$: en zoo men kortheidshalve stelt $tang.\, x = t$ is

$cos.^2\, x = \dfrac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 +$ enz. gelijk door werkelijke divisie blijkt: derhalve

$1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8$ enz. $= A + 3\, B \,.\, t^2 + 5\, C\, t^4 + 7\, D\, t^6$ enz.

en gevolgelijk . . . $A = 1$

$3\, B = -1$: dus . . $B = -\tfrac{1}{3}$

$5\, C = 1$ . . . $C = \tfrac{1}{5}$

$7\, D = -1$ . . . $D = -\tfrac{1}{7}$ enz.

waaruit volgt

$$x = tang.\, x - \tfrac{1}{3}\, tang.^3\, x + \tfrac{1}{5}\, tang.^5\, x - \tfrac{1}{7}\, tang.^7\, x.$$

I.

I. AANMERKING. Deze reeks is voor het eerst voorgedragen door JACOB GREGORIJ in 1671: daar na door LEIBNITS, aan wien men dezelve doorgaans toeschrijft.

I. GEVOLG.

Indien $x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, en dus $tang.\ x = 1$: wordt deze reeks $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ enz.

II. AANMERKING. Deze reeks is te weinig samenlopende om met nut gebruikt te kunnen worden; daarom heeft EULER dezelve aldus veranderd.

Zij $a + b = 45^\circ. = \frac{1}{4}\pi$: dan is (VIII. 32. N°. 64.)
$$tang.\ (a + b) = \frac{tang.\ a + tang\ b}{1 - tang.\ a\ .\ tang.\ b} = 1$$
en derhalve $1 - tang.\ a\ .\ tang.\ b = tang.\ a + tang.\ b$; of $tang.\ b = \frac{1 - tang.\ a}{1 + tang.\ a}$. Zij $tang.\ a = \frac{1}{2}$; derhalve $tang.\ b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Dan heeft men
$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\ .\ 2^3} + \frac{1}{5\ .\ 2^5} - \frac{1}{7\ .\ 2^7} + \frac{1}{9\ .\ 2^9} \text{ enz.}$$
$$b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\ .\ 3^3} + \frac{1}{5\ .\ 3^5} - \frac{1}{7\ .\ 3^7} + \frac{1}{9\ .\ 3^9} \text{ enz.}$$
waaruit wordt afgeleid dit

II. GEVOLG.

$$\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{3\ .\ 2^3} + \frac{1}{5\ .\ 2^5} - \frac{1}{7\ .\ 2^7} + \frac{1}{9\ .\ 2^9} \text{ enz.} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3\ .\ 3^3} + \frac{1}{5\ .\ 3^5} - \frac{1}{7\ .\ 3^7} + \frac{1}{9\ .\ 3^9} \text{ enz.} \end{cases}$$

of

$$\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{5}{6} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9}\right) + \text{ enz.} \\ - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}\right) + \text{ enz.} \end{cases}$$

V. HOOFDSTUK.

VOORSTEL,

Den grootsten cubus te vinden die men door eenen gegeven cubus kan laten doorgaan (*),

Opgelost door wijlen den Heer

PIETER NIEUWLAND, *Hoogleeraar te Leyden.*

Laat (Fig. 247) ABCD de bovenste oppervlakte van den *cubus* verbeelden, ACFE de snede van een vlak dat loodregt door de diagonaal AC gaat: G het middelpunt van den *cubus* HGL eene loodlijn, door G in dat vlak op AC getrokken. Trek uit G, GP naar welgevallen: neem in GP een stip I naar welgevallen: trek door I de lijn KIQ loodregt op GP, en IO loodregt op AH. Trek uit O in het vlak ABC, OM loodregt op AC tot een stip M, naar welgevallen in OM genomen: en trek uit M de lijn MN loodregt op OM. Wanneer men onderstelt dat deze zelfde bewerking in de andere helft ADC van het vlak ABCD, en insgelijks aan de andere zijde van HL, en aan de benedenste oppervlakte van den *cubus* verrigt zij, en dat men vervolgens den *cubus* snijdt door vlakken welke loodregt op het vlak. AF door KI en loodregt op het vlak ABCD, door MN gaan; zal er een stuk van den *cubus* overig blijven door het welk men een regthoekig *parallelepipedum* zal kunnen schuiven, het welk 2 MO voor breedte, en 2 IG voor hoogte hebben zal, terwijl deszelfs derde afmeting, of lengte, onbepaald blijft.

Indien men begeert dat dit *parallelepipedum* een *cubus* zij, heeft men slechts OM = GI te nemen.

Men kan verschillende snijdingen doen, door welke alle een *parallelepipedum*, of *cubus* van gelijke grootte zal gaan. Men beschrijve, met GI als *radius*, en uit G als middelpunt, den cirkelboog I*i*S: wanneer men in dien cirkelboog eenig ander stip *i* aanneemt, en daar uit de loodlijnen *kiq*, en *i*O oprigt, en uit *o* de loodlijn *om* = OM maakt, zullen de sneden door KIQ, en *kiq* den zelfden doorgang opleveren.

In-

(*) Zie hier het geen gezegd is in het XI. Boek, Voorst. 34 Aanm. 8.

Indien men begeert dat niet alleen het *parallelepipedum* een *cubus* zij, maar ook dat die *cubus* gelijk zij aan den gegeven *cubus* zelven, moet men OM = GI = GH = ½ AB nemen.

Men kan verschillende snijdingen maken, die alle aan het gevraagde voldoen zullen. Naar mate men de hoek HGI kleiner neemt, zal AK kleiner, en het gedeelte van den *cubus* AKQ dunner worden. Stelt AK oneindig klein, dan zullen de stippen P, O, I en H op malkander vallen en BH > HG dus > MI zijn.

Verwijdert men het stip O van H; dan zal het stip M hoe langer hoe nader aan AB komen; stel dat het stip O in T valle, wanneer M op U in de lijn AB valt; en dus dat UT = GI = ½ AB zij: dan zal T het laatste stip in AH zijn waarin G vallen kan, om eenen *cubus* gelijk aan den gegeven te laten doorgaan Het spreekt van zelve dat in de praktijk U nimmer volmaakt in AB vallen kan. Wij zullen dit opgegeven geval in het vervolg nader beschouwen.

Wanneer men het stip O tusschen H en T laat vallen, in x, bij voorbeeld, zal men den gegevenen *cubus* zoodanig kunnen snijden dat er een grooter *cubus* door kan gaan; en men zal voor elk der *cubi* wederom verschillende snijdingen kunnen doen.

Men begeert het stip te bepalen alwaar O vallen moet op dat de *grootstmogelijke cubus* zou doorgaan. Stel dat x dat stip zij. Het is klaar dat dit plaats zal hebben, wanneer I, O en P in elkander vallen (hier in x), en tevens M in de lijn AB (hier in y), valt, en ten zelfden tijde GI = OM: (hier $Gx = xy$) is.

OPLOSSING.

In $\triangle\, Axy$ is $\angle\, x = L$: $\angle\, xAy = \frac{1}{2} L$: dus $\angle\, Ayx = \angle\, xAy$: en $yx = Ax = xG$.

Voorts $\overline{AH}^2 = \frac{1}{2}\,\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\,\overline{HL}^2 = 2\,\overline{HG}^2$

$\overline{AG}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HG}^2 = 3\,\overline{HG}^2$

$\overline{AG}^2 = \overline{Ax}^2 + \overline{xG}^2 + 2\,Ax \,.\, xH = 2\,\overline{Ax}^2 + 2\,Ax \,.\, xH = 2\,\overline{Ax}^2 + 2\,Ax\,(AH - Ax) = 2\,Ax \,.\, AH$:

derhalve $3\,\overline{HG}^2 = 2\,Ax \,.\, AH$: en

$Ax : 3\,HG = HG : 2\,AH$: en $\overline{Ax}^2 : 9\,\overline{HG}^2 = \overline{HG}^2 : 4\,\overline{AH}^2$.

of

of $\overline{Ax}^2 : \frac{9}{2}\,\overline{AH}^2 = \frac{1}{2}\,\overline{AH}^2 : 4\,\overline{AH}^2$:
$\overline{Ax}^2 : 9\,\overline{AH}^2 = \overline{AH}^2 : 16\,\overline{AH}^2 = 1 : 16$
en $\overline{Ax}^2 = \frac{9}{16}\,\overline{AH}^2$: of $Ax = \frac{3}{4}\,AH$ en
$2\,Ax = \frac{3}{4}\,AC$.

Wij zijn dus tot deze allereenvoudigste oplossing gekomen: „ *De lijn waarop de grootstmogelijke cubus beschreven wordt is gelijk aan drie vierde deelen van de diagonaal der zijde van den gegeven cubus.*"

Ook de lijnen Ay, Ax, en $\angle\, xGH$ zijn zeer gemakkelijk in getallen te bepalen: want in de gelijkvormige driehoeken ABH en Axy
is $AH : Ax\ (= 4:3) = AB : Ay$: derhalve
$$Ay = \tfrac{3}{4}\ AB = 4\ Ax$$
Wanneer men HW trekt is $Hx : HW = Gx$ (of Ax): GH: maar $Ax = 3\ Hx$; dus $GH = 3\ HW$.

Wanneer men $GH = 1$. voor *radius* aanneemt, is $HW = \textit{sin.}\ \angle\, xGH$: dus $\textit{sin.}\ \angle\, xGH = \frac{1}{3} = .0.3333333$: en $\angle\, xGH$ omtrent $19^\circ.\ 28'.\ 16''$. Voorts in de gelijkvormige driehoeken GHx en xAK, $HG : Hx = Ax : AK$ of $1 : \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2} : AK$: derhalve $AK = \frac{3}{8}\ HG = \frac{3}{16}\ AB$.

Wanneer men $HG = 1$ stelt, vindt men voor de rede der lijnen van beide de *cubi* ($AB : 2\ Ax$) $1 : \frac{3}{4}\sqrt{2}$. Indien men deze tot decimalen brengt: vindt men $1 : 1.06066$. De rede der *cubi* zelve $(\overline{1 : 1.06066})^3$ is $1 : 1.19324$.

Dit vraagstuk levert een voorbeeld op van een Voorstel uit de leer der *grootsten* en *kleinsten* opgelost, zonder behulp van *Algebra*, of *verdere Meetkunde.*

Ik laat nog eene aanmerking volgen omtrent de plaats van het stip T, het welk wij ondersteld hebben de limiet van snijding te zijn voor den gelijken *cubus.* Dat stip is van zelve bepaald uit de beschouwing dat $UT = \frac{1}{2}\ AB = AT$ zijn moet: derhalve $HT = AH - AT$: of stellende $AT = 1$: $HT = \sqrt{2} - 1 = 1.414213 - 1 = 0.414213$: Maar $HT = \textit{tang.}\ \angle\, HGT$: dus $\angle\, HGT = 22^\circ.\ 30'$.

WERKSTUKKEN

UIT DE

GRONDBEGINSELS

DER

MEETKUNDE.

INHOUD.

VIJF-

I N H O U D.

V IJ F D E B O E K.

Z E S D E B O E K.

W A A R S C H U W I N G.

Achter ieder Werkstuk vindt men bij het woord OPLOSSING, de aanwijzing van die Werkstukken door welke het voorgestelde Werkstuk opgelost wordt: en bij het woord BEWIJS, de aanwijzing der Voorstellen uit de *Grondbeginsels* waar door aangetoond wordt, dat de oplossing indedaad aan het gevraagde voldoet.

WERK-

WERKSTUKKEN

UIT DE

GRONDBEGINSELS

DER

MEETKUNDE.

INLEIDING.

Men zegt, *in navolging der Ouden*, dat een vraagſtuk, of werkſtuk, door de Meetkunde, *in den ſtriktſten zin*, wordt opgelost, als men de oplosſing volkomen zeker, en zonder toetſingen, verrigt, enkel door middel van regte lijnen en cirkels; dat is, met behulp alleen van liniaal en pasſer.

AANMERKING. Ik zeg *in navolging der Ouden*, en *in den ſtriktſten zin*; doch ſedert den tijd van CARTESIUS neemt men het woord van *geometriſche oplosſing* in eenen ruimeren zin. Alles wat niet alleen door cirkels en regte lijnen, maar ook door zoo genoemde *geometriſche lijnen*, zoo als de *kegelſneden*, wordt opgelost, wordt tot de *geometriſche* oplosſingen gebragt. Wij zullen echter hier alleen van geometriſche oplosſingen in den zin der Ouden ſpreken.

Men vooronderſtelt dan deze vier dingen.

I. VOORONDERSTELLING.

Dat men uit een gegeven ſtip eene regte lijn trekken kan, het zij onbepaaldelijk, het zij gelijk aan eene gegeven lijn, het zij tot een ander gegeven ſtip.

II. VOORONDERSTELLING.

Dat men eene lijn naar welgevallen kan verlengen.

III. VOORONDERSTELLING.

Dat men van eene regte lijn een bepaald stuk kan afsnijden het welk aan eene bepaalde lijn gelijk is.

IV. VOORONDERSTELLING.

Dat men uit een gegeven stip, met eenen gegeven *radius*, eenen cirkel trekken kan.

Men voege hier bij de volgende *Axiomata*, die wij, wel is waar, reeds in het eerste Boek van de *Grondbeginsels der Meetkunde* hebben voorgedragen, doch, gemakshalve, hier herhalen.

I. AXIOMA.

Regte lijnen, waarvan twee stippen overeenkomen, liggen op elkander.

II. AXIOMA.

Regte lijnen, die elkander snijden, of die uit het zelfde stip getrokken worden, hebben niets dat haar gemeen is, behalven het stip waarin zij zich snijden, of ontmoeten, of waaruit zij getrokken worden. Dit is het eenigste dat tot alle die lijnen behoort.

III. AXIOMA.

Regte lijnen, wier uiterste stippen overeenkomen, en die, gevolgelijk, geheel overeenkomen, (*Axioma* I.) zijn gelijk: en omgekeerd, lijnen die aan elkander gelijk zijn, komen geheel overeen, indien men hare uiterste stippen, of uiteinden, op elkander legt.

IV. AXIOMA. Fig. 23.

Indien men uit de twee uiteinden A en B, van eene lijn, als middelpunten, twee cirkels trekt, met een' en den zelfden *radius* [AB, BA], welke aan die lijn gelijk is, of grooter is dan dezelve, zullen die cirkels [BEC, ADC] elkander [in C] snijden.

AANMERKING. Zie de Aanmerkingen op het zelfde *Axioma* in de Meetkunde, bl. 5.

Om een voorgesteld werkstuk te kunnen oplossen; behoort

hoort men de eigenschappen der zaak, die volbragt moet worden, te kennen, en uit deze, of uit andere die daar mede verbonden zijn, de oplossing afteleiden. Deze is de rede, waarom ik in de *Grondbeginsels der Meetkunde*, in ieder Voorstel, wanneer het noodig was, het werkstuk heb aangehaald, dat men kan oplossen, als men dat Voorstel, mitsgaders zoodanige der voorgaande als vereischt worden, kent.

Die een Voorstel begeert optelossen, en het zelve te ingewikkeld bevindt om terstond te kunnen zien van welke eigenschappen de oplossing afhangt; vervaardige eene figuur, waarin hij dat begeerde als reeds verrigt kan beschouwen, en gaa dan na, tot welke eenvoudiger eigenschappen die beschouwing kan leiden, om dan, naderhand, uit deze de constructie afteleiden. Men neme bij voorbeeld het 15 Werkstuk van het vijfde Boek: Fig. 84. Indien NO de lijn is welke de beide cirkels raakt in N en O: en men trekt de lijnen NG en OK naar de middelpunten, zullen die lijnen loodregt op NO staan (V. 4.) en dus evenwijdig aan elkander zijn. Zoo men dan uit K, PK trekt evenwijdig aan NO, zal men eenen regthoek NOKP bekomen: en PG zal gelijk zijn aan NG *minus* OK. Indien men derhalve, met GP als *radius*, uit G eenen cirkel trekt, zoude die lijn KP, welke loodregt staat op GN, den getrokken cirkel in P raken: en dit geeft de *constructie* van dit Werkstuk, zoo als blijkt uit het geen bij dat Werkstuk is aangeteekend.

Eindelijk, wanneer men de oplossing verrigt heeft, moet men bewijzen dat zij aan het gevraagde voldoet. Hiertoe dient het *Bewijs*, of liever de aanduiding der Voorstellen, die wij naast het woord *Bewijs* hebben aangevoerd: en tot zoodanig *Bewijs* wordt nog somtijds eenige bereiding vereischt.

EERSTE BOEK.

OVER DE REGTE LIJNEN EN DE HOEKEN.

I. AFDEELING.

OVER DE GELIJKE LIJNEN, DE LOODLIJNEN, EN DE EVENWIJDIGE LIJNEN.

I. WERKSTUK. Fig. 1.

Uit een gegeven ſtip C eene regte lijn CG te trekken, die gelijk zij aan eene gegeven lijn AB.

EUCL. I. 2.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderſtelling, en het 4. *Axioma.* De Cirkels namenlijk worden getrokken uit A en C met CA als *radius*: uit A met AB als *radius*: uit D met DF als *radius*.

AANMERKING. Deze oplosſing is die van EUCLIDES: doch ik twijfel of het niet even mathematisch zoude zijn te zeggen? „ Beſchrijf uit C met eenen *radius* gelijk aan AB „ eenen cirkelboog: trek GC van den omtrek naar het „ middelpunt: het is de gevraagde lijn." In de praktijk gaat men altijd op die wijze te werk.

II. WERKSTUK. Fig. 2.

Twee regte lijnen AB en C gegeven zijnde, van de grootſte AB een ſtuk AE af te ſnijden dat gelijk is aan de kleinſte.

EUCL. I. 3.

OPLOSSING. Door het 1. Werkſtuk maakt men AD = C: en dan gaat men voort door de 4. Vooronderſtelling.

AANMERKING. Deze oplosſing is wederom van EUCLIDES. Zoude het niet even mathematisch zijn te zeggen? „ Be- „ ſchrijf uit A met den *radius* AE, gelijk aan C, eenen „ cirkelboog DEF.' In de praktijk gaat men altijd dus te werk.

III. WERKSTUK, Fig. 3.

Uit een gegeven ftip C in eene gegeven lijn ED, eene lijn CF te trekken die op de gegeven lijn ED loodregt ftaat.

EUCL. I. 11. — St. I. 9. — L. G. II. prob. 2.

OPLOSSING. Men neemt CB naar willekeur: men maakt CA = CB: en werkt door de 4. Vooronderftelling, en het 4. *Axioma*.

BEREIDING voor het Bewijs. Men trekt FB, FA.

BEWIJS. Of uit I. 26: of uit I. 27. Gev. 4.

IV. WERKSTUK.

Op het uiteinde B van eene gegeven lijn AB eene loodlijn BD opterigten.

L. G. II. prob, 2. *Scholie.*

I. OPLOSSING. Fig. 4. Men verlenge AB: en werke als in het voorgaande Werkftuk.

BEREIDING voor het Bewijs. Men trekt DK, DI.

BEWIJS. Of uit I. 26. of uit I. 27, Gev. 4.

II. OPLOSSING. Fig. 5. Men neme een ftip A: werke uit A en B volgens het 4. *Axioma*: men trekke ACD, make CD = CA: en trekke DB, die de gevraagde lijn is.

BEWIJS. Of uit I. 27. Gev. 3, I. 27, en I. 15. op ABCD toegepast. Of uit C met CA als *radius* den cirkel ABFDG trekkende, uit V. 7.

V. WERKSTUK. Fig. 6.

Uit een ftip F, buiten eene gegeven regte lijn AB, eene loodlijn FH op die lijn te laten vallen.

EUCL. I. 12, — St. I. 10. — L. G. II. prob. 3.

OPLOSSING. Eerst gaat men uit F volgens de 4. Vooronderftelling te werk: dan insgelijks volgens dezelve, en het 4. *Axioma* uit D en E: men trekt FHG, die de gezochte lijn is.

BEREIDING tot het Bewijs. Men trekt FD, FE, GD, GE.

BEWIJS. Uit I. 27. Gev. 5.

VI. WERKSTUK. Fig. 7.

Uit een gegeven ſtip E eene lijn EG te trekken die evenwijdig is aan eene gegeven lijn IM.

EUCL. I. 31. — St. I. 19. — L. G. II. 6.

I. OPLOSSING. Men trekt ED naar welgevallen: en gaat uit E voor den ∠ GED ten opzigte van den hoek EDI, volgens het XII. Werkſtuk van dit Boek te werk.

BEWIJS. Uit I. 8.

II. OPLOSSING. Eerst uit E voor EI door het V. Werkſtuk: dan uit eenig ſtip D voor DK door het III. en het I. Men trekt eindelijk, door E en K, de lijn EG die de gezochte lijn is.

BEWIJS. Uit I. 13.

II. AFDEELING.

OVER DE VERDEELING DER LIJNEN.

VII. WERKSTUK. Fig. 6.

Eene gegeven lijn DE in twee gelijke deelen EH, HD, te verdeelen.

EUCL. I. 10. — St. I. 8. — L. G. II. prob. 1.

OPLOSSING. Men gaat uit de beide uiteinden E en D volgens het 4. *Axioma* tweemaal te werk, zoo dat twee cirkelbogen zich in F, twee andere zich, het zij beneden het zij boven de lijn AB, in G ſnijden. Men trekt FG: die de lijn DE in twee gelijke deelen verdeelen zal.

BEREIDING tot het Bewijs. Men trekt FD, FE, DG, GE.

BEWIJS. Uit I. 27. Gev. 5.

VIII. WERKSTUK. Fig. 8 en 10.

Eene gegeven regte lijn BA in zoo vele gelijke deelen BR, RS, enz. te deelen als men wil.

CLAVIUS op de 10 prop. van het VI. Boek van EUCLIDES. — L. G. III. prob. 1.

I.

I. OPLOSSING. Fig. 8. Men trekt BH naar willekeur: men neemt daar op zoo vele willekeurige, doch gelijke deelen, BC, CD enz. als het getal deelen waarin AB gedeeld moet worden, bedraagt. Men trekt HA: en dan door Werkst. 6. GV, FU, enz.

BEWIJS. Uit I. 35. Gev. ook uit IV. 1. Gev. 2.

II. OPLOSSING. Fig. 10. Men trekt uit eenig stip P naar willekeur door het uiteinde A der lijn AB, de onbepaalde lijn PAC. Men trekt door P, de onbepaalde PH // AB. Men neemt op PH, zoo vele onbepaalde, doch gelijke deelen PI, ID, enz. als het getal deelen waarin AB gedeeld moet worden, bedraagt. Men trekt door H en B de lijn HB die PAC in C ontmoet. Men trekt uit C, door I, D, enz. de lijnen CI, CD, enz. die AB in V, U, enz. snijden.

BEWIJS. Uit IV. 4. Gev.

AANMERKING. De bewerking door den *proportionaal-passer*, om dit Werkstuk optelosfen, komt met deze tweede oplossing over één. Zie 6. Aanmerking op IV. 2.

IX. WERKSTUK. Fig. 9.

Van eene gegeven lijn AB, een bepaald gedeelte AD aftesnijden.

EUCL. VI. 9.

OPLOSSING. Door het VIII. Werkstuk, 1. Oplossing.

BEWIJS. Door I. 35. of IV. 1. Gev. 2.

AANMERKING. De *proportionaal-passer* is hiertoe in de praktijk zeer dienstig.

X. WERKSTUK. Fig. 11.

Eene gegeven lijn AB, zoodanig te snijden in C, dat de regthoek uit de geheele lijn AB en het kleinste stuk BC gelijk zij aan het vierkant op het grootste stuk AC: of, wat (IV. Bep. 4.) op het zelfde uitkomt, eene gegeven lijn AB in *uiterste en middelste rede* te verdeelen.

EUCL. II. 11. en VI. 30. — St. II. pr. 11. — L. G. III. prob. 4.

OPLOSSING en BEWIJS. Uit II. 25.

AANMERKING. Dit Werkstuk is het zelfde als het XI. van het

het III. Boek. Zie IV. Boek der Grondbeginsels, Bep. 4, 1 Aanm. bl. 187.

XI. WERKSTUK. Fig. 12.

Indien er twee regte lijnen, AB en CD, gelijk of ongelijk, gegeven zijn: eene derzelven CD, zoodanig te verlengen, dat de regthoek uit die lijn te samen met het verlengde stuk (dat is uit CL), en uit het verlengde stuk DL, gelijk zij aan het vierkant op de andere lijn *AB*.

CLAVIUS op EUCL. III. 36. p. 312.

OPLOSSING. Trek de ⊥ CG = AB volgens het IV. en I. Werkstuk: werk dan door het VII en door de 4. Vooronderstelling; men trekke GEH; make eindelijk door het *II.* Werkstuk DL = GI.

BEWIJS. Uit V. 20.

III. AFDEELING.

OVER DE HOEKEN.

XII. WERKSTUK. Fig. 13.

Uit een gegeven stip A van eene gegeven lijn AB, eene lijn AG te trekken, die met de gegeven lijn eenen hoek GAB make gelijk aan eenen gegeven hoek IDH.

EUCL. I. 23. — St. I. 18. — L. G. II. prob. 4.

OPLOSSING. De stippen C en E op DI en DH naar willekeur genomen hebbende trekt men CE: men maakt (door I. Werkstuk van Boek II.) op AF eenen △ GAF waarvan de zijden AG, GF, AF, respectivelijk gelijk zijn aan DC, CE, ED.

BEWIJS. Uit I. 26.

XIII. WERKSTUK. Fig. 14.

Uit een gegeven stip F, buiten de lijn AB, eene lijn FA te trekken, welke met de gegeven lijn AB eenen hoek FAB make gelijk aan eenen gegeven hoek C.

OPLOSSING. Men gaat uit eenig ſtip D, volgens Werkſtuk XII, te werk: en daarna uit F volgens Werkſtuk VI.

BEWIJS. Uit I. Bep. 10.

XIV. WERKSTUK. Fig. 17.

Een hoek A gegeven zijnde, eenen hoek te maken die deszelfs dubbeld, drievoud, viervoud, enz. zij.

NEWTON, *Arithm. Univer. Prob.* 29.

OPLOSSING. Men verlenge de beenen IA en HA des gegeven hoeks: neme BA naar willekeur: make BC = BA; CD = BC, DE = DC, FE = DE; enz.

Dan is ∠ CBD = 2 A; ∠ DCE = 3 A; ∠ EDF = 4 A.

BEWIJS. Uit I. 27. en I. 11.

I. AANMERKING. Zoodra men aan eene lijn komt, die op een der beenen regthoekig ſtaat, kan men niet verder gaan: om dat men dan geen nieuwe lijnen zoo als BC, CD, DE, EF, die aan het begeerde voldoen, trekken kan.

II. AANMERKING. En ook hieruit kan men de waardij der *ſinusſen* en *coſinusſen* van den dubbelden, drievoudigen, enz. hoek opmaken. Men trekke de ⊥⊥ B*b*, C*c*, D*d*, enz.

Want I. △ AC*c* ∽ △ AB*b*: en dus

$AB : Bb = AC : Cc$: d. i $r : \text{ſin.}\, a = 2\,\text{coſ.}\, a : Cc$: en dus

$$Cc = \text{ſin.}\, \angle\, cBC = \text{ſin.}\, 2a = \frac{2\,\text{ſin.}\, a \,.\, \text{coſ.}\, a}{r}.$$

II. $AC : Ac = AB : Ab$: of $2\,\text{coſ.}\, a : Ac = r : \text{coſ.}\, a$ en dus

$$Ac = \frac{2\,(\text{coſ.}\, a)^2}{r}: \text{ en } Bc = \text{coſ.}\, \angle\, cBC = \text{coſ.}\, 2a =$$

$$= Ac - AB = \frac{2\,(\text{coſ.}\, a)^2}{r} - r = \frac{2\,(\text{coſ.}\, a)^2 - r^2}{r} =$$

$$= \frac{(2\,\text{coſ.}\, a)^2 - (\text{coſ.}\, a)^2 - (\text{ſin.}\, a)^2}{r} = \frac{(\text{coſ.}\, a)^2 - (\text{ſin.}\, a)^2}{r}.$$

III. △ AC*c* ∽ △ AD*d*:

en dus $AC : Cc = AD : Dd = AB + BD : Dd$

$2\,\text{coſ.}\, a : \text{ſin.}\, 2a = r + 2\,\text{coſ.}\, 2a : \text{ſin.}\, 3a$

$$\text{ſin.}\, 3a = \frac{r\,\text{ſin.}\, 2a + 2\,\text{ſin.}\, 2a \,.\, \text{coſ.}\, 2a}{2\,\text{coſ.}\, a} =$$

$$\frac{\frac{2\,r\,\text{sin.}\,a\,.\,\text{cos.}\,a}{r} + \frac{4 \times \text{sin.}\,a\,.\,\text{cos.}\,a}{r}\,\frac{(\text{cos.}\,a^2 - \text{sin.}\,a^2)}{r}}{2\,\text{cos.}\,a} =$$

$$\text{sin.}\,a + \frac{2\,\text{sin.}\,a\,.\,\text{cos.}\,a^2}{r^2} - \frac{2\,\text{sin.}\,a^3}{r^2} =$$

$$\text{sin.}\,a + \frac{2\,r^2\,\text{sin.}\,a}{r^2} - \frac{2\,\text{sin.}\,a^3}{r^2} - \frac{2\,\text{sin.}\,a^3}{r^2} =$$

$$3\,\text{sin.}\,a - \frac{4\,(\text{sin.}\,a)^3}{r^2}.$$

Welke formules de zelfde zijn als in VIII. 21, 22. en Aanmerking 3 op VIII. 22.

XV. WERKSTUK. Fig. 15.

Eenen gegeven hoek ACB in twee gelijke deelen [ACF, BCF] te deelen.

EUCL. I. 9. — St. I. 7. — L. G. II. prob. 5.

OPLOSSING. Men gaat uit C, te werk door de 4. Vooronderstelling, nemende CD = CE, en dan uit de beide stippen D en E, door dezelve en het 4. Axioma. Men trekt CF die de vereischte verdeeling maakt.

BEWIJS. Uit I. 27. Gev. 5.

AANMERKING. Men kan op die wijze, door eene gedurige verdeeling in twee deelen, eenen hoek in vier, acht, zestien enz. gelijke hoeken verdeelen: in één woord in een getal deelen dat eenige magt van het getal 2 is.

XVI. WERKSTUK. Fig. 16.

Eenen regten hoek BCA in drie gelijke deelen te deelen.

CLAVIUS op EUCL. I. 32.

OPLOSSING. Men maakt op AC den gelijkzijdigen driehoek CEA door II. Werkst. 2.; of wel, men gaat op AC, uit A en C, door *Axioma* 4. te werk, en trekt CE, AE. Vervolgens voor hoek ECA, door Werkstuk XIV.

BEWIJS. Uit I. 27. Gev, 5 en 3.

XVII. WERKSTUK. Fig. 18.

Eenen regten hoek BCA in vijf deelen te verdeelen.

OPLOSSING. Men beschrijve op CA, of op een stuk CE daarvan, den gelijkbeenigen △ CDE volgens Werkst. 11.

van

van het II. Boek. Dan is △ DCE $\frac{1}{5}$ L en dus ∠ BCF = $\frac{1}{5}$ L. Men deele dan ∠ ECD door Werkstuk XIV. in twee deelen, en dan ieder deel weder in twee deelen.

BEWIJS. Uit II. 26. en Gev. 3.

AANMERKING Men kan door de enkele Meetkunde, in den striktsten zin genomen, dat is, door cirkel en regte lijn, geen' hoek in een oneven getal deelen deelen, uitgenomen alleen den regten hoek in drie deelen, of ook in vijf deelen: het geen het onderwerp is van dit en het voorgaande Werkstuk.

ALGEMEENE AANMERKING

over het verdeelen van een' hoek in drie deelen.

Eenen hoek in drie deelen te verdeelen, met behulp van de Meetkunde, in den zin der Ouden genomen, dat is enkel met passer en liniaal, is, bij de Ouden een beroemd vraagstuk geweest, doch waartoe hunne Meetkunde, die wij hier volgen, onvermogend is.

Indien men die vraag stelkundig, d. i. *algebraisch* beschouwt, volgt het, uit het geen wij in de 2. Aanmerking op het veertiende Werkstuk gezegd hebben, dat de Oplossing afhangt van eene *aequatie*, of vergelijking, van de *derde magt*, te weten:

$$3\ Sin.\ a - \frac{4\ (sin.\ a)^3}{r^2} = sin.\ 3\ a: \text{of}$$

$$(sin.\ \tfrac{1}{3}\ a)^3 - \frac{3\ r^2}{4}\ sin.\ \tfrac{1}{3}\ a = - \frac{r^2\ sin.\ a}{4}$$ welke vergelijking door den cirkel alleen, niet kan opgelost, of gelijk men spreekt, *geconstrueerd* worden.

In de *Grondbeginsels der Meetkunde*, hebben wij op vier plaatsen over dit Vraagstuk gehandeld: te weten: In het I. Boek, Voorstel 29. Aanm. 2: het geen overeenkomt met V. 18. en met VIII. 8. Gev. 1: en dan nog in het tweede Gevolg van dat zelfde VIII. Voorstel: Alle deze Voorstellen nu, in praktijk gebragt, komen hierop neer, om *door toetsingen*, eene lijn zoodanig te trekken tot dat men bevinde aan het begeerde te hebben voldaan: gelijk nu blijken zal.

I. Zij Fig. 19. een hoek KCE gegeven: Neem *g*C naar willekeur: beschrijf uit C met den *radius* C*g* eenen cirkel *g*GHL: neem een liniaal FA: stel het zelve op het stip *g*, en keer het daarop tot dat het den omtrek in een tweede stip G zoodanig snijde, dat CG = GA: d. i. tot dat GA gelijk zij aan den *radius* van den getrokken cirkel: dan is ∠ A = $\frac{1}{3}$ ∠ KCE. Dit volgt uit I. 29. Aanm. 2. en VIII. 8. Gev. 1. en V. 18: die alle op één en het zelfde Voorstel uitkomen.

II. Zij (Fig. 21.) een gegeven hoek PCQ: beschrijf uit de kruin C met eenen *radius* CA naar willekeur eenen cirkel, die het ander been CQ des hoeks in D snijdt. Trek de choorde AD. Neem een liniaal NS, dat door het middelpunt C, of de kruin des hoeks, gaat: en dus de choorde AD ergens (in F), en den omtrek er-

ergens (in G) snijdt: en keer het om dat middelpunt, tot dat de choorde DG gelijk zij aan het stuk DF der choorde AD: dan zal de hoek GCD het derde gedeelte zijn des hoeks ACD. Immers de boog GD is de maat des hoeks GCD: en de boog AGD is die des hoeks ACD: Nu is in VIII. 8. Gev. 2 bewezen, dat de boog DG in het gezegde geval het derde gedeelte is van den boog AGD.

Er kunnen meer andere oplossingen gegeven worden, doch zij zijn alle van dien aard: te weten, dat zij slechts *mechanisch* zijn; dat is door het stellen van een werktuig, hier een liniaal, verrigt worden, niet op eene volmaakt zekere wijze, maar zoo dat men toetsen moet of het zoodanig gesteld is dat het aan het begeerde voldoet.

III. De Ouden maakten ook gebruik tot het oplossen van dit Werkstuk, van zekere kromme lijn, genoemd de *Quadratrix* van DINOSTRATES, welke door dezen, of misschien wel door HIPPIAS, (zie VII. 26. Aanm. 6.) is uitgevonden, met opzet om eenen hoek in zoo vele deelen te deelen als men wil: zie over die kromme lijn, en haar gebruik tot dit Voorstel, FLORIJN, *Grondbeginsels der hoogere Meetkunde*, II. Boek, Hoofdst. III. prop. 3, §. 46: en CLAVIUS op EUCL. VI. *appendix*, vooral §. 2: en deszelfs *Geometria Practica. Lib.* VII. *Appendix*. Om het zelve door de kegelsneden te verrigten, zie CARTESII *Geometria*, *Lib.* III.

IV. In de praktijk, wanneer de grootte van den gegeven hoek in graden door middel van den *transporteur* bekend is: neemt men het derde gedeelte van dat getal om de grootte van den boog te bekomen die de maat zal zijn van den hoek welke het derde gedeelte is van den gegeven: doch dit is werktuiglijk, niet geometrisch.

Wij hebben reeds gezien dat de regte hoek hier eene uitzonderig maakt, zoo wel voor het deelen in vijf als in drie gelijke deelen. In het geval van de verdeeling in drie deelen, is immers Fig. 20. de rigting der lijn gGA van zelf bepaald; want, om dat $\angle gCB = L = gCA$: en $\angle A = \frac{1}{3} \angle GCE$ zijn moet, zal ook $\angle A = \frac{1}{3} \angle ACg$ zijn: en dus $\angle AgC = \frac{2}{3} L$: maar om dat $GC = gC$ is $\angle gGC = \angle GgC = \frac{2}{3} L$: en dus hoek $GCg = \frac{2}{3} L$: derhalve $\Delta\ GCg$ gelijkzijdig: en dus $Gg = GC$, en strikt geometrisch bepaald.

TWEE-

TWEEDE BOEK.

OVER DE BESCHRIJVING VAN REGTLIJNIGE FIGUREN.

I. AFDEELING.

OVER DE BESCHRIJVING VAN FIGUREN, UIT GEGEVEN ZIJDEN EN HOEKEN.

I. WERKSTUK. Fig. 22.

Uit drie gegeven lijnen A, B, C, waarvan twee te famen grooter zijn dan de derde, eenen driehoek EHF te maken.

EUCL. I. 22. — St. I. 17. — L. G. II. prob. 10.

OPLOSSING. Men make EF = C: trekke uit E en F met de *radii* gelijk aan B en aan A cirkels, of cirkelbogen, die elkander in H fnijden: men trekke EH, FH.

AANMERKING. De reden waarom in den tekst deze voorwaarde, *waarvan twee te famen grooter dan de derde* gevoegd wordt, blijkt uit I. 19.

II. WERKSTUK. Fig. 23.

Op eene gegeven lijn AB eenen gelijkzijdigen driehoek ABC te befchrijven.

EUCL. I. 1. — St. I. 6. Gev.

OPLOSSING. Door *Axioma* 4.

III. WERKSTUK. Fig. 24.

Op eene gegeven lijn AB eenen gelijkbeenigen driehoek ABC te befchrijven.

CLAVIUS op EUCL. I. 1. — St. I. 6.

OPLOSSING. Door het 4. *Axioma*.

AANMERKING. Men befchrijft op gelijke wijze, doch door cirkels wier ftralen ongelijk zijn, eenen ongelijkzijdigen driehoek op eene regte lijn. Zie CLAVIUS ter aangehaalde plaatfe.

IV.

IV. WERKSTUK. Fig. 24.

Eene zijde en twee hoeken eens driehoeks gegeven zijnde, den driehoek te beschrijven.

L. G. II. prob. 9.

OPLOSSING. Trek uit A en B de lijnen AC, en BC, ieder onder den gegeven hoek. Zij ontmoeten elkander ergens in C en de driehoek is bepaald.

I. AANMERKING. Indien twee zijden en de door de zelve begrepen hoek gegeven zijn, kan men op gelijke wijze den driehoek beschrijven: ook indien twee zijden, en een hoek niet tusschen dezelve begrepen gegeven zijn: mits die gegeven hoek regt of stomp zij: of mits men wete dat de twee overige hoeken beiden scherp zijn: of indien een derzelve regt of stomp is, aan welke zijde hij grenst (I. 25.).

L. G. II. prob. 11.

II. AANMERKING: Indien de drie hoeken alleen gegeven zijn, is de driehoek onbepaald (I. 26. Aanm. 2.), en men kan dan alleen eenen *driehoek maken die met den gegeven gelijkhoekig is*, het geen zeer gemakkelijk valt door het 12. Werkstuk des I. Boeks: want zoodra men op eene gegeven lijn twee hoeken zal gemaakt hebben, die aan de twee op eene zijde des gegeven driehoeks, gelijk zijn, ieder aan ieder, volgt de derde hoek van zelf.

V. WERKSTUK. Fig. 25.

Op eene gegeven lijn AB, een vierkant te beschrijven, en ook een' regthoek, waarvan de andere regthoekszijde insgelijks gegeven is.

EUCL. I. 46. — St. I. 31.

OPLOSSING *voor het vierkant*. Voor AD en BC uit het IV. en II. Werkstuk van het I. Boek; men trekt daarna DC: of wel; voor AD uit I. Werkstuk 4 en 2: en dan uit D en B met eenen *radius* gelijk aan AB, door Vooronderst. 4.

BEWIJS. Uit I. Bep. 19. en Voorst. 31. Gev. 2.

AANMERKING. De bewerking is de zelfde, indien men, niet een vierkant, maar eenen regthoek op de lijn AB beschrijven wil; dan worden AD en BC niet aan AB maar aan de andere gegeven lijn gelijk gemaakt.

VI.

VI. WERKSTUK. Fig. 26.

De som AE der twee zijden eens regthoeks, en de diagonaal AC van denzelven gegeven zijnde, de zijden AL, LC, te bepalen.

OPLOSSING. 1°. Deel AC in twee gelijke deelen in K; en beschrijf uit K op AK den cirkel ABCDA. 2°. Rigt CF ⊥ op AC en = AC. 3°. Trek AF die door den omtrek ADC in twee gelijke deelen in D gesneden wordt (I. 27. V. 7). 4°. Beschrijf uit D met DA den halven cirkel ACGF: stel AE in dien halven cirkel in AG, of, wat op het zelfde uitkomt, trek uit A, met den *radius* AE, den boog EG Trek AG, die door den cirkel ABCD gesneden wordt in L. Trek LC: verder de choorde AM = LC: trek MC: AMCL is de gevraagde regthoek.

BEWIJS. Trek CG. Om dat AC = CF, is ⌒ AC = ⌒ FGC: en omdat ⌒ ACGF = ½ O, is ⌒ AC = ¼ O, en derhalve (V. 7.) ∠ LGC = ½ L: maar ∠ ALC = L = ∠ CLG: derhalve (V. 7.) ∠ LCG = ½ L en CL = LG: derhalve AL + LC = AL + LG = AE: maar ∠ ALC = L (V. 7.) gevolgelijk: Δ ALC een regthoekige driehoek, waarin de gegeven lijn AC is de diagonaal, en de gegeven AE = AG de som der zijden, en dus is AMCL de gevraagde regthoek.

VII. WERKSTUK. Fig. 26.

De diagonaal AC van een' regthoek, en het verschil AP der zijden gegeven zijnde de zijden, AB en BC te vinden.

OPLOSSING. De vier eerste N°. van de Oplossing des voorgaanden Werkstuks blijven de zelfde. Vervolgens trek uit A met AP, eenen cirkelboog. die den cirkel op AF beschreven in R snijdt. Trek ARB, en BC: de Δ ABC is de helft van den gevraagden regthoek.

BEWIJS. Trek RC: dan is ∠ ARC, die op boog CGAF (= ¾ omtrek steunt) = ¾ L: derhalve (I. 3.) ∠ BRC = ½ L: dus ∠ RCB = ½ L en (I. 27.) RB = BC: derhalve AB − BC = AB − BR = AR = AP: Maar ∠ ABC = L (V. 7.): dus is Δ ABC regthoekig: AC is de schuinsche zijde: en het verschil der zijden is gelijk aan AP.

VIII.

VIII. WERKSTUK. Fig. 28.

Gegeven zijnde het verschil A B tusschen de diagonaal en de zijde van een vierkant, het vierkant te vinden.

CLAVIUS op het 14. Voorstel van EUCLIDES II. Boek, p. 213.

OPLOSSING. 1°. Beschrijf door Werkstuk V, □ ADCB op A B.

2°. Trek B D diagonaal, verlengd tot dat E D = D A: rigt (door I. Werkst. 4.) E F ⊥ op E B.

3°. Verleng B A tot dat zij E F ontmoet in F.

4°. Stel op F B den gelijkbeenigen driehoek (Werkst. III.) F G B, zoo dat F G = G B = E B.

Figuur F E B G is het gevraagde □.

BEWIJS. Uit I. 34.

IX. WERKSTUK. Fig. 27.

Gegeven zijnde de schuinsche zijde A, [of C D] en eene der regthoekzijden B van een' regthoekigen driehoek, de andere zijde D E te vinden.

OPLOSSING. Door het 7. Werkstuk van het I. Boek, de 4. Vooronderstelling en het 1. Werkstuk van het I. Boek.

BEWIJS. Uit V. 7. en II. 16.

X. WERKSTUK. Fig. 29.

Eenen gelijkbeenigen driehoek F C D te beschrijven, wiens grondlijn F D grooter zij dan een der beenen C D, C F.

OPLOSSING. Door de 4. Vooronderstelling.

BEWIJS. Uit V. 6. Gev. 6.

XI. WERKSTUK. Fig. 30 en 31.

Eenen gelijkbeenigen driehoek C A B te beschrijven, waarin de hoeken, A B C, A C B, op de grondlijn B C, het dubbeld zijn van den tophoek A.

EUCL. IV. 10. — St. II. 13.

I. OPLOSSING. Fig. 30. 1°. Men trekt eene lijn A B naar willekeur, die men deelt volgens het X. Werkstuk van het I. Boek. 2°. Men beschrijft uit A, met A B eenen cirkel. 3°. Men maakt B C = A D: en trekt A C.

II-

BEREIDING voor het Bewijs. Men onderstelt dat er door A, D, C een cirkel gaat, volgens V. 2.

BEWIJS. Uit N°. 1., N°. 3, en V. 20. bewijst men dat BC eene raaklijn is van den cirkel CDA, en dus door V. 8. dat ∠ DCB = ∠ c: derhalve ook in de ΔΔ BAC en BCD, om dat ∠ B aan beiden gemeen is, ∠ BDC = ∠ BCA = (I. 27.) ∠ B: derhalve (I. 28.) BC = DC = AD: en (I. 27.) ∠ c = ∠ d = ∠ BCD en ∠ BCA = ∠ BCD + d = 2 ∠ d = 2 ∠ c; of 2 ∠ BAC = ∠ B.

I. AANMERKING. Deze oplossing is door EUCLIDES gegeven, en hangt af van de eigenschappen des cirkels. De volgende, die wel als oplossing met de voorgaande overeenkomt, vereischt, om bewezen te worden, enkel de leer van de driehoeken, en is daar door gemakkelijker.

II. OPLOSSING. Fig. 31.

1°. Men trekt eene lijn AB naar welgevallen, en snijdt dezelve volgens het X. Werkst. van het I. Boek.

2°. Men trekt uit A met eenen *radius* AB, en dan uit D met eenen *radius* DA, cirkelbogen die elkander in C snijden.

3°. Men trekt AC, en Δ BAC is de gevraagde.

BEWIJS. Uit II. 26. Gev. 3.

II. AANMERKING. Indien er gevraagd wierd om eenen dergelijken driehoek op eene gegeven lijn te beschrijven; zoude men eerst zoodanigen driehoek naar willekeur maken, en dan op de gegeven lijn eenen driehoek aan dezen gelijkhoekig beschrijven. Zie het IV. Werkst. Aanm. 2.

II. AFDEELING.

OVER DE BESCHRIJVING DER FIGUREN MET OPZIGT TOT DERZELVER INHOUD.

XII. WERKSTUK. Fig. 32.

Een parallelogram [AIGC] te beschrijven, wiens inhoud gelijk zij aan dien van een gegeven parallelogram ADBC; of eenen driehoek AEC, die gelijk zij aan een' gegeven

 drie-

driehoek ABC, en die, boven dien, eenen hoek gelijk hebbe aan een' gegeven hoek D.

EUCL. I. 42. — St. I. 29.

OPLOSSING. Voor het parallelogram door I. Boek, Werkst. 12 en 6.

Voor den driehoek door het 12. Werkst. van het I. Boek, en dan trekkende CE.

BEWIJS. Uit II. 11. en 13.

AANMERKING. Indien de gegeven hoek regt is, verkrijgt men eenen regthoek.

XIII. WERKSTUK. Fig. 33.

Eenen driehoek ADE te maken, wiens inhoud gelijk zij aan dien van een gegeven parallelogram BCFA: of Fig. 32. een parallelogram AHFI dat gelijken inhoud hebbe als een gegeven driehoek ACB: en boven dien eenen hoek [IAH] bezitte gelijk aan een' gegeven hoek.

CLAVIUS OP EUCL. I. 42.

OPLOSSING. Voor den driehoek Werkst. 1 en 12, van Boek I.
Voor het parallelogram, door I. Werkst. 7, 12, 6.

BEWIJS. Uit II. 13 en 11.

XIV. WERKSTUK. Fig. 34 en 34 *a*.

Op eene gegeven lijn KM, een parallelogram IHMK te beschrijven, dat gelijkhaltig zij aan een gegeven parallelogram, of aan eenen gegeven driehoek AHB, en eenen hoek IKM gelijk aan eenen gegeven hoek bezitten.

EUCL. I. 44.

I. OPLOSSING. 1°. Men maakt eerst door Werkst. XIII. een ▱ ADEF gelijkhaltig aan het gegeven ▱ AHGF, of aan den gegeven △ AHB, en dat eenen hoek DAF bezitte gelijk aan den gegeven hoek.

2°. Verleng KM in L, zoo dat ML = AF.

3°. Maak ▱ MLNO = ▱ ADEF: voltooi op KL ▱ MLNP.

4°. Trek de diagonaal PMG tot de snijding met NL, verlengd, in G.

5°. Voltooi ▱ KLGI: verleng OM tot in H: en ▱ KIMH is het gevraagde.

BE-

BEWIJS. Uit II. 14. is ▱ KIHM ∞ ▱ OMLN ∞ ▱ ADEF ∞ (door II. 12.) ▱ AHGF ∞ △ ACB.

II. OPLOSSING Fig. 34. N°. 1. is het zelfde als in de I. Oplosfing: het overige fteunt op het 4. Gevolg van het VIII. Voorftel des IV. Boeks: namelijk: men trekke KI zoo dat ∠ MKI = ∠ HAB = den gegeven hoek: en vervolgens door het 16. Werkftuk van het III. Boek KM: AB = AH: KI: en voltooi het ▱ KIHM.

BEWIJS. Uit IV. 8. het 4. Gevolg.

AANMERKING. Onder het woord *parallelogram* verftaan wij hier, en in de volgende Werkftukken, ook *regthoek*, die in de daad een parallelogram is, doch waarvan de hoeken regt zijn.

XV. WERKSTUK.

Op eene gegeven lijn HI eenen driehoek [HIL] te maken die aan eenen gegeven driehoek, of aan een gegeven parallelogram, gelijk zij, en tevens eenen hoek bezitte gelijk aan eenen gegeven hoek.

CLAVIUS op EUCL. I. 44.

I. OPLOSSING. Fig. 35. 1°. Men make door Werkft. XII. of XIII. eenen driehoek AFC gelijkhaltig aan het gegeven parallelogram of aan den gegeven driehoek, en met den vereischten hoek: 2°. men voltooije ▱ AFDC: 3°. men ftelle op HI (Werkft. XIV.) een ▱ HIKL daaraan gelijkhaltig, en wiens zijden den vereischten hoek maken: men trekke LI. △ HLI is de gevraagde.

BEWIJS. Uit II. 11. Gev. 2.

II. OPLOSSING. Fig. 39. N°. 1. blijft de zelfde als in de eerfte Oplosfing: het verdere gefchied door Werkft. XIV. Oplosfing 2, te weten: na LH op HI onder den behoorlijken hoek getrokken te hebben, maakt men HI: AC = AG: HL.

BEWIJS. Uit IV. 8. Gev. 4.

XVI. WERKSTUK.

Op eene gegeven lijn HG het vierkant DB van eene

gegeven lijn AB te stellen; of, wat op het zelfde uitkomt, op eene gegeven lijn HG eenen regthoek EFGH te maken, die aan een gegeven vierkant AC gelijkhaltig *zij*.

TACQUET op EUCLIDES VI. 16. Cor. 1. en 17. Cor. 2. — L. G. III. prob. 7.

I. OPLOSSING. (Fig. 36.) Door het XIV. Werkstuk van dit Boek: onderstellende den gegeven hoek regt.

BEWIJS. Uit IV. 8. het 4. Gevolg.

II. OPLOSSING. Door het V. Werkstuk van het III. Boek, makende HG : AB = AB : HE.

BEWIJS. Uit IV. 8, het 4. Gevolg.

III. OPLOSSING. (Fig. 37.) Rigt op de gegeven lijn HG, de loodlijn GL, gelijk aan de zijde van het gegeven vierkant. Trek HL: rigt op HL in L eene loodlijn LF, die HG, verlengd, ontmoet in F. Maak uit HG en GF eenen regthoek HEFG: het is de gevraagde regthoek.

BEWIJS. Uit II. 18. of uit V. 13.

XVII. WERKSTUK. Fig. 38.

Een parallelogram IO te maken dat aan eene gegeven regtlijnige Figuur [ABCDEF] gelijkhaltig zij, en eenen hoek KIP gelijk aan eenen gegeven hoek *hebbe*.

EUCL. I. 45.

OPLOSSING. Men trekke uit eenigen hoek F de lijnen FD, FC, FB: en make dan door het XIII Werkstuk ▱ MNOP ∞ △ ABF, vervolgens het overige uit het XIV. Werkstuk van dit Boek.

XVIII. WERKSTUK. Fig. 39

Eenen driehoek LHI te maken die gelijkhaltig zij aan eene gegeven regtlijnige Figuur E, en eenen hoek gelijk aan eenen gegeven hoek hebbe.

L. G. III. prob. 10.

OPLOSSING. Maak ▱ FGKL door het XVII. en dan △ LHI door het XIII. Werkstuk uit dit Boek.

XIX. WERKSTUK. Fig. 40.

Op eene gegeven lijn KL, een parallelogram [NOLK], of eenen driehoek KML te maken, die gelijk zij aan eene ge-

gegeven Figuur, en ook, zoo men wil, eenen hoek hebbe, gelijk aan eenen gegeven hoek.

CLAVIUS op EUCL. I. 45.

OPLOSSING. Men maakt eerst door het XVII. Werkstuk het parallelogram FH gelijkhaltig met de Figuur ABCD: dan op KL het ▱ NOLK: of den △ KML ∞ ▱ FGHI door het XV. beide uit dit Boek.

XX. WERKSTUK. Fig. 41.

Een vierkant te maken dat gelijkhaltig zij aan eenen gegeven regthoek KG, of aan eene regtlijnige figuur.

EUCL. II. 14. — L. G. III. prob. 6. voor een vierkant gelijkhaltig aan een driehoek.

OPLOSSING. Door het XIX. Werkstuk maakt men eerst een ▭ FKIG ∞ aan de gegeven figuur; daar na, door het 7. Werkstuk van het derde Boek, GL. Het vierkant op GL is het gevraagde.

BEWIJS. Uit II. 18. Gev. of uit V. 13.

XXI. WERKSTUK.

Een *trapezium* waarvan twee zijden evenwijdig aan elkander zijn in zoo vele gelijke deelen te verdeelen als men begeert.

I. OPLOSSING. Fig. 42 zij ABCD het *trapezium* waarvan de zijden AB, DC onderling evenwijdig zijn: Men maakt BI = IC: trekt AIE: en gaat, voor de lijn DE, volgens het VIII. Werkstuk van het I. Boek te werk.

BEWIJS. Men bewijst eerst door I. 22. dat △ AIB = △ CIE en dat △ ADE ∞ *trapezium* ABCD: het overige volgt uit II. 13.

II. OPLOSSING. Fig. 10. zij ABHP het *trapezium* waarvan de zijden AB, PH onderling evenwijdig zijn: men verlenge PA, HB tot dat zij in C samenkomen, snijde PH, volgens het VIII. Werkstuk van het I. Boek, en trekke CI, CD enz. De *trapezia* AVIP, VUDI enz. zijn alle onderling gelijk.

BEWIJS. Uit IV. 2. en II. 13.

GEVOLG.

De zelfde oplossingen hebben plaats voor een parallelogram, een vierkant, eenen regthoek.

AANMERKING. De tweede Oplossing is ver boven de eerste te verkiezen.

XXII. WERKSTUK. Fig. 43.

Een *trapezium* ABCD in twee gelijkhaltige deelen AFKD, BFKC te deelen.

OPLOSSING. Deel AB in twee gelijke deelen in F door het VII. Werkstuk van het I. Boek.

Trekt de loodlijnen AE, BI, door het V. Werkstuk van het I. Boek.

Deel de lijn DC in K, zoo dat DK : KC = BI : AE, door het II. Werkstuk van het III. Boek.

Trek FK: en de deelen AFKD en BFKC zullen gelijkhaltig zijn.

BEREIDING voor het Bewijs. Trek AK, BK.

BEWIJS. Uit II. 13. voor de △△ AKF en FKB, en IV. 8. het 4. Gevolg.

III. AFDEELING.

OVER DE SOM EN HET VERSCHIL VAN VERSCHEIDEN REGTLIJNIGE FIGUREN.

XXIII. WERKSTUK. Fig. 44.

De som of het verschil van twee gegeven regtlijnige figuren A en B, te vinden.

CLAVIUS op EUCL. I. 45.

OPLOSSING. Door het XVII. en XIX. Werkstuk van dit Boek, maakt men den regthoek CDGH gelijkhaltig met de grootste A der gegeven figuren, en op DG den regthoek DEFG gelijkhaltig met de tweede gegeven figuur B: regthoek CEFH is het gevraagde. Indien het verschil gevonden moet worden, maakt men ▭ IDGK ∞ figuur B: en ▭ CIKH is het gevraagde.

BEWIJS. Uit II. 1. het 3. Gevolg.

XXIV.

XXIV. WERKSTUK. Fig. 44.

De ſom te vinden van zoo vele regtlijnige figuren als men wil.

CLAVIUS op EUCL. I. 45.

OPLOSSING. Door het XVII. en XIX. Werkſtuk van dit Boek, maakt men de □ □ CIKH, IDGK, DEFG gelijkhaltig met de gegeven figuren.

BEWIJS. Uit H. 1.

XXV. WERKSTUK. Fig. 45.

Een vierkant te maken dat gelijkhaltig zij aan de ſom van zoo vele vierkanten als men wil, die gemaakt zijn op gegeven lijnen A, B, C, D, E.

CLAVIUS op EUCL. I. 47. pag. 154. N°. 6. — L. G. III. prob. 11.

OPLOSSING. Door het IV. Werkſtuk van het I. Boek.

BEWIJS. Door II. 16. Het vierkant op de lijn F is de gevraagde ſom.

XXVI. WERKSTUK. Fig. 46.

Een vierkant te vinden dat het verſchil zij van de vierkanten, op de twee lijnen A en B beſchreven.

CLAVIUS op EUCL. I. 47. pag. 153. — L. G. III. prob. 11.

OPLOSSING Uit het VII. Werkſtuk van het I. Boek: de derde Vooronderſtelling en het I. Werkſtuk van het I. Boek.

BEWIJS. Uit V. 7. II. 16. gev. 1. blijkt dat het vierkant op DF het verſchil is der vierkanten op CD en CF, of op A en B.

GEVOLG.

Indien men het verſchil van drie of meerder vierkanten vraagt, zal men op FD de zelfde bewerking doen als op CD.

XXVII. WERKSTUK. Fig. 47.

Gegeven zijnde twee vierkanten op de lijnen A en B beſchreven: twee andere vierkanten te vinden die te ſamen aan de ſom der twee gegeven vierkanten gelijk zijn; het zij men die nieuwe vierkanten gelijk of ongelijk aan elkander begeere.

CLAVIUS op EUCL. I. 47. pag. 153. N°. 4

I. OPLOSSING. De I. Vooronderstelling: door I. Werkst. 7. Vooronderst. 4: I. Werkst. 3. en Vooronderst. 1: het VII. Werkstuk van het I. Boek: de 3. Vooronderstelling, het III. Werkstuk van het I. Boek, en de I. Vooronderstelling.

BEWIJS. Uit I. 21. V. 7. II. 16.

II. OPLOSSING. Indien de vierkanten ongelijk gevraagd worden kan men te werk gaan alleen door de I. Vooronderstelling en het III. Werkstuk van het I. Boek: doch dan is het Voorstel voor zoo vele Oplossingen vatbaar als men wil, daar men in den halven cirkel CFE zoo vele lijnen CF als men wil trekken kan, waarop eene andere EF loodregt valt, en die alle aan het bedoelde voldoen zullen.

BEWIJS. Uit V. 7. en II. 16. Gev.

XXVIII. WERKSTUK. Fig. 48.

Wanneer twee vierkanten EG en AC gegeven zijn, aan het kleinste derzelver eene Figuur te voegen, die aan het grootste vierkant gelijk zij, en zoo dat de geheele Figuur wederom een vierkant zij.

CLAVIUS op EUCL. I. 47. p. 154. N°. 7.

OPLOSSING. Door het I. Werkstuk van het I. Boek: voor BI = FG en voor BM = AI: dan door de I. Vooronderstelling, het I. Werkstuk van het I, en V. van het *II. Boek*.

BEWIJS. Uit II. 16.

XXIX. WERKSTUK. Fig. 49.

Indien er eene figuur van meerder dan drie zijden gegeven is, dezelve in eene even groote figuur te veranderen, doch die eene zijde minder bezit.

OPLOSSING. Door de I. Vooronderstelling, het VI. Werkstuk van het I. Boek, voor DE: en de I. Vooronderstelling voor FC.

BEWIJS. Uit II. 13.

DER-

DERDE BOEK.

OVER EVENREDIGE LIJNEN.

I. WERKSTUK. Fig. 50.

Eene gegeven lijn AB in de zelfde rede te snijden als eene andere gegeven lijn AC [in D, E] verdeeld is.

EUCL. VI. 10.

OPLOSSING. Door het 6. Werkstuk van het I. Boek.

BEWIJS. Uit IV. 2. Gev. 1.

AANMERKING. De meeste dezer Voorstellen kunnen door den proportionaal-passer opgelost worden, gelijk genoegzaam uit den aard van het Werkstuk blijkt. Zie in de *Grondbeginsels* IV. 2. Aanm. 7.

II. WERKSTUK. Fig. 51.

Eene gegeven regte lijn FE zoodanig [in I] te snijden dat hare deelen EI, FI, in de zelfde rede tot elkander staan als twee gegeven lijnen AB, CD.

CLAVIUS op EUCL. VI. 10.

OPLOSSING. Eerst uit F voor FH en CD door het I. Werkstuk van het I. Boek, dan voor EG, uit het 6 en 1 Werkstuk, dan met GH te trekken.

BEWIJS. Uit IV. 2. Gev. 1.

III. WERKSTUK. Fig. 52.

Eene regte lijn, ML, gegeven zijnde, eene andere AB, *doch die niet kleiner zij* dan het dubbeld van de eerstgemelde ML, zoodanig te snijden, dat de eerstgemelde ML middel-evenredig zij tusschen de deelen AF, FB.

CLAVIUS op EUCL. VI. 13.

OPLOSSING. Door het 7 Werkstuk van het I. Boek voor AB, de derde Vooronderstelling voor AC door het 4. Werkstuk, en voor CD en DF het 6. (tweemalen gebruikt) des zelfden Boeks.

BEWIJS. Uit V. 13.

I. AANMERKING. De reden van de voorwaarde, *doch die niet kleiner zij*, enz. blijkt, om dat anderzins AC grooter zijnde dan AE, CD den omtrek des cirkels niet eens raken zoude.

II. AANMERKING. Het blijkt dat indien BG = AF gemaakt wordt, het ſtip G ook aan het gevraagde voldoet: en dat er gevolgelijk twee oplosſingen zijn.

IV. WERKSTUK. Fig. 54.

Eene lijn AE te vinden die derde evenredige zij aan twee gegeven lijnen AB, en AC.

EUCL. VI. 11. — St. VI. 9.

OPLOSSING. Door de 2. Vooronderſtelling, het II. en het VI. Werkſtuk des I. Boeks.

BEWIJS. Uit IV. 2. Gev. 1.

V. WERKSTUK. Fig. 55.

Eene lijn DH te vinden, die vierde evenredige zij aan drie gegeven lijnen A, B, C.

EUCL. VI. 12. — St. VI. 10. — L. G. III. prob. 2.

OPLOSSING. Door de 2. Vooronderſtelling: het II. en het VI. Werkſtuk des I. Boeks.

BEWIJS. Uit IV. 2. Gev. 1.

VI. WERKSTUK. Fig. 53.

Wanneer drie lijnen A, B, C gegeven zijn, eene vierde GH te vinden die tot de derde C zij, als de eerſte A is tot de tweede B.

CLAVIUS op EUCL. VI. 12.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderſtelling, het II. en het VI. Werkſtuk des I. Boeks.

BEWIJS. Uit IV. 2. Gev. 1.

VII. WERKSTUK. Fig. 52.

Eene middelevenredige DF te vinden tusſchen twee gegeven lijnen AF en BF.

EUCL. VI. 13. — St. VI. 11. — L. G. III. prob. 3.

OPLOSSING. Na de beide lijnen in eene rigting AFB geſteld te hebben, door de 1. Vooronderſtelling, het II. en het

het VII. Werkſtuk, de 3. Vooronderſtelling, en het III. Werkſtuk des eerſten Boeks.

BEWIJS. Uit V. 13.

AANMERKING. Om dit Werkſtuk door den *proportionaal-pasſer* optelosſen, gebruikt men de lijn welke (Grondbeginſels IV. 24. Aanm. 2.) de lijn der *Plans* of ook de *Geometriſche* lijn genoemd wordt.

Men ſtelle dat tusſchen de lijnen P en R (waarvan P de kleinſte is) eene middelevenredige moet gevonden worden. Men mete P en R, beide op de lijn van gelijke deelen, van het middelpunt des proportionaal-pasſers af, en teekene de getallen dier deelen aan: dat deze door P en R uitgedrukt worden, bijv. 36 en 100.

Men neme met een pasſer den afſtand R, ſtelle de eene punt (Fig. 54.) op het ſtip D van de *Geometriſche lijn*, dat even ver van het middelpunt A af is als R op de lijn van gelijke deelen: bijv. op 100 zoo de lijn R op de lijn van gelijke deelen 100 deelen beſlaat: en opene den *proportionaal-pasſer*, zoo dat de andere punt, op de geometriſche lijn van het tweede blad op F, op gelijken afſtand AF van het middelpunt valle, zoo dat $AD = AE$ en $DE = R$

Men ſtelle de punten diens pasſers op de ſtippen B en C der geometriſche lijnen van beide de bladen, welke op den afſtand P (of 36) van het middelpunt A zijn: zoo dat $AB = AC$ (hier 36) dan is BC de middel-evenredige tusſchen P en R.

Immers in de gelijkvormige driehoeken CAB en EAD is 1°. $AD : AB = DE : BC$: dat is $AD : AB = R : BC$: en derhalve $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = R^2 : \overline{BC}^2$. Maar uit den aard van de *Geometriſche* lijn is 2°. $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = R : P$: derhalve 3°. $R : P = R^2 : \overline{BC}^2$: en 4°. $\overline{BC}^2 = P \times R$. dat is $P : BC = BC : R$: en BC is de gezochte middel-evenredige. In het gegeven voorbeeld is $BC = 60$.

VIII. WERKSTUK. Fig. 52.

Gegeven zijnde de middelſte ML, en de ſom AB der uiterſte van drie evenredige lijnen, de uiterſte [AF en BF] zelve te vinden.

JACQUET Cor. 4. op EUCL. VI. 13.

& OPLOSSING. Door het VII. Werkstuk, de 3. Vooronderstelling, het IV. Werkstuk. het II., het VI. tweemaal gebruikt: alle uit het I Boek.

BEWIJS. Door V. 13.

IX. WERKSTUK.

Tusschen twee gegeven lijnen A en B, drie, of zeven, of vijftien middel-evenredige te vinden; in één woord, zoo vele als er door de gedurige optelling van de leden dezer geometrische progressie 1, 2, 4, 8, 16, 32. enz. ontstaan kunnen.

TACQUET Cor. 3. op EUCL. VI. 13.

OPLOSSING. Door het VII. Werkstuk.

I. AANMERKING. De reden waarom men slechts 3, of 7, of 15 enz., middel-evenredigen vinden kan, dat is, altijd oneven in getal, is deze. Men kan door de Meetkunde maar *ééne* middel-evenredige tusschen twee lijnen vinden: Indien er dan twee lijnen A en B gegeven zijn, vindt men er door het VII. Werkstuk eene derde [C] die tusschen deze middel evenredig is: Men kan er wederom eene [D] vinden tusschen de eerste lijn A, en de eerste middel-evenredige C, en eene [E] tusschen deze C en de tweede gegeven lijn B: dus in het geheel 3. Tusschen deze vijf lijnen, kan men er wederom 4 vinden, namelijk tusschen A en D, D en C, C en E, E en B, dat is in het geheel 7, enz.

II. AANMERKING OVER HET VINDEN VAN TWEE MIDDEL-EVENREDIGE. De Ouden hebben reeds veel moeite aangewend ter oplossing van het vraagstuk, „ tusschen twee gegeven lijnen twee middel-evenre„ dige te vinden." Doch dit kan door de enkele Meetkunde, in den strikten zin namelijk, dien de Ouden aan dat woord gaven, dat is door cirkel en regte lijn alleen, niet geschieden.

EUTOCIUS heeft breedvoerig over dit stuk gehandeld, in zijne *Commentarius* op het tweede Voorstel des II. Boeks van ARCHIMEDES de *sphaera et cylindro*: en daarin opgegeven de handelwijzen van PLATO, van HERO, van PHILO van *Byzantium*, van APPOLLONIUS, van DIOCLES, van PAPPUS, van SPORUS, van MENECHMUS, van ARCHITAS, van ERATOSTHENES en van NICOMEDES. De wijze van NICOMEDES is ook door PAPPUS uitgelegd in zijne *Collect. Mathem.* IV. 22, 23.

Alle deze oplossingen kunnen tot twee algemeene soorten gebragt worden: tot die welke door andere lijnen dan den cirkel verrigt worden, en die welke men volbrengt door regte lijnen, of regte lijn en cirkel, wel is waar niet op eene *geometrische*, maar op eene *mechanische* wijze.

Wat de eerste soort dier oplossingen betreft: komt eerst in aanmerking die, welke of door eene kromme lijn, genoemd de con-

conchoïde, of *schulpstrek* van NICOMEDES, of door de *cissoïde* of *klimtrek* van DIOCLES verrigt worden, twee zoogenoemde *mechanische* kromme lijnen, wier eigenschappen en derzelver toepassing op dit vraagstuk om twee middel-evenredige te vinden, men kan nagaan, in het voortreffelijk werk van den Heer J. FLORYN, *Grondbeginsels der hoogere Meetkunde*, II Boek, voor de CONCHOIDE Hoofdd. I. prop. 31 en voor de CISSOIDE Hoofdd. II. prop. 7. en ook CLAVIUS, *Geom. Practica* VI. 13.

Vervolgens komen hier in aanmerking de oplossingen door die kromme lijnen welke men *kegelsneden* noemt; MENECHMUS heeft het beroemde vraagstuk opgelost door de snijding van eene *parabel* en eene *hyperbel*, en ook door de snijding van twee *parabels*.

Deze oplossingen, als geschiedende door kromme lijnen die niet tot de eigenlijk gezegde Grondbeginsels der Meetkunde behoren, kunnen niet door ons opgegeven worden: Men zie over de laatstgenoemde, *Geometria* CARTESII *Lib.* III. p. 91 in de uitgave van VAN SCHOOTEN: en ABR. DE GRAAF, *Analysis*, III. Boek, 24. Werkstuk: en voor die welke dieper in de zaak willen indringen, SLUSII *Mesolabum*.

De overige Oplossingen zijn die, welke door cirkels en regte lijnen, doch op eene mechanische, en niet op eene geometrische wijze geschieden. Wij zullen er eenige opgeven.

I. OPLOSSING. Van PLATO. Fig. 56. Wij hebben de gronden van dezelve reeds opgegeven in IV. 15. Gev. 4. Men voege de lijnen FD, DB, tusschen welke twee middel-evenredige gevonden moeten worden bij elkander, zoo dat zij eenen regten hoek FDB maken: men verlenge ze beide naar M en N. Men neme twee winkelhaken FAC, ECB; en schikke dezelve zoo, dat terwijl de kruin A des regten hoeks FAC op de lijn BDM blijve, het eene been door F, uiteinde der lijn DF gaa, terwijl, de kruin C van den tweeden winkelhaak ECB, die zich langs het been AC des eersten beweegt, op de verlenging van de lijn FD. ergens in C vallende, het andere BC, juist het uiteinde B, der tweede gegeven lijn DB rake: als dan zullen de twee lijnen AD, DC middel-evenredig zijn tusschen FD, DB zoo dat DF : AD == AD : BC == DC : DB

Zie ook TACQUET op EUCL. VI. 13. SCHOLIUM.

II. OPLOSSING van CARTESIUS. Fig. 57. Deze heeft, om dat zij ook door behulp van winkelhaken geschied, vrij wat overeenkomst met die van PLATO: doch zij strekt zich verder uit, om dat zij geschikt is om niet alleen twee, maar ook vier, zes, acht, enz. middel-evenredige te vinden. Wij hebben hare gronden in IV. 15. Gev. 5. uitgelegd. Men hebbe eenen zwaai YAZ, waarvan het middelpunt, waarop de beenen YA en ZA zich bewegen zij A. Men hebbe boven dien verscheide winkelhaken, drie om twee middelevenredige te kunnen trekken: vijf om er vier te trekken: en zoo voorts. altijd met twee opklimmende

Van deze winkelhaken beweegt zich een gedeelte op het been AY, een ander gedeelte op het been AZ des zwaais: het geen door middel van eene sponning, in eene sleuf beweegbaar, gemakkelijk te verrigten valt.

Men neemt, uit het middelpunt A, op het eene been van den zwaai

zwaai de lijn AC, en op het ander de lijn AL tusschen welke men twee middel-evenredige zal vinden.

Men moet de opening van den zwaai zoo schikken, dat als de kruin des winkelhaaks ICB op C valt, de winkelhaak IBM, tegen B, alwaar het been CB valt, geschoven wordt. en AY in I snijdt, het been IL des winkelhaaks KIL, wiens kruin op I gesteld wordt in L, uiteinde der lijn AL, valle: welke schikking door toetsen gevonden wordt, en dus eene mechanische oplossing geeft: Het blijkt uit IV. 15. Gev. 8. dat AC : AB = AB : AI = AI : AL: en derhalve dat AB en AI de twee gevraagde middelevenredige zijn.

Zie ook TACQUET op EUCL, VI. 13. *Scholium.*

III. OPLOSSING van HERO, Fig. 58. welke door EUTOCIUS is opgegeven, en door middel van een liniaal geschied.

Men vereenige de lijnen AB en BG, tusschen welke men twee middel-evenredige zoekt, onder eenen regten hoek GBA: men voltooije den regthoek BADG: verlenge de zijden DA en DG onbepaaldelijk; en trekke de diagonalen GA en BD, die zich in E, in gelijke deelen snijden. Men bewege een liniaal BH op het stip B, tot dat het de lijnen DG en DA in de stippen Z en H zoodanig snijde, dat EZ = EH: AH en ZG zullen de twee middel-evenredige zijn.

BEWIJS. Men trekke uit E, ET loodregt op DG die gevolgelijk GT = TD maakt.

Derhalve is uit II. 5. Regth. uit DZ en ZG + □ op GT ∞ □ op TZ en derhalve Rh. uit DZ en ZG + □ op GT + □ op ET ∞ □ op TZ + □ op ET: dat is *door II. 16.* Rh. uit DZ en ZG + □ op EG ∞ □ op ZE.

Op de zelfde wijze, is Rh. uit DH en HA + □ op EA ∞ □ op EH: maar EH = ZE: derhalve Rh. uit DZ . ZG + □ op EG ∞ Rh. uit DH en AH + □ op EA; en om dat GE = EA, is Rh. uit DZ en ZG ∞ Rh. uit DH en AH: en derhalve (IV. 8. Gev. 3.) DZ : DH = AH : ZG: maar DZ : DH = ZG : GB = BA : AH:

Gevolgelijk AH : ZG = ZG : GB = BA : AH; of BA : AH = AH : ZG = ZG : GB: derhalve zijn AB, AH, ZG, BG. gedurig evenredig.

Zie CLAVIUS, *Geometria Practica*, Lib. VII. prop. 15.

IV. OPLOSSING van PHILO van *Byzantium*. Fig. 59.

Deze wordt verrigt door middel van den cirkel, en een liniaal. wiens ligging door toetsing geschikt moet worden.

Men vereenige de lijnen AB, BC tusschen welke men twee middel-evenredige wil vinden, onder eenen regten hoek ABC; men trekke AC; beschrijve om den driehoek ABC eenen cirkel BADC; en voltooije den regthoek

BACD,

BADC, waarvan men de zijden DA, en DC onbepaaldelijk verlengt. Men bewege een liniaal FBG, zoodanig om den top B des regten hoeks ABC, dat de deelen FO, BG deszelven door den omtrek des cirkels en de verlengde lijnen DA, DC, afgesneden, gelijk zijn; dan is ∺ AB, FA, GC, BC.

BEWIJS. Uit V. 17. Gev. 4.

Zie ook CLAVIUS, *Geom. Practica*, VI. 15.

V. OPLOSSING van VIETA: deze geschied ook door middel van cirkel en liniaal, Fig. 60.

Men trekke eenen cirkel PKDH waarvan de grootste der gegeven lijnen, de lijn KD de middellijn zij. Men trekke in den cirkel eene lijn PH gelijk aan de kleinste der twee gegeven lijnen, en verlenge dezelve naar welgevallen. Uit het eene stip H waar zij den omtrek snijdt, neme men het deel HL = HP, of aan de tweede gegeven lijn: en trekke uit L, LC, door het middelpunt, vervolgens uit P eene onbepaalde lijn PI // LC; men neme een liniaal, en bewege het zelve om het middelpunt, tot dat het de verlengde lijn PH ontmoete in A, zoo dat AG = CK of aan de halve middellijn, d. i. aan de helft der grootste gegeven lijn. Dan zijn AP en AK middel-evenredig tusschen DK en HP.

BEWIJS. Uit V. 17. Gev. 3. Aanm. 2.

Deze oplossingen zijn voor onze bedoeling genoeg: andere gaa men bij EUTOCIUS na.

VI. OPLOSSING *door den proportionaal-passer.*

Men gebruikt daartoe de lijn die wij de lijn der *solida*, of der *ligchamen*, genoemd hebben (XI. 36. Aanm.) en die met het woord *cubic* bestempeld is.

Dat de lijnen P en S de twee lijnen zijn tusschen welke er twee middel-evenredige moeten gevonden worden. Men mete P en S, op den *proportionaal passer*, op de lijn van gelijke deelen van het middelpunt des passers af: men teekene die deelen aan: laten dezelve zijn bijv. 160 en 20.

Men neme met den gewonen passer de grootte van S, de grootste der twee gegeven lijnen.

Men stelle op de beide bladen (Fig. 50) AB, AC, des *proportionaal-passers*, op de lijnen nam. der ligchamen, de eene punt op B, die even ver op die lijn van het middelpunt A af is, als S op de lijn der gelijke deelen was

was (hier op 160) en men opene den *proportionaal-passer* tot dat de andere punt valle op C, op gelijken afstand op de lijn der ligchamen van het tweede blad.

Men stelle de punt van dien passer op G, van de lijn der ligchamen, op den zelfden afstand van A, als P was op de lijn der gelijke deelen (hier op 20) en mete den afstand van G tot E, dat op gelijken afstand als G staat op de zelfde lijn van het ander blad AC.

EG is de grootste der twee gevraagde middel-evenredige lijnen.

Immers: uit de driehoeken CAB en EAG is 1°. AB: AG = BC: EG: dus hier

2°. AB: AG = S: EG: en derhalve

3°. $\overline{AB}^3 : \overline{AG}^3 = S^3 : EG^3$: maar uit den aard van de lijn der ligchamen is

4°. $AB^3 : AG^3 = S : P$: derhalve

5°. $S^3 : \overline{EG}^3 = S : P$: maar (III. 15.)

Indien vier grootheden S, R, Q, P in eene gedurige evenredigheid zijn is 6°. $S : P = S^3 : R^3$:

Derhalve 7°. $S^3 : EG^3 = S^3 : R^3$: en derhalve $EG = R$, gelijk aan de grootste der twee gezochte evenredige.

EG gevonden zijnde, neemt men eene middel evenredige tusschen S en EG (Werkstuk VII. *Aanm.*) die de tweede der gevraagde, of de kleinste der twee gevraagde, zijn zal.

X. WERKSTUK. Fig. 61.

De rede die er tusschen twee gegeven lijnen AB, BC plaats heeft, doch waarvan de eerste grooter is dan de tweede, zoo ver men wil te verlengen, en de som van alle de leden aantewijzen.

TACQUET op EUCL. VI. 11.

OPLOSSING. Men rigt (door het IV. Werkstuk uit het I. Boek) AD ⊥ op AB en door het III. BE ⊥ op AB: men maakt door het II. AD = AB, BE = BC: men trekt DE tot dat dezelve AB, verlengd, in F ontmoete: men trekt CG ⊥ op AF, maakt CN = CG en trekt HN ⊥ op AF: men maakt NI = HN en IK ⊥ op AF enz. AB, BC, CN, NI enz. zijn de leden, en AF is de som van allen.

BEWIJS. Door het II. Voorstel van het IV. Boek, en de eigenschappen der evenredigheden; vooral III. 8.

Im-

Immers AF: BF = AD: EB = AB: BC
derhalve BC: BF = AB: AF: en
BC — BF: BF = AF — AB: AF: d. i.
CF: BF = BF: AF = BC: AB = CG: BE = BE: AD: of
AD: BE = BE: CG: dat is
AB: BC = BC: CN
en zoo voorts, zoo dat AB, BC, CN, NI enz. eene geometrifche reeks uitmaken.

AANMERKING. Hoewel men het getal der leden zoo groot kan nemen als men wil, is hunne fom eene bepaalde lijn AF, om dat de leden in eene bepaalde rede (van AB: BC) afnemen. Zie het geen wij gezegd hebben III. Boek XV. Voorft. Gev. 6.

XI. WERKSTUK.

Eene lijn in uiterfte en middelfte rede te fnijden.

EUCL. VI. 30. — L. G. III. prob. 4.

OPLOSSING. Zij is de zelfde als voor het X. Werkftuk van het I. Boek.

XII. WERKSTUK. Fig. 62.

Eene lijn AD in harmonifche evenredigheid te deelen; dat is, volgens de 2. Aanmerking op de 23. Bepaling van het III. Boek, de lijn AD zoodanig in drie deelen AB, BC, CD, te deelen, dat de geheele lijn AD tot eene der uiterften AB bijv. ftaa, zoo als de andere CD tot het middelfte deel BC.

CLAVIUS ad EUCL. VI. 17. §. 7. — LA HIRE *Section. Con.* prop. 1.

OPLOSSING. Trek DG en AG naar willekeur.

Trek uit een ftip B naar willekeur, op de lijn AD genomen, BE evenwijdig aan DG, door het VI. Werkftuk van het I. Boek.

Verleng EB in F tot dat BF = EB door het II. Werkft.
Trek GF.

BEWIJS. △ ADG ∽ △ ABE en △ DGC ∽ △ BFC; dus: IV. 2.
AD: AB = DG: BE of BF
Maar DG: BF = DC: BC:
dus AD: AB = DC: BC: (III. 11.)

VIERDE BOEK.

OVER DE REDE EN DE GELIJKVORMIGHEID VAN REGTLIJNIGE FIGUREN.

I. WERKSTUK. Fig. 63.

De rede van twee regtlijnige Figuren, A, B, door twee regte lijnen HG, GF, uittedrukken.

OPLOSSING. Door Werkstuk XVII. van het II. Boek maakt men eerst den regthoek HCDG gelijkhaltig aan de gegeven figuur A; vervolgens door Werkstuk XIX. maakt men op de als dan bepaalde lijn GD, den regthoek GDEF gelijkhaltig met de gegeven Figuur B.

BEWIJS. Uit IV. 7.

GEVOLG.

De rede van twee vierkanten kan insgelijks door regte lijnen uitgedrukt worden.

OPLOSSING en BEWIJS. Door V. 15.

II. WERKSTUK. Fig. 64.

Op eene gegeven lijn CD eene regtlijnige figuur te maken die aan eene gegeven regtlijnige figuur gelijkvormig zij.

EUCL. VI. 18. — St. VI. 15. — L. G. III. prob. 13.

OPLOSSING. Door II. Werkstuk 4., Aanm. 2.

BEWIJS. Uit IV. 23.

III. WERKSTUK. Fig. 65.

Eene Figuur N te vervaardigen, die aan eene gegeven figuur L gelijkvormig, en aan eene andere M gelijk zij.

EUCL. VI. 25. — L. G. III. prob. 6.

OPLOSSING. Voor ▭ AH ∞ fig. L uit het XVII. Werkstuk van het II. Boek: insgelijks op BH voor ▭ BD ∞ fig. M. Vervolgens voor FC door het VII. Werkstuk van het III. Boek; en dan voor N ∽ L door het II. van dit Boek.

BEWIJS. Uit IV. 24. is N : L = □ op FC : □ op AB.
Maar om dat AB : FC = FC : BC
is □ op FC ∞ Rh. uit AB, BC
derhalve N : L = Rh. uit AB, BC : □ op AB
= BC : AB
L : M = AB : BC (IV. 7.)
derhalve N : M = BC . AB : AB . BC
en N ∞ M.

IV. WERKSTUK.

De eveneensstaande zijden a, b van twee gelijkvormige figuren gegeven zijnde, de reden van die figuren door regte lijnen uittedrukken.

OPLOSSING. Door het IV. Werkstuk van het III. Boek.

BEWIJS. Om dat a : b = b : c is
Rh. uit a en c = □ op b :
Maar (IV. 24.) Fig. op a : tot ∽ fig. op b = □ op a :
□ op b = □ op a : Rh. uit a en c = a : c.

V. WERKSTUK.

Wanneer de rede van twee gelijkvormige figuren [A, B] door twee lijnen [M, N] uitgedrukt is, de rede van derzelver eveneensstaande zijden [a, b] te vinden.

OPLOSSING. Tusschen M en N door het VII. Werkstuk van het III. Boek.

BEWIJS. Om dat fig. A : fig B = □ op a : □ op b.
en M : N = fig. A : fig. B : is
M : N = □ op a : □ op b : en M . N : N^2 = a^2 : b^2
Maar M : x = x : N : derhalve
□ op x^2 ∞ Regth. uit M en N
derhalve x^2 : N^2 = a^2 : b^2 en b : a = N : x.

VI. WERKSTUK.

Eenen veelhoek N te maken, die aan eenen anderen veelhoek M, waarin eene zijde A bekend is, gelijkvormig, en tevens een bepaald veelvoud m van den zelven zij.

L. G. III. prob. 15.

OPLOSSING. Tusschen A en mA door het VII. Werkstuk van het III. Boek: en dan op die middel-evenredige door het II. Werkstuk van dit Boek, den veelhoek N ∽ veelh. M.

BEWIJS. Om dat $m A : B = B : A$
is $B^2 = m A^2$
maar fig. N: fig. M $= B^2 : A^2$:
derhalve fig. N : fig. M $= m A^2 : A^2 = m : 1$.

AANMERKING. Daar de cirkels gelijkvormige figuren zijn, waarvan de inhouden tot elkander ftaan als de vierkanten der middellijnen: (zie het zevende Boek der Grondbeginfels, Voorftel X. Gev. 1: en Voorftel XVI. Gev. 1.) geldt dit Voorftel (gelijk ook de twee volgende) voor de cirkels, even als voor de veelhoeken.

VII. WERKSTUK.

Eenen veelhoek N te maken, die aan den gegeven veelhoek M, waarvan eene zijde [A] bekend is, gelijkvormig, en tevens een bepaald gedeelte $\frac{1}{m}$ van den zelven zij.

OPLOSSING. Tusfchen $\frac{A}{m}$ en A door het VII. Werkftuk van het III. Boek: dan op die middel-evenredige door het II. Werkftuk van dit Boek N ∽ M.

BEWIJS. Om dat $\frac{A}{m} : B = B : A$

is $B^2 = \frac{A^2}{m}$: Maar fig. N: tot fig. M $= B^2 : A^2$

$= \frac{A^2}{m} : A^2 = \frac{1}{m} : 1$.

GEVOLG.

Daar alle vierkanten gelijkvormige figuren zijn, geldt dit Werkftuk ook voor de vierkanten, en deszelfs oplosfing geeft dus de oplosfing van dit Werkftuk.

„ Een vierkant te maken, dat een bepaald gedeelte zij „ van een gegeven vierkant."

L. G. III. prob. 12.

AANMERKING. Dit Voorftel kan ook door V. 15. Gev. opgelost worden.

VIII. WERKSTUK. Fig. 66.

Eene Figuur M te maken, die gelijk zij aan de fom van

zoo vele gelijkvormige Figuren A, B, C, D, enz. als men wil, waarvan de eveneens geplaatste zijden, *a*, *b*, *c*, *d*, enz., bekend zijn, en die tevens gelijkvormig aan allen zij.

L. G. III. prob. 14.

OPLOSSING. Door het IV. en I. Werkstuk van het I. Boek: en het II. van dit Boek.

BEWIJS. Uit IV. 26.

I. AANMERKING. Om eene figuur te maken die het verschil zij van twee gegeven gelijkvormige figuren, en tevens gelijkvormig zij aan dezelve, gaat men te werk volgens het 26. Werkstuk van het tweede Boek en het II. van dit Boek.

II. AANMERKING. Daar de cirkels gelijkvormige figuren zijn, en onderling staan als de vierkanten der middellijnen, of der *radii*, geldt deze oplossing ook voor cirkels.

VIJFDE BOEK.

OVER DEN CIRKEL.

I. AFDEELING.

OVER HET MIDDELPUNT VAN DEN CIRKEL, EN DE LIJNEN DIE TOT DEN CIRKEL GETROKKEN WORDEN.

I. WERKSTUK.

Het middelpunt C van een gegeven cirkel te bepalen.

EUCL. III. 1. — St. III. 2. — L. G. H. prob. 13.

I. OPLOSSING. Fig. 67. door de eerste vooronderstelling het VII. en III. en wederom het VII. Werkstuk van het *I Boek*.

BEWIJS. Uit V. 9 Gev.

II. OPLOSSING. Fig. 68. Uit de eerste vooronderstelling: het IV. Werkstuk van het I. Boek: de 1. vooronderstelling, het VII. Werkstuk van het I. Boek.

BEWIJS. Uit V. 7.

II. WERKSTUK. Fig. 69.

Gegeven zijnde een boog ADE, of een cirkelstuk ADEA, het middelpunt daarvan te vinden, en den geheelen cirkel te voltooijen.

EUCL. III. 25. — St. III. 2.

OPLOSSING. Door de eerste vooronderstelling: het VII. en III. Werkstuk van het I. Boek op AD en op AE toegepast.

BEWIJS. Uit V. 9. het Gevolg.

III. WERKSTUK. Fig. 70.

In den cirkel ABC eene lijn AB te trekken die gelijk zij aan eene gegeven lijn N, doch welke kleiner is dan de middellijn.

EUCL. IV. 1.

OPLOSSING. Door het I. Werkstuk van het I. Boek en de III. Vooronderstelling.

BEWIJS. Uit V. 11. het 1. Gevolg.

AANMERKING. Het blijkt dat men altijd twee dergelijke gelijke lijnen in den cirkel trekken kan.

IV. WERKSTUK. Fig. 71.

In den cirkel DKF eene regte lijn IK te trekken, die gelijk zij aan eene gegeven lijn AB, doch kleiner dan de middellijn, en tevens aan eene andere gegeven lijn C evenwijdig.

CLAVIUS op EUCL. IV. 1.

OPLOSSING. Voor DF door het VI. Werkstuk, het VII. twee malen, het III. twee malen, alle uit het I. Boek; en de 3. Vooronderstelling.

BEWIJS. Uit V. 11. het 1. Gev. en I. 31.

II. AFDEELING.

OVER DE CIRKELSTUKKEN EN CIRKELBOGEN.

V. WERKSTUK. Fig. 72.

Op eene gegeven lijn AB een cirkelstuk te beschrijven, dat eenen gegeven hoek N bevatten kan.

EUCL. III. 33. — St. III. 21. — L. G. II. prob. 16.

OPLOSSING. Voor hoek EAB door I. Werkst. 12: voor AH door I. Werkst. 4.: voor BH door I. Werkst. 12. en dan door Vooronderst. 3. Het cirkelstuk AOB is het gezochte.

BEWIJS. Uit V. 8.

VI. WERKSTUK. Fig. 73.

Van een' gegeven cirkel ABC een stuk BOA afsnijden, dat eenen gegeven hoek N bevatten kan.

EUCL. III. 34. — St. III. 22.

OPLOSSING. Voor DB door de 1. Vooronderstelling: voor EB door het IV. Werkstuk van het I. Boek, voor ∠ EBA I. Werkst. 12. het cirkelstuk ACB is het gevraagde.

BEWIJS. Door V. 8.

VII. WERKSTUK. Fig. 74.

Eenen cirkelboog ADB, of een cirkelstuk, in twee gelijke deelen te snijden.

EUCL. III. 30. — St. III. 17.

OPLOSSING. Door het VII. en het III. Werkstuk van het I. Boek.

BEREIDING TOT HET BEWIJS. Trek AD, DB.

BEWIJS. Uit I. 21. en V. 6. het 5. Gevolg.

AANMERKING. Op die wijze kan men door eene gedurige verdeeling in twee gelijke deelen eenen hoek in een even getal deelen, dat of 2, of eenige magt van 2 is. Doch men kan *Geometrisch*, in den striktten zin, geen boog in drie, of in een oneven getal, deelen snijden, op die uitzonderingen na welke wij in de volgende Vraagstukken melden zullen. De Aanmerking die wij op het XVI. Werkstuk van het I. Boek gemaakt hebben, geldt hier ten vollen: want eenen boog of eenen hoek te deelen is het zelfde, daar de een de maat van den anderen is.

VIII. WERKSTUK. Fig. 75.

Eenen boog die het vierde deel van den omtrek is, in drie gelijke deelen te verdeelen.

OPLOSSING. Door het II. Werkstuk van het II. Boek, en het VI. van dit, of het XV. van het I. Boek.

BEWIJS. Uit V. 6. het 5. en 3 Gev.

IX. WERKSTUK. Fig. 76.

Eenen boog, die het vierde gedeelte van den omtrek is, in vijf gelijke deelen te verdeelen.

OPLOSSING. Maak op BC, den △ DCB door het XI. Werkstuk van het II. Boek, en voor CE door I. Werkstuk 15.

BEWIJS. Uit V. 6. het 5. en 3. Gev.

X

X. WERKSTUK. Fig. 77.

Eenen cirkel te beschrijven, die door drie gegeven stippen gaat.

OPLOSSING. Zij is de zelfde als de Bereiding van V. 2. in de *Grondbeginsels.*

BEWIJS. Uit V. 2. Gev.

III. AFDEELING.

OVER DE RAAKLIJNEN VAN DEN CIRKEL, EN DE CIRKELS DIE ELKANDER RAKEN.

XI. WERKSTUK. Fig. 78.

Uit een gegeven stip A in den omtrek, eene raaklijn DAE aan den cirkel te trekken.

OPLOSSING. Voor CA door de 1. Vooronderstelling en voor DAE door het IV. Werkstuk van het I. Boek.

BEWIJS. Uit V. 3.

XII. WERKSTUK.

Uit een gegeven stip A buiten den cirkel eene raaklijn aan denzelven te trekken.

EUCL. III. 17. — St. III. 19. — L. G. II. prob. 14.

I. OPLOSSING. Fig. 79. Door de 1. Vooronderstelling voor AC: dan door het VII. Werkstuk van het I. Boek, de 3. en 1. Vooronderstelling.

BEREIDING. Trek CD, CB.

BEWIJS. Uit V. 7 en 3.

II. OPLOSSING. Fig. 80. Door de 1. en 3. Vooronderstelling; voor CA en ⌒ KAI; door het III. Werkstuk van het I. Boek, voor KEI; en de 1 Vooronderstelling voor AD en AB.

BEWIJS. Uit I. 21. voor de △△ ACB en ECI: waaruit volgt ∠ CBA = ∠ CEI = L: en dus uit V. 3. is AB raaklijn.

AANMERKING. Het blijkt uit beide de oplossingen, dat men uit het stip A altijd twee raaklijnen zal kunnen trekken, die aan elkander gelijk zullen zijn: het geen reeds uit V. 20. het 2. Gev. bekend is.

XIII. WERKSTUK. Fig. 81.

Eene lijn KG, die den cirkel raakt, gegeven zijnde, het stip E van aanraking te bepalen.

OPLOSSING. Voor HIG door de 1. Vooronderstelling, het VII. Werkstuk van het I. Boek: en door de 4. Vooronderstelling.

BEREIDING Trek EH.

BEWIJS. Uit V. 3. en 7.

XIV. WERKSTUK. Fig. 82.

Eene lijn EG te trekken, die den cirkel rake, en evenwijdig zij aan eene lijn AB, die den cirkel snijdt.

CLAVIUS op EUCL. III. 17. p. 273.

OPLOSSING. Voor CD door het V. en voor EDG door het IV. Werkstuk van het I. Boek.

BEWIJS. Uit V. 3. en I. 8.

XV. WERKSTUK.

Twee cirkels gegeven zijnde, doch die elkander niet geheel insluiten, eene lijn te trekken, die ze beide raakt.

CLAVIUS op EUCL. III. 17. p. 267.

Er zijn twee gevallen: want de cirkels zijn of gelijk, of ongelijk in grootte.

I. GEVAL. Fig. 83.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling, het IV. Werkstuk van het I. Boek, voor GA en KD en de 1. Vooronderstelling voor AD.

BEWIJS. Uit I. 31. en V. 3.

II. GEVAL. Fig. 84.

OPLOSSING. Door de 3. Vooronderstelling, uit G met eenen radius GP = GC — EK = GD: verder door de het vierde, en XII. Werkstuk van dit Boek voor KP: door

Voor-

Vooronderst. I. voor G N; door I. Werkstuk 6. voor K O, en de 1. Vooronderstelling voor N O.

BEWIJS. Uit I. 31. en V. 3.

XVI. WERKSTUK. Fig. 85.

Eenen cirkel te trekken, die eene gegeven lijn A C in een gegeven stip B raakt, en door een gegeven stip E gaat.

OPLOSSING. Door I. Werkstuk 3 voor B G: door Vooronderstelling I. voor B E; door II. Werkstuk 3. voor A E D B en door Vooronderstelling 4.

BEWIJS. Door V. 3.

XVII. WERKSTUK. Fig. 88, *a*, *b*, *c*.

Eenen cirkel te trekken, die door een gegeven stip A gaat, en eenen anderen gegeven cirkel inwendig, of uitwendig, raakt.

CLAVIUS op EUCL. III. 17. p. 269.

Er zijn drie gevallen, naar mate het stip A op den omtrek, buiten den omtrek, of binnen den omtrek valt.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling, het VII. Werkstuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderstelling.

AANMERKING. Het blijkt 1°. dat men in het eerste geval op de lijn A D zoo vele stippen als men wil nemen kan, die de middelpunten van even zoo vele cirkels zijn zullen, welke allen aan het gevraagde zullen voldoen.

2°. Dat in beide de andere gevallen, zoo dra men door het gegeven stip A en het middelpunt des gegeven cirkels de lijn A B getrokken heeft, er altijd twee cirkels zijn zullen die aan het gevraagde voldoen.

XVIII. WERKSTUK. Fig 86.

Een stip A buiten den cirkel B C D gegeven zijnde, eenen cirkel te trekken die door dat stip gaat, en den gegeven cirkel uitwendig zoodanig raakt, dat geen van beide de cirkels binnen den anderen valle.

CLAVIUS op EUCL. III. 17. p. 270.

OPLOISING. Door de 1. Vooronderstelling, het VII. Werkstuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderstelling.

XIX.

XIX. WERKSTUK. Fig. 87.

Twee cirkels gegeven zijnde, eenen derden te trekken die ze beiden raakt, en wiens middelpunt in dezelfde regte lijn zij met de middelpunten der gegeven cirkels.

CLAVIUS OP EUCL. III. 17. p. 271.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderſtelling, het VII. Werkſtuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderſtelling.

BEWIJS. Uit V. 23.

I. AANMERKING. Het blijkt dat wanneer de cirkels geheel buiten, of geheel binnen, elkander vallen, men altijd vier cirkels vinden kan die aan het gevraagde voldoen: doch ſlechts twee, wanneer de cirkels elkander ſnijden.

II. AANMERKING. Wanneer men uit elk der middelpunten van de twee gegeven cirkels, met eene opening gelijk aan de ſom van den *radius* van dien cirkel, en van den *radius* des cirkels dien men voor den rakenden cirkel nemen wil, bogen beſchrijft, zal het ſtip daar die bogen elkander ſnijden, altijd het middelpunt zijn van den cirkel die beide de gegeven raken zal.

ZES-

ZESDE BOEK.

OVER DE BESCHRIJVING DER FIGUREN IN EN OM DEN CIRKEL.

I. WERKSTUK. Fig. 89.

In eenen gegeven cirkel ABHC, eenen driehoek BAC te beschrijven, die gelijkhoekig zij aan eenen gegeven driehoek DFE.

EUCL. IV. 2. — St. IV. 1.

OPLOSSING. Voor MAN door V. Werkstuk 11. Voor ∠ BAM = ∠ F en ∠ CAN = ∠ D, door I. Werkst. 12.

BEWIJS. Uit V. 8.

II. WERKSTUK. Fig. 90.

Om eenen gegeven cirkel eenen driehoek GLH te beschrijven, die met eenen gegeven driehoek CAB gelijkhoekig zij.

EUCL. IV. 3. — St. IV. 2.

OPLOSSING. Men verlengt eene zijde CB van den driehoek. Voor FM door 1. Vooronderstelling: voor ∠ KFM = ∠ DCA en ∠ IFM = ∠ ABE door I. Werkstuk 12. Voor LKG, LIH, GMH door I. Werkstuk 4.

BEWIJS. Dat de driehoek GLH om den cirkel beschreven is, blijkt uit de Oplossing en VI. 3. Dat hij met den gegeven gelijkhoekig is, blijkt uit II. 29. I. 3.

III. WERKSTUK. Fig. 91.

In eenen cirkel eenen gelijkzijdigen driehoek te beschrijven.

L. G. IV. 4.

OPLOSSING. Uit D met *radius* DF den ⌒ AFC: trek AC en op AC den gelijkbeenigen △ ABC, door II. Werkst. 3.

BEWIJS. Uit VI. 8. N°. 5.

IV.

IV. WERKSTUK. Fig. 92.

Eenen cirkel in eenen gegeven driehoek ABD te beschrijven.

EUCL. IV. 4. — St. IV. 3. — L. G. II. prob. 15.

OPLOSSING. Is de bereiding van VI. 13. in de *Grondbeginsels*.

BEWIJS. Uit VI. 3. Gev. 1.

V. WERKSTUK. Fig. 93.

Eenen cirkel om eenen gegeven driehoek BAC te beschrijven.

EUCL. IV. 5. — St. IV. 4.

OPLOSSING. Is de Bereiding van V. 2.

BEWIJS. Uit V. 2. het Gevolg.

VI. WERKSTUK. Fig. 94.

Een vierkant in een gegeven cirkel te beschrijven.

EUCL. IV. 6. — St. V. 5. — L. G. IV. 3.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling, het III. Werkstuk van het I. Boek, en de 1. Vooronderstelling.

BEWIJS. Uit I. 21. en V. 7.

VII. WERKSTUK. Fig. 95.

Een vierkant om eenen gegeven cirkel te beschrijven.

EUCL. IV. 7. — St. IV. 6.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling, het III. en IV. Werkstuk uit het I. Boek.

BEWIJS. Uit I. 31. en V. 7.

VIII. WERKSTUK. Fig. 96.

Eenen cirkel in een gegeven vierkant te beschrijven.

EUCL. IV. 8.

OPLOSSING. Voor DB uit de 1. Vooronderstelling en I. Werkstuk 7. voor EF, EI, EG, EH uit I. Werkstuk 3. en dan door Vooronderstelling 4.

BEWIJS. Uit V. 7.

IX. WERKSTUK. Fig. 97.

Eenen cirkel om een gegeven vierkant te beschrijven.

EUCL. IV. 9.

OPLOSSING. Door de 1. en 4. Vooronderstelling.

BEWIJS. Uit V. 7.

X. WERKSTUK. Fig. 98.

Om eenen gegeven vierhoek ABCD, waarin de tegenovergestelde hoeken B en D, en A en C, gelijk aan twee regte zijn, eenen cirkel te beschrijven.

OPLOSSING. Trek AC: en dan door het V. Werkstuk van dit Boek, eenen cirkel om Δ ABC, die ook door D zal gaan.

BEWIJS. Uit VI. 7.

XI. WERKSTUK. Fig. 99.

In eenen gegeven cirkel eenen regelmatigen vijfhoek te beschrijven.

EUCL. IV. 11. — St. IV. 7. — L. G. IV. 5.

I. OPLOSSING. Van EUCLIDES. Door het XI. Werkstuk van het III. Boek, voor Δ BAC: door het I. Werkstuk van dit Boek voor Δ EFG: en voor DG, GF, EH, HF door V. Werkstuk 7.

BEWIJS. Uit VI. 10. Gev.

II. OPLOSSING. Van PTOLEMAEUS. Fig. 100. Rigt uit C de loodlijn CD op (door het III. Werkstuk van het I. Boek); deel CB in twee gelijke deelen in E, (door het VII. van het I. Boek) beschrijf uit E met den *radius* ED den boog DF; trek de lijn DF: het is de zijde van den vijfhoek.

BEWIJS. Uit VI. 22. Gev. 3.

XII. WERKSTUK. Fig. 101.

Eenen regelmatigen vijfhoek om den cirkel te beschrijven.

EUCL. IV. 12. — St. IV. 8.

OPLOSSING. Door het XI. Werkstuk van dit Boek en het IV. van het I.

BEWIJS. Uit VI. 14. Gev. 2.

XIII.

XIII. WERKSTUK. Fig. 102.

Eenen cirkel in eenen vijfhoek, of, in het algemeen, in eene gegeven regelmatigen veelhoek, te beschrijven.

EUCL. IV. 13. — St. IV. 12.

OPLOSSING. Door Werkstuk 15 van het I. Boek, voor hoek BCD: en dan voor CL door het V. van het I. Boek, en de 3. Vooronderstelling.

BEWIJS. Uit VI. 5.

XIV. WERKSTUK. Fig. 103.

Eenen cirkel om eenen vijfhoek, of, in het algemeen, om eenen gegeven regelmatigen veelhoek te beschrijven.

EUCL. IV. 14. — St. IV. 11.

OPLOSSING. Indien het middelpunt van den veelhoek niet gegeven is, moet men het zelve zoeken door V. Werkst. 1.

BEWIJS. Uit VI. 5.

XV. WERKSTUK. Fig. 104.

Eenen regelmatigen zeshoek in den cirkel te beschrijven.

EUCL. IV. 15. — St. IV. 9. — L. G. IV. 4.

OPLOSSING. Door VI. 8. Gev. 2.

BEWIJS. Uit VI. 8. het 2. Gevolg.

XVI. WERKSTUK.

Te bepalen welke veelhoeken men geometrisch in den cirkel beschrijven kan, en hoe men ze beschrijven moet.

OPLOSSING. De driehoek, het vierkant, de vijfhoek, en de zeshoek, zijn de eenige oorspronkelijke Figuren, die men geometrisch in den cirkel beschrijven kan.

Door middel van de vier gemelde veelhoeken, kan men een aantal andere beschrijven, en wel op tweederlei wijze.

Voor eerst, volgens het VII. Werkstuk van het V. Boek, door eene gedurige verdeeling der bogen in twee gelijke deelen: op die wijze beschrijft men door middel van den driehoek, veelhoeken van 6, 12, 24, 48 zijden enz.; door middel van het vierkant, veelhoeken van 8, 16, 32 zijden enz.; door middel van den vijfhoek, veelhoeken van 10, 20, 40 zijden enz.

Ten tweeden, door de inschrijving van twee oorspronkelijke veelhoeken: want, zoo AD, AB, Fig. 105. de zijden

zijn

zijn van twee veelhoeken, wier zijden *g* en G in getal zijn; zal de boog DB, G — *g* zijden behelzen van eenen veelhoek waarin het getal zijden G × *g* is: en dus, zoo G — *g* = 1, of G × *g* een veelvoud is van G — *g*, of zoo G — *g* = 2, of eenige magt van 2 is, zal men den veelhoek van G × *g* zijden kunnen beschrijven. Bij voorbeeld, zij AD de zijde van eenen driehoek, AB die van eenen vijfhoek; dan zal de boog DB twee zijden van eenen *vijftien-hoek* behelzen: en dus is de choorde van den halven boog BD, de zijde van eenen vijftien-hoek. (Zie EUCL. IV. het 16. Voorst.)

BEWIJS. Uit VI. 12. Gevolg.

I. AANMERKING. Somtijds kunnen er bijzondere manieren plaats hebben, zoo als, bij voorbeeld, voor den tienhoek, waar voor twee oplossingen voorhanden zijn.

I. OPLOSSING. Van EUCLIDES. Fig. 30. Men snijde den *radius* AB in uiterste en middelste rede. (I. Boek, X. Werkstuk). Men make BC = AD: en BC is de zijde van den tienhoek.

BEWIJS. Uit VI. 21.

II. OPLOSSING. Van PTOLEMAEUS. Fig. 100 Rigt uit C de loodlijn CD op: (I. Boek, III. Werkstuk) deel CB in twee gelijke deelen in E: (I. Boek, VII. Werkstuk). Beschrijf uit E met den *radius* ED den boog DF. FC is de zijde van den tienhoek.

BEWIJS. Uit VI. 22. het 3. Gevolg.

II. AANMERKING. Er is geen Geometrische manier bekend, om alle veelhoeken, hoegenaamd, in den cirkel te beschrijven. En in de daad, die beschrijving hangt af, gelijk van zelf blijkt, van de verdeeling des omtreks van den cirkel in zoo vele gelijke deelen als er zijden in den voorgestelden veelhoek zijn, daar iedere zijde de choorde is van den boog dien zij bespant: of, wat op het zelve uitkomt, die beschrijving hangt af van de verdeeling van hoeken in een gegeven getal deelen: hetwelk, gelijk wij gezien hebben, *geometrisch* niet mogelijk is (zie *algemeene Aanmerking* op Werkstuk XVII van het I. Boek): maar het is mogelijk door die *mechanische* lijn, welke men *quadratrix* noemt, gelijk aldaar is aangemerkt geworden. Men neme derhalve zulks voor gegeven aan: dan valt het niet moeijelijk eenen gelijkbeenigen driehoek te maken, wiens hoeken op de grondlijn in eene bepaalde rede staan tot den hoek in den top; een Werkstuk, waarvan de oplossing de beschrijving van alle veelhoeken in den cirkel gemakkelijk maakt, zoo als in de *Grondbeginsels der Meetkunde*, VI. 11. *Aanm.* is aangetoond. De oplossing is deze, zie CLAVIUS §. 3. van het *Appendix* op EUCL. VI. Zij een gelijkbeenige driehoek te maken, waarvan de hoeken op de grondlijn staan tot dien in de top als BA : BC. Fig: 106. Men beschrijve eenen cirkel

FIHGKF naar welgevallen: trek de middellijn FG. Men verdeele den halven omtrek FIHG in H, zoo dat ⌒ FIH : ⌒ GH = BA : ½ BC. Trek GH, FH, en uit het middelpunt, EH; dan is ∠ FGH : ∠ GFH = ⌒ FIH : ⌒ GH (VIII. 1.) = BA : ½ BC. Gevolgelijk BA : BC = ∠ FGH : 2 ∠ GFH = ∠ FGH : ∠ GEH - derhalve is GEH de gevraagde driehoek. Men trekke dan in den cirkel (Fig. 107.) de middellijn ER: make ∠ REH = ½ ∠ GEH = ∠ GER: dan is ∠ EGH = ∠ GHE: en de choorde GH is de zijde van den veelhoek die door den gelijkbeenigen driehoek GEH beschreven wordt. Indien GH de choorde moet zijn van eenen zeventien-hoek, zal ∠ EGH zijn to t ∠ GEH = 8 : 1. (VI. 10.).

III. AANMERKING. Wij merken eindelijk aan dat de Heer GAUSS, in zijn doorwrocht werk *Disquisitiones Arithmeticae*. § 365. getoond heeft, dat men in den cirkel eenen regelmatigen veelhoek beschrijven kan van 17 zijden, of in het algemeen van een getal zijden, dat uitgedrukt wordt door 2, of eenige magt van 2, of wel door een *eerste getal* hetwelk deze gedaante heeft $2^m + 1$, of eene vermenigvuldiging is van eenige magt van 2, door een of meerdere eerste getallen van de gezegde form. Maar dit Voorstel van den Heer GAUSS hangt af van verscheide *formules* die eerst in de verhevene Arithmetica ontwikkeld, en dus hier geenzins uitgelegd, en door het geen in de *Grondbeginsels der Meetkunde* voorgedragen is, verstaanbaar gemaakt kunnen worden.

„ Het komt verwonderlijk voor" zegt de Heer GAUSS „ dat „ daar de verdeeling des omtreks van den cirkel in 3 en in „ 5 deelen, reeds ten tijde van EUCLIDES bekend was, men daar „ bij, zederd twee duizend jaren niets gevoegd heeft; en dat „ alle Wiskunstenaars als zeker hadden aangekondigd dat men „ door geometrische constructiën geene verdeeling des cirkels „ kan bewerken, dan de reeds gemelde en *die welke daar* uit „ volgen, te weten, 2^m, 15, 3.2^m, 5.2^m, 15.2^m." Ook nu telt de Heer GAUSS de volgende verdeelingen op welke men tot 300 toe geometrisch kan verrigten, waarvan wij die, welke van de verdeeling in 17 afhangen, en dus nieuw zijn, tusschen ( ) geplaatst hebben: gelijk mede 257* met een sterretje hebben onderscheiden, om dat het beschrijven van dien veelhoek afhangt van de formule $2^m + 1$: te weten 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, (17), 20, 24, 30, 32, (34), 40, 48, (51), 60, 64, (68), 80, (85), 96, (102), 120, 128, (136), 160, (170), 192, (204), (255), 256, 257*, (272).

IV. AANMERKING. Wanneer men zich met oplossingen vergenoegt die het vraagstuk niet volkomen juist, maar slechts met eene in de praktijk genoegzame naauwkeurigheid oplossen, zal men de volgende in aanmerking kunnen nemen.

XVII. WERKSTUK.

Eenen veelhoek van zoo vele zijden men wil in den cirkel te beschrijven, of met volle naauwkeurigheid, of immers ten naasten bij.

OPLOSSING. Zij *g* het getal zijden.

Beschrijf op de middellijn AB eenen gelijkzijdigen driehoek AFB. Fig. 108.

Deel

Deel het dubbeld der middellijn AB in zoo vele deelen als de veelhoek zijden moet hebben: zij BD een van die deelen: zoo dat $BD = \frac{2\,AB}{g}$.

Trek door D de lijn FDK, en daar na de choorde BK. Ik zeg dat BK, of naauwkeurig, of ten naasten bij, de zijde is van den gevraagden veelhoek (*).

BEWIJS. Trek KI loodregt en CK; dan is $\angle KCB$ de middelpuntshoek: men noeme dien x: Dan is $FC : CD = KI : DI = KI : CI - CD = \text{sin.}\, x : \text{cos.}\, x - CD$: maar $CD = CB - BD = CB - \frac{4\,CB}{g} = 1 - \frac{4}{g} = \frac{g-4}{g}$: indien de *radius* $CB = 1$ gesteld wordt. Maar $FC = \sqrt{3}$; gevolgelijk

$$\sqrt{3} : \frac{g-4}{g} = \text{sin.}\, x : \text{cos.}\, x - \frac{g-4}{g} =$$

$$\frac{\text{sin.}\, x}{\text{cos.}\, x} : 1 - \frac{g-4}{g\,.\,\text{cos.}\, x} = \text{tang.}\, x : 1 - \frac{g-4}{g}\,.\,\text{sec.}\, x$$

Men stelle kortheidshalve $\frac{g-4}{g} = p$: dan is

$\sqrt{3} : p = \text{tang.}\, x : 1 - p\,.\text{sec.}\, x$: en derhalve,

$$p\,.\text{tang.}\, x = \sqrt{3}\,.(1 - p\,.\text{sec.}\, x) = \sqrt{3} - p\,.\sqrt{3}\,.\text{sec.}\, x$$

en $\text{tang.}\, x = \frac{\sqrt{3}}{p} - \sqrt{3}\, \text{sec.}\, x$: en

$$\text{tang.}^2\, x = \frac{3}{p^2} - \frac{6}{p}\, \text{sec.}\, x + 3\, \text{sec.}^2\, x = \text{sec.}^2\, x - 1:$$

derhalve $\text{sec.}^2\, x - \frac{3\, \text{sec.}\, x}{p} = -\left(\frac{3}{2\,p^2} + \frac{1}{2}\right)$

$$\text{en } \text{sec.}^2\, x - \frac{3\, \text{sec.}\, x}{p} + \frac{9}{4\,p^2} = -\frac{3}{2\,p^2} - \frac{1}{2} + \frac{9}{4\,p^2}$$

$$= \frac{3 - 2\,p^2}{4\,p^2}$$

en

(*) Die Oplossing werd mij vóór vele jaren door wijlen mijnen dierbaren vriend den Hoogleeraar NIEUWLAND, medegedeeld: niet als door hem uitgevonden, maar als iets dat hij elders hadt aangetroffen: hij voegde er het Bewijs bij dat ik hier laat volgen. Ik heb het stuk zelf onder de nagelatene papieren van NIEUWLAND gevonden: hij heeft er opgeschreven: „*Regle de* RENALDINI *pour* „*trouver les cotés des polygones inscrits, à peu-près: tirée d'un recen-* „*sion des* geometrische abhandlungen von KÄSTNER, *dans les* algemei- „ne Litteratur anzeigen." In de daad het Voorstel staat in RENALDINI's werk, *de resolutione et compositione Mathematica*, Lib. II. p. 367, 368: doch zonder Bewijs. RENALDINI verbeelde zich, maar te onregt, dat zijne oplossing voor alle gevallen algemeen was.

en $sec.\ x - \frac{s}{2p} = \pm \frac{\sqrt{3 - 2p^2}}{2p}$: of

$sec.\ x = \frac{3 - \sqrt{3 - 2p^2}}{2p}$: dat is, voor p deszelfs waarde stellende.

$Sec.\ x = \frac{3g - \sqrt{g^2 + 16g - 32}}{2(g - 4)}$: en derhalve om dat

$cos.\ x = \frac{1}{sec.\ x}$

$cos.\ x = \frac{2(g - 4)}{3g - \sqrt{g^2 + 16g - 32}}$.

I. AANMERKING. In de oplossing van NIEUWLAND wordt de dubbelde middellijn AB in g deelen verdeeld, waarvan BD er één is. Bij RENALDINI en KÄSTNER wordt de middellijn in g deelen verdeeld: maar DB wordt genomen gelijk aan twee van die deelen: het geen derhalve op het zelfde uitkomt.

II. AANMERKING. Indien nu achtervolgens gesteld wordt:

$g = 3$; is $cos.\ x = \frac{-2}{9 - \sqrt{9 + 48 - 32}} = \frac{-2}{9 - \sqrt{25}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$: dus is $cos.\ x$ negatief, derhalve de hoek stomp: dus $x = 120°$: dat de middelpuntshoek is eens gelijkzijdigen driehoeks in den cirkel.

Indien $g = 4$; is $cos.\ x = 0$: dus $x = 90°$. de middelpuntshoek van het vierkant.

Indien $g = 6$ is $cos.\ x = \frac{4}{18 - \sqrt{100}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ dus $x = 60°$, middelpunts-hoek van den zeshoek.

Deze zijn de eenigste gevallen waarin de regel van RENALDINI juist is: om dat daarin de cosinussen door juiste getallen uitgedrukt worden.

Indien $g = 5$: is $cos.\ x = \frac{2}{15 - \sqrt{73}} = 0.309793$ en $x = 71°.\ 57'.\ 20''$. in plaats van $72°$.

Indien $g = 10$ is $cos.\ x = \frac{12}{30 - \sqrt{228}} = 0.805357$; derhalve $x = 36°.\ 21'.\ 21''$: in plaats van $36°$.

Indien $x = 17$: is $cos.\ x = \frac{26}{51 - \sqrt{329}} = \frac{26}{51 - 23}$ =

$= \frac{26}{28} = \frac{13}{14} = 0{,}9285704$: en $x = 21^\circ.\ 47'.\ 47''$: in plaats van $21^\circ.\ 10'.\ 34''$.

En de verschillen worden al grooter en grooter.

III. AANMERKING. J. C. STURMIUS hadt in zijne *Mathesis enucleata*, in 1688. uitgegeven, op bl. 38 den regel van RENALDINI als algemeene waarheid gesteld: maar JACOB BERNOULLI *Operum* p. 765) heeft reeds in 1696. gewaarschuwd dat de regel van RENALDINI niet juist is: waarin hij gevolgd is door WOLF, die zulks voor den achthoek bewezen heeft in zijne *Elementa Analyseos* §. 292. KAESTNER heeft dit stuk meer opzettelijk behandelt in zijne *Geometrische Abhandlungen*, I. *Sammlung*, N°. 40.

XVIII. WERKSTUK.

Te bepalen welke regelmatige veelhoeken men om den cirkel beschrijven kan, en hoe men ze beschrijven moet.

OPLOSSING. Alle, die men in den cirkel beschrijven kan, kan men ook om den cirkel beschrijven: men gaat te werk zoo als in het XII. Werkstuk.

BEWIJS. Uit VI. 14. het 3. Gevolg.

XIX. WERKSTUK.

Eenigen veelhoek op eene gegeven regte lijn te beschrijven.

OPLOSSING. Fig. 109. Men beschrijft eerst in eenen cirkel, naar welgevallen, eenen veelhoek aan den gevraagden gelijkvormig. Vervolgens maakt men op de gegeven lijn AB eenen driehoek ADB gelijkvormig aan den middelpunts-driehoek ECF van den gemaakten veelhoek. Dan beschrijft men uit D met den *radius* DA eenen cirkel, in welken men de lijnen BG, GH, enz. gelijk aan AB stelt: deze zullen den gevraagden veelhoek uitmaken.

I. AANMERKING. Hierop steunt het gebruik van den *proportionaal-passer* om dit Werkstuk optelossen.

II. AANMERKING. Er zijn voor sommige veelhoeken korter handelwijzen: gelijk voor den driehoek en het vierkant: zie II. Boek, Werkstuk 2 en 5.

III. AANMERKING. Dit Werkstuk kan, in het algemeen, even weinig geometrisch opgelost worden als dat van het beschrijven eens veelhoeks in den cirkel: maar er kunnen oplossingen gegeven worden, die ten naastenbij naauwkeurig zijn. Fig. 110.

Zij AB eene gegeven lijn: maak daarop den gelijkzijdigen driehoek ACB: trek de loodlijn CD: dan is ∠ ACD de middelpuntshoek van den zeshoek waarvan AB de zijde is: en dus ∠ ACB =

= 60°. en ∠ ACD = 30°: verleng DC tot in K, zoo dat CK = AC: trek AK, BK: dan is in △ AKC, ∠ CAK = ∠ AKC: en ∠ ACD = 2 ∠ AKD: en dus ∠ AKD = 15°: en ∠ AKB = 30°; derhalve △ AKB de middelpunts-driehoek van een' twaalfhoek, waarvan AB de zijde is.

Verleng nu wederom DK in L zoo dat LK = AK: trek AL, LB: dan is ∠ ALD = ½ ∠ AKD = 7°. 15. en dus ∠ ALB = 15°: en derhalve △ ALB de middelpunts-driehoek, van een' 24 hoek, waarvan AB de zijde is: en zoo voorts voor den 48 hoek, den 96 hoek, enz.

Indien men dan uit K, met den radius KA eenen cirkel trekt, zoude de lijn AB twaalf malen op den omtrek van dien cirkel toegepast kunnen worden, en men hadt een' twaalfhoek op AB: en indien men den cirkel uit L trekt met den *radius* LA, zoude men AB 24 malen op den omtrek kunnen toepasſen, en men hadt een' XXIV hoek.

Men ſtelle nu dat CK in 6 deelen in E, F, G, enz. geſneden wordt: zullen E, F, G, H, I, ten naasten bij de middelpunten zijn, waaruit de cirkels met de *radii* EA, FA, GA, enz. getrokken, de omtrekken voor den VII hoek, den VIII hoek, den IX hoek, enz. zijn.

Men neme het ſlip G: ſtellende AB = 1, is AD = ½ en AC = 1: CD = ½ $\sqrt{3}$ = ½ × 1.73205 = 0.866025; dus DG = CD + CG = CD + $\frac{AC}{2}$ = 0.866025 + 0.5 = 1.366025: derhalve AD: DG = ½: 1.366025 = 1: 2.732050 = 1: *cot.* ∠ AGD: d. i. *cot.* ∠ AGD = 2732050: derhalve ∠ AGD = 20°. 6′. in plaats van 20°: halve middelpuntshoek voor een negenhoek: een verſchil dat gering is in het maken van deze ſoort van figuren.

Voor de veelhoeken van den XII hoek tot den XXIV hoek zoude men KL = KA, wederom in 12 deelen verdeelen. Nu is

$(AK)^2 = (AD)^2 + (DK)^2 = (0.5)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 = (0.5)^2 + (1.866)^2 = 0.25 + 3.4482 = 3.6982$: en AK = $\sqrt{3.6982}$ = 1.9231 = KL: waaruit blijkt dat voor den XVIII hoek bijv. KM = ½ AK = 0.9231: en derhalve MD = MK + KD = 0.9231 + 1.866 = 2.789: en derhalve

AD: DM = ½: 2.789 = 1: 5.578 = r: *cot.* ∠ AMD: dus ∠ AMD = 10°. 11′.: in plaats van 10 gr.

Er zal dan wel eenig verſchil plaats hebben; maar dat voor den VI hoek, XII hoek, XXIV hoek, XLVIII hoek geen plaats heeft, en voor de tusſchen beide inliggende veelhoeken, in het vervaardigen van figuren zeer gering is.

Men ziet dan waarop die oploſſing neder komt: Gegeven zijnde de lijn AB: beſchrijf op dezelve den gelijkzijdigen driehoek ACB: en trek de loodlijn CD onbepaald boven C verlengd: de cirkel uit C met CA getrokken is die waar voor AB de zijde van den zeshoek is. Maak CK = AC: trek KA. De cirkel uit K met KA, *radius*, getrokken, is die, waarin AB de zijde van den XII hoek is: neem EC = EF = FG = GH = HI = IK = $\frac{1}{6}$ AC: de cirkels uit E, F, G, enz. reſpectivelijk, met de *radii* EA, FA, GA, enz. getrokken, zyn die voor

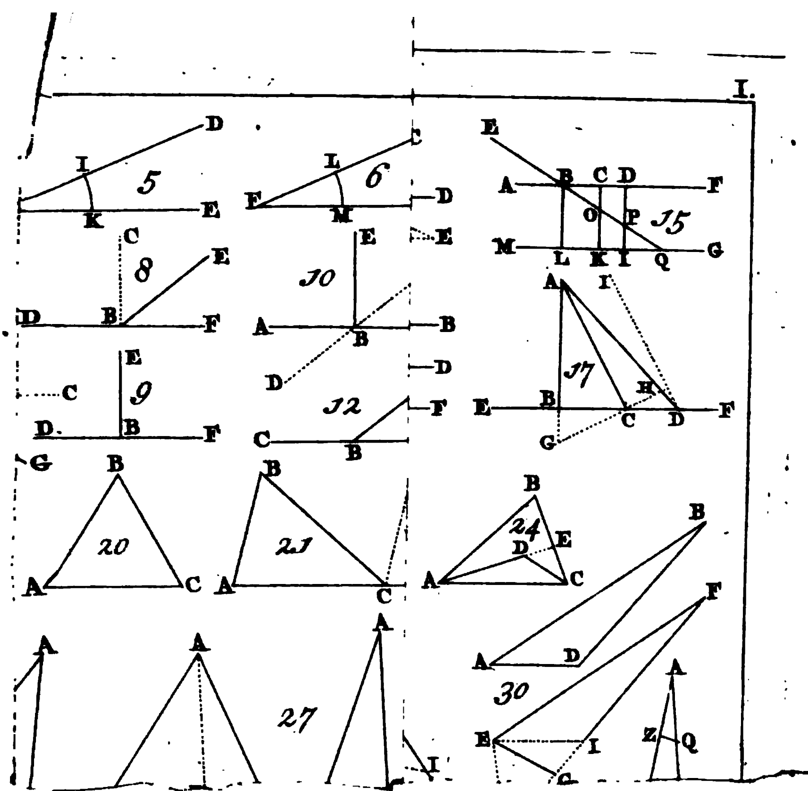
wel-

welke AB de zijde is van de VII hoek, den VIII hoek, den IX hoek, enz.

Maak KL = KA, de cirkel uit L met LA *radius* getrokken, is die waarin AB de zijde is van den XXIV hoek, enz

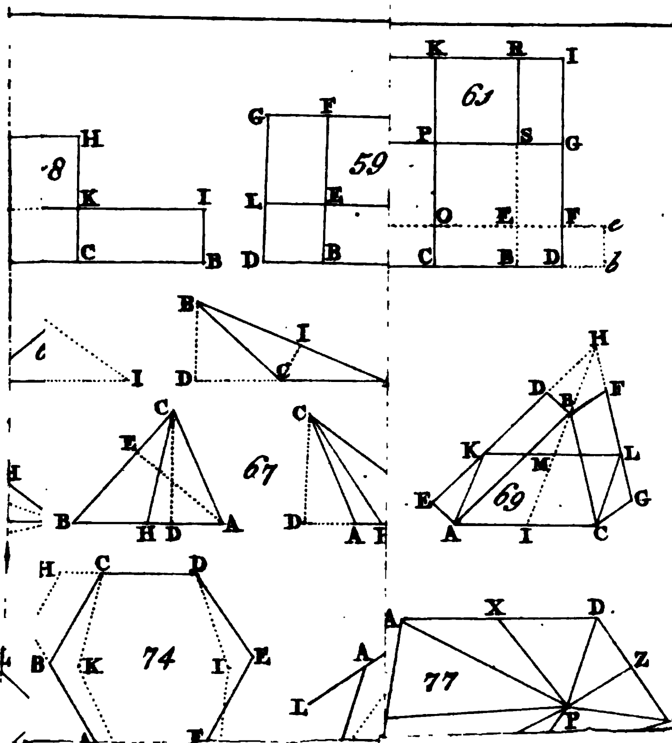
Deelende KL in 12 deelen, zullen de zelve de middelpunten opleveren voor de cirkels, waarin AB is de zijde van den XIII hoek, XIV hoek, XV hoek, enz. tot den XXIV hoek: de cirkel uit M met den *radius* AM getrokken, is die waarin AB de zijde is van den XVIII hoek: *het alles ten naasten bij.*

IV. AANMERKING. Deze Oplossing wordt met eenig verschil gevonden bij SEBASTIEN LE CLERC, *Géometrie sur le papier et sur le terrain Liv.* II. pr. 6, 7. doch zonder bewijzen. of aanduiding van gronden waarop het bewijs steunt. Het verschil bestaat hierin, dat die Schrijver uit C den boog CA trekt, en denzelven in zes deelen bijv. deelt, daar wij de lijn CA verdeelen: en dus neemt hij voor CE, CF, CG, enz. niet het $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, van de choorde CA: maar de choorden van bogen die $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, enz. zijn van den boog AC: dat wel eenige meerdere naauwkeurigheid geeft, doch te weinig om te kunnen opwegen tegen de zwarigheid dat het verdeelen van boog AC in 6 deelen, niet dan bij toetsingen geschieden kan: daar het deelen der lijn AC, in 6, vervolgens van AK, in 12, van AL in 24 deelen, geometrisch en zonder moeite verrigt wordt.



I.
5
D I K E
6
L F M C D
15
E A B C D F O P M L K I Q G
8
C E D B F
10
E A B D
9
E C D. B F
12
C B F
17
A I E B C D F G H
20
B A C
21
B A C
24
B D E A C
27
A A A I
30
B A D F E I C A Z Q
G

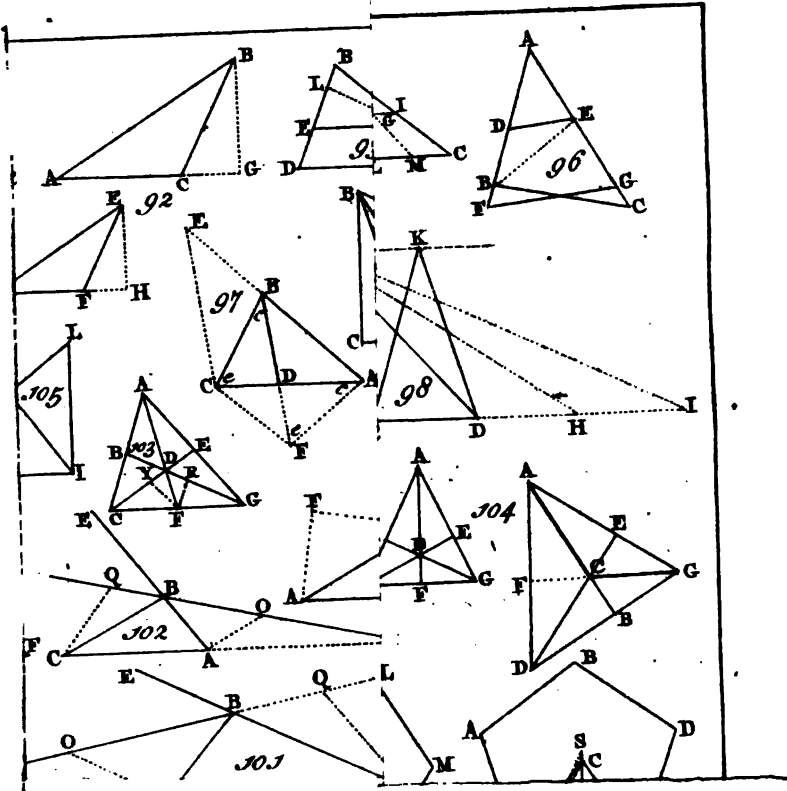




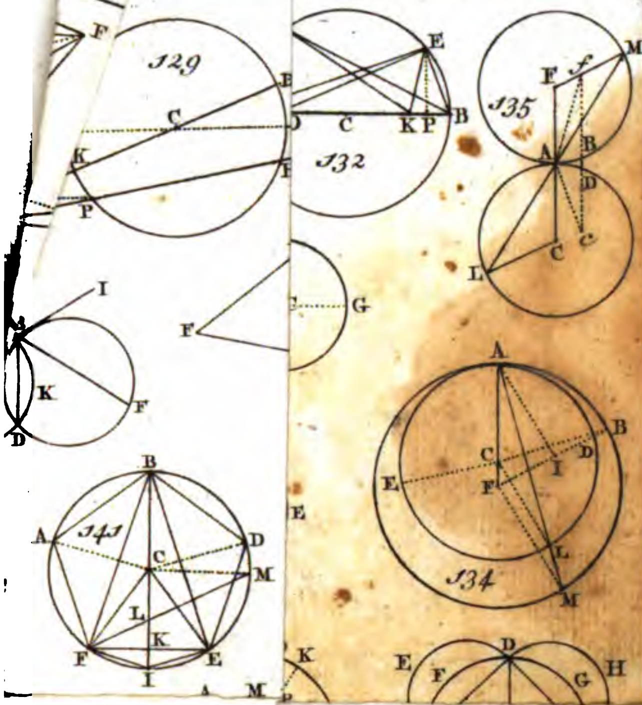
H
8
K
I
C
B
G
F
59
L
E
D
B
K
R
I
61
P
S
G
O
E
F
e
C
B
D
b
l
I
B
I
D
C
H
D
F
B
C
E
67
B
H D
A
C
D
A
F
K
M
L
E
69
G
A
I
C
H
C
D
B
K
74
I
E
A
F
A
L
A
X
D
Z
77
P



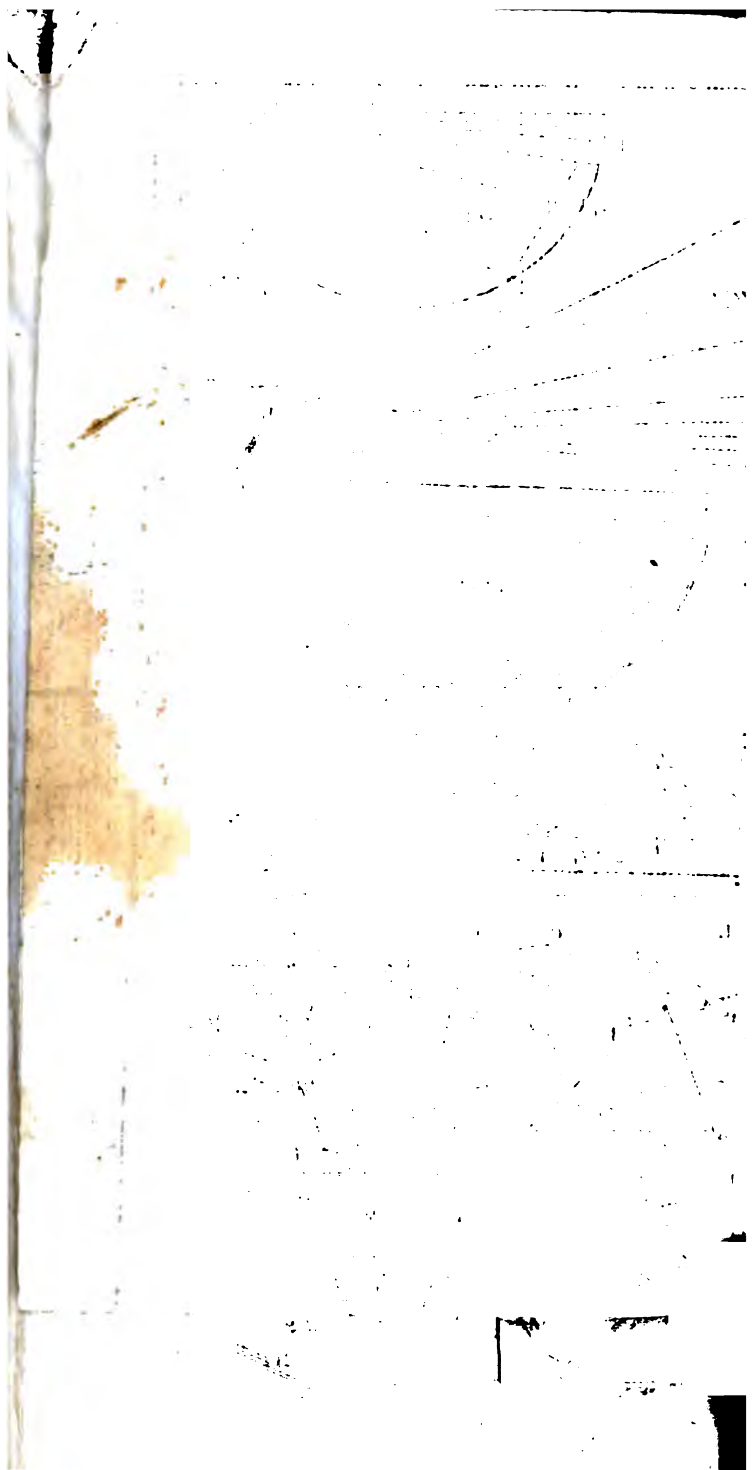
III.

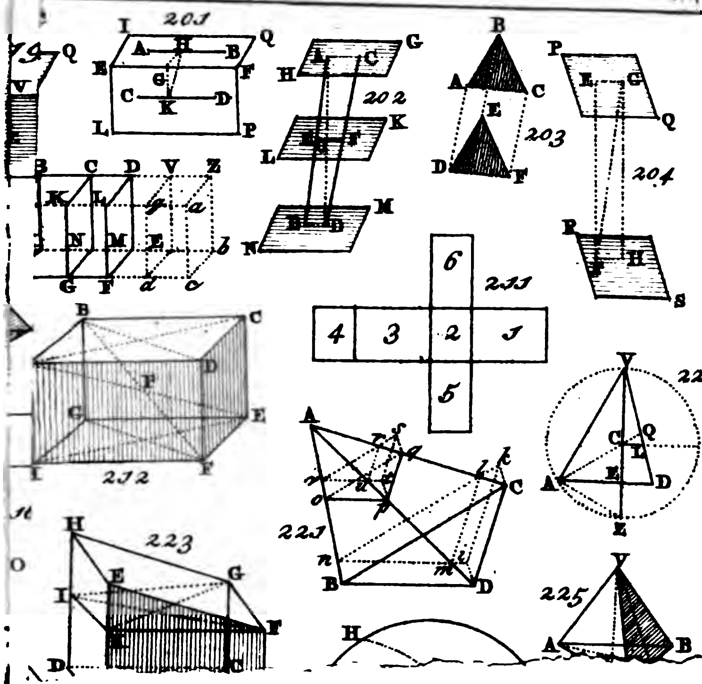





129
132
135
141
134



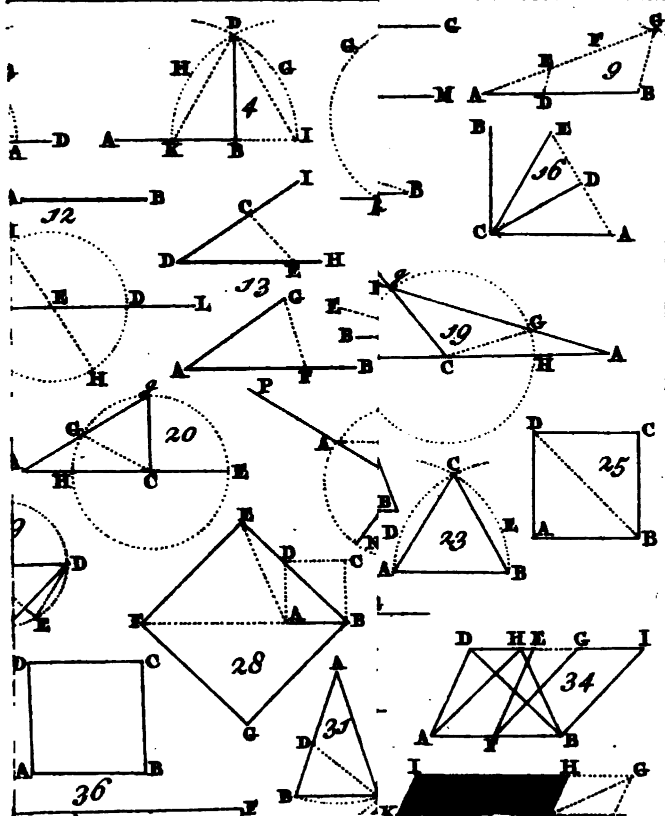


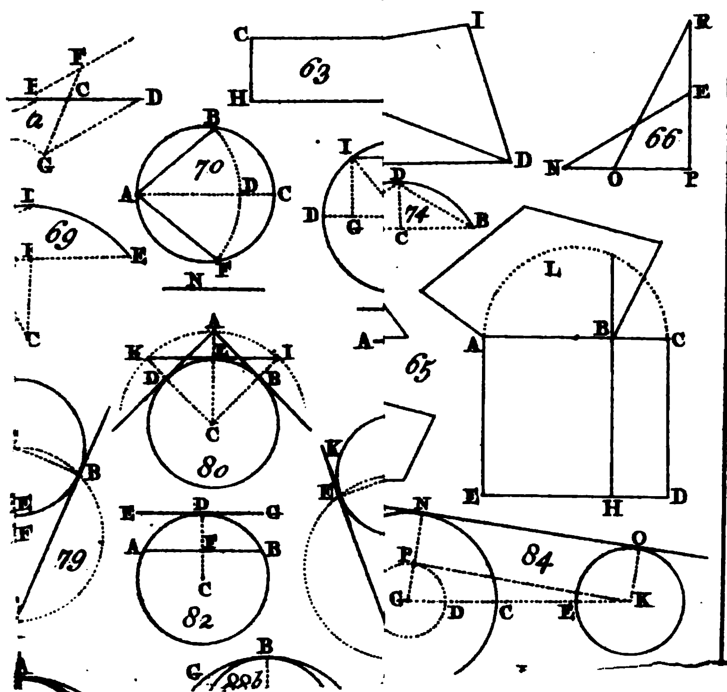


201
202
203
204
6
4
3
2
1
5
211
212
221
223
225



Werkstuk I.




63
66
70
69
74
65
80
79
82
84

